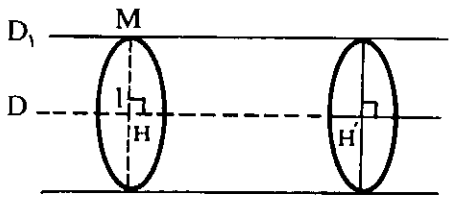
● محمد هاشم رستمی

(قسمت هفتم)

مکان هندسی

(اوّل ، دوم ، سوم، چهارم دبیرستان)

۸ ــ مکان هندسی نقاطی از فضا که از خط ثابت D به فاصله ثابت l باشد، رویهٔ یک استوانهٔ دوّاری است که خط D محور آن و مقطع قائمش (فصل مشترک رویهٔ استوانه‌ای دوار با صفحه‌ای عمودبر محور آن سطح) دایره‌ای به شعاع l است.



اثبات به روش هندسی: خط D را در صفحه‌ای مانندP درنظر می‌گیریم. خط D_1 را به موازات خط D و به فاصلهٔ l از آن رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این خط یکی از دو خط مکان هندسی نقطه‌ای است که از خط D به فاصلهٔ ثابت l قرار دارد. از دَوَران خط D_1 حول خط D، یک رویهٔ استوانه‌ای دوّار به وجود می‌آید که خط D محور آن و مقطع قائمش (یعنی فصل مشترک سطح استوانه‌ای دوّار با صفحه‌ای عمود بر محور آن سطح) دایره‌ای به شعاع l است. بنابراین، هر نقطه واقع بر سطح استوانه‌ای دوّار از خط D به فاصلهٔ l واقع است، و هر نقطه‌ای که به فاصله l از خط D باشد، روی این سطح استوانه‌ای دوّار قرار دارد.

اثبات به روش تحلیلی: خط $\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$: D را در دستگاه مختصات $o-xyz$ درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یکی از نقاط مکان هندسی فوق باشد یعنی نقطه‌ای از فضا که فاصله‌اش از خط D برابر مقدار ثابت l است. در این صورت اگر A نقطه ای اختیاری از خط D باشد،داریم:

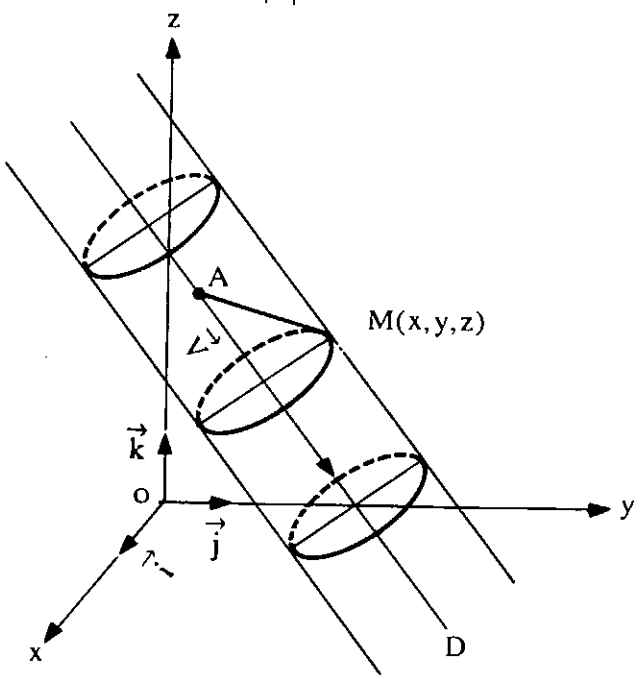
فاصلهٔ نقطه‌ازخط در فضا: $d=\frac{\left|\vec{AM}\wedge\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|}$

$A(x_1,y_1,z_1), M(x,y,z) \Rightarrow \vec{AM}(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$،

$\vec{V}(p,q,r) \Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{V}(r(y-y_1)-q(z-z_1), p(z-z_1)$

$r(x-x_1)$

$q(x-x_1)-p(y-y_1)$، $\left|\vec{V}\right|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, $d=l$،



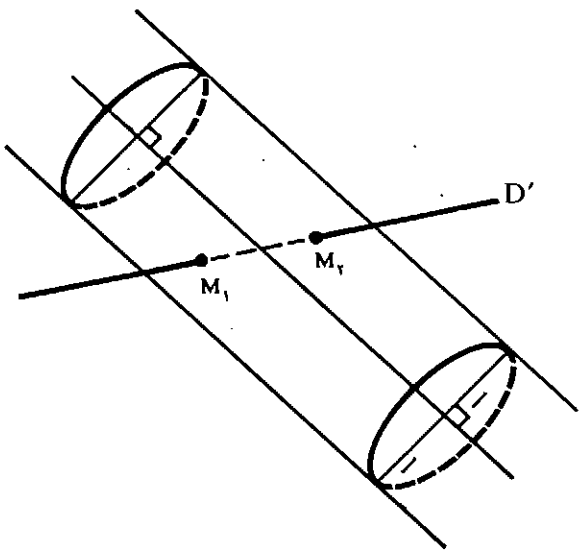
$$\Rightarrow l=\frac{\sqrt{\left[r(y-y_1)-q(z-z_1)\right]^2+\left[p(z-z_1)-r(x-x_1)\right]^2+\left[q(x-x_1)-p(y-y_1)\right]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[r(y-y_1)-q(z-z_1)\right]^2+\left[p(z-z_1)-r(x-x_1)\right]^2+\left[q(x-x_1)-p(y-y_1)\right]^2-l^2(p^2+q^2+r^2)=0} \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱)، معادلهٔ یک رویهٔ استوانه‌ای دوار است که خط D محور آن و شعاع مقطع قائمش برابر l است. واضح است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، متعلق به این رویه و فاصله اش از خط D برابر l است.

مثال ۱ ــ دو خط متنافر D و D′ مفروضند. نقطه‌ای از خط D′ را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l باشد.

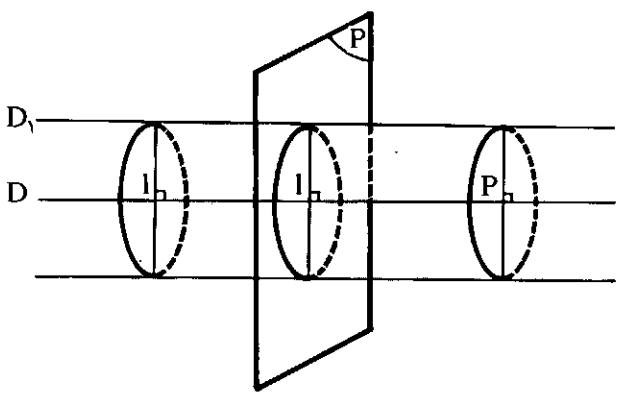
حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از خط D به فاصلهٔ معلوم l واقع است سطح استوانه‌ای دواری است که شعاع مقطع قائمش l است. این رویه را رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع این رویه باخط D′ جواب مسأله است و به تعداد نقاط برخورد، مسأله جواب دارد.



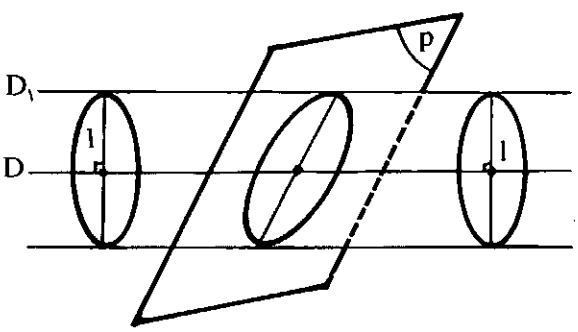
مثال ۲ ــ صفحهٔ P و خط D غیرواقع در این صفحه مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l باشد.

حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از خط D به فاصلهٔ معین l واقع است، یعنی سطح استوانه‌ای دواری را که خط D محور آن و شعاع مقطع قائمش دایره‌ای به شعاع l است، رسم می‌کنیم. فصل مشترک این سطح دوار با صفحه P جواب مسأله است. این جواب (در صورت وجود) بنابر وضع نسبی خط D و صفحهٔ P حالتهای مختلفی دارد که عبارتند از:

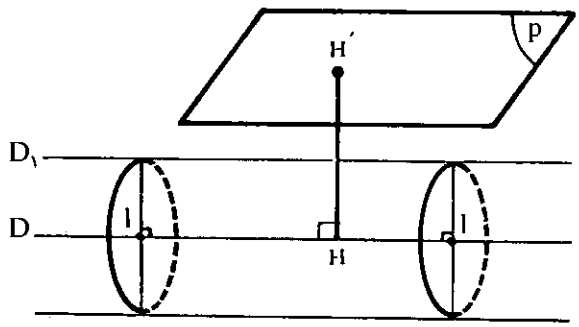
الف) اگر صفحه P بر خط D عمود باشد، جواب دایره‌ای به شعاع l است.



ب) اگر صفحهٔ P نسبت به خط D مایل باشد، جواب یک بیضی است.

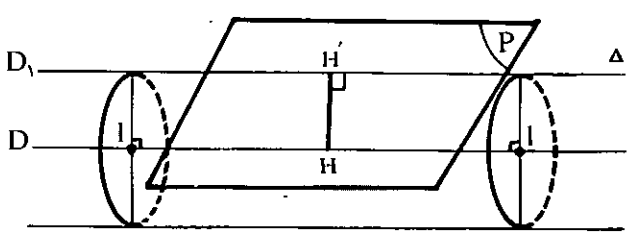


ج) اگر صفحهٔ P موازی خط D باشد، حالتهای زیر را خواهیم داشت:

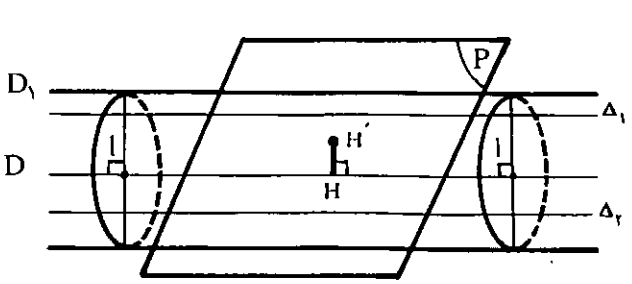


۱) اگر صفحهٔ P رویهٔ استوانه‌ای دوار را قطع نکند، مسأله جواب ندارد و این در صورتی است که فاصلهٔ خط D از صفحهٔ P بیشتر از l باشد.

۲) اگر صفحهٔ P بر رویهٔ استوانه‌ای دوّار در طول یک خط راست مماس باشد، جواب مسأله همان خط تماس می‌باشد و این در صورتی است که فاصلهٔ خط D از صفحهٔ P برابر l باشد.

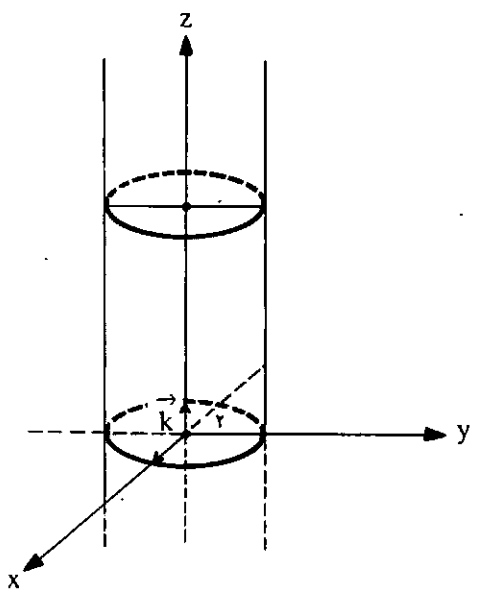


۳) اگر صفحه P سطح استوانه‌ای دوار را قطع کند، جواب دو خط راست موازی خط D می‌باشند، و این در صورتی است که فاصلهٔ خط D از صفحه P کوچکتر از l و بزرگتر از صفر باشد.



تبصره ــ اگر صفحهٔ P بر خط D بگذرد همان‌طوری که پیش از این دیدیم مکان هندسی جواب مسأله دو خط راست موازی خط D، در طرفین آن و به فاصلهٔ l از آن می‌باشد، که در حالت فضایی این دو خط فصل مشترک سطح استوانه‌ای دوّار با صفحه P است که چون در این حالت فاصلهٔ خط D از صفحهٔ P صفر است، خطوط جواب مسأله به فاصله l از خط D واقعند.

مثال ۱ ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از محور z ها در دستگاه مختصات $o-xyz$ به فاصلهٔ ۲ قرار داشته باشد.



حل ــ در دستگاه مختصات دکارتی در فضا معادلهٔ محور z ها به صورت: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ است.

برای تعیین معادلهٔ مکان هندسی فوق، فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان باشد. با توجه به اینکه بردارهادی محور z ها $\vec{k}(0,0,1)$ است، اگر نقطهٔ دلخواه $A(0,0,1)$ را روی محور z ها اختیار کنیم، خواهیم داشت:

$$M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad A\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{vmatrix},$$

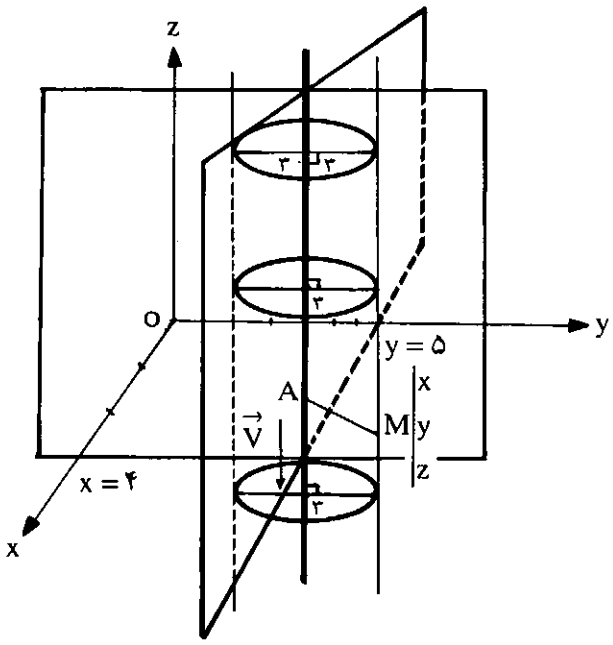
$$\vec{V}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{V}\begin{vmatrix}y\\-x\\0\end{vmatrix}$$

$$d=\frac{|\vec{AM}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}\Rightarrow$$

$$2=\frac{\sqrt{(y)^2+(-x)^2+0}}{\sqrt{0+0+1}}\Rightarrow 2=\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{1}\Rightarrow x^2+y^2=4$$

معادلهٔ بالا معادلهٔ یک سطح استوانه‌ای دوّار است که محور آن محور z ها و شعاع مقطع قائمش برابر ۲ است. فصل مشترک این سطح استوانه‌ای دوّار با صفحهٔ xoy از دستگاه مختصات $o-xyz$ دایرهٔ (c) به معادلهٔ $(c):\begin{cases}x^2+y^2=4\\z=0\end{cases}$ است.

مثال ۲ ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از خط $D:\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ به فاصلهٔ ۳ واقع است.



حل ــ فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی فوق باشد. بردارهادی خط D به تصاویر (۱،۰،۰)

است. بنابراین با اختیار نمودن نقطهٔ $A(4,5,2)$ از خط D خواهیم داشت:

$$\vec{AM}\begin{vmatrix}x-4\\y-5\\z-2\end{vmatrix}\quad\vec{V}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}\Rightarrow\vec{AM}\wedge\vec{V}\begin{vmatrix}y-5\\-x+4\\0\end{vmatrix}$$

$$d=\frac{|\vec{AM}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}\Rightarrow$$

$$3=\frac{\sqrt{(y-5)^2+(-x+4)^2+0}}{\sqrt{0+0+1}}$$

$$\Rightarrow (y-5)^2+(x-4)^2=9$$

این معادله رویهٔ استوانه‌ای دواری را مشخص می‌کند که مقطع قائم آن با صفحهٔ xoy، دایرهٔ به معادلهٔ $(c):\begin{cases}(y-5)^2+(x-4)^2=9\\z=0\end{cases}$ است.

مثال ۳ ــ نقطه‌ای روی خط $D:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z$ بیابید که از خط $D':\begin{cases}x-2y+z-1=0\\2x+y-z+3=0\end{cases}$ به فاصلهٔ $15\sqrt{\frac{5}{14}}$ باشد.

حل ــ معادلهٔ رویهٔ استوانه‌ای دوّاری را که خط D محور آن و شعاع مقطع قائمش $15\sqrt{\frac{5}{14}}$ است می‌نویسیم و نقطهٔ تقاطع این رویه با خط D′ را به دست می‌آوریم. اگر $M(x,y,z)$ نقطه‌ای از این مکان باشد با توجه به این که بردار هادی خط D به تصاویر $\vec{V}(2,3,1)$ است با انتخاب نقطه دلخواه $A(1,0,0)$ از خط D داریم:

$$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\quad A\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{AM}\begin{vmatrix}x-1\\y\\z\end{vmatrix},\quad\vec{V}\begin{vmatrix}2\\3\\1\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{AM}\wedge\vec{V}\begin{vmatrix} y-3z \\ 2z-x+1 \\ 3x-2y-3 \end{vmatrix}$$

$$d=\frac{\left|\vec{AM}\wedge\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|}\Rightarrow 15\sqrt{\frac{5}{14}}=$$

$$\frac{\sqrt{(y-3z)^2+(2z-x+1)^2+(3x-2y-3)^2}}{\sqrt{4+9+1}}$$

$$\Rightarrow (y-3z)^2+(2z-x+1)^2+$$

معادلهٔ رویهٔ استوانه‌ای دوّار $(3x-2y-3)^2=1125$

$$\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x+y-z+3=0 \\ (y-3z)^2+(2z-x+1)^2+(3x-2y-3)^2=1125 \end{cases} \Rightarrow z=5x+5\ ,\ y=3x+2$$

$$\Rightarrow (-12x+13)^2+(9x+11)^2+(-3x-7)^2=1125$$

$$\Rightarrow 234x^2+552x+339=1125\Rightarrow$$

$$234x^2+552x-786=0\Rightarrow 78x^2+184x-262=0$$

$$\Rightarrow x=1\ ,\ x=\frac{-262}{78}=\frac{-131}{39}$$

$$\Rightarrow M_1(x=1\ ,y=5\ ,z=10)$$

$$M_2(x=\frac{-131}{39}\ ,y=\frac{-105}{13}\ ,z=\frac{-460}{39})$$

نقاط M_1 و M_2 جواب مسأله‌اند. بنابراین دو نقطه روی خط D' وجود دارد که از خط D به فاصلهٔ $15\sqrt{\frac{5}{14}}$ است. باید توجه داشت که ممکن است مسأله یک جواب داشته باشد. و یا دارای جواب نباشد بنابرآن که معادلهٔ درجهٔ دوم به دست آمده برحسب x به ترتیب، ریشهٔ مضاعف داشته باشد و یا ریشه نداشته باشد.

تمرین

۱ ــ خط D و دو نقطهٔ A و B مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l و از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. در صورتی که:

الف) دو نقطهٔ A و B روی خط D باشند.

ب) نقطهٔ A روی خط D و نقطهٔ B خارج خط D باشد.

ج) دو نقطهٔ A و B روی خط D قرار نداشته باشند.

۲ ــ دو خط متوازی D و D' به فاصلهٔ h از یکدیگر مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از خط D به فاصلهٔ l و از خط D' به فاصلهٔ l' باشد. (بحث کنید).

۳ ــ خطوط متوازی D_1 و D_2 مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از دو خط D_1 و D_2 متساوی‌الفاصله، و از خط D_1 به فاصلهٔ معین l قرار داشته باشد.

۴ ــ دو خط متوازی D_1 و D_2 مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که به یک فاصله از این دو خط و به فاصلهٔ l_1 از خط D_1 و به فاصلهٔ l_2 از خط D_2 واقع باشد. (حالت $l_1=l_2$ را نیز بررسی کنید).

۵ ــ دو خط متقاطع D_1 و D_2 و خط D_3 غیر واقع در صفحهٔ آنها مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از دو خط D_1 و D_2 متساوی‌الفاصله و از خط D_3 به فاصلهٔ معلوم l باشد.

۶ ــ سه خط متوازی و متمایز D_1 و D_2 و D_3 مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از دو خط D_2 و D_3 به یک فاصله، و از خط D_1 به فاصلهٔ معلوم l قرار داشته باشد.

۷ ــ خط $D:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{-1}$ و دو نقطهٔ $A(1,+3,3)$ و $B(-2,-1,+4)$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که از خط D به فاصله $\sqrt{26}$ و از دو نقطهٔ A و B متساوی‌الفاصله باشد.

۸ ــ دو خط $D_1:\begin{cases} x+2y=1 \\ z-x=4 \end{cases}$ و $D_2:\begin{cases} x=t \\ y=3t-2 \\ z=2 \end{cases}$

خط $D_3:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{4}$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که از دو خط D_1 و D_2 متساوی

الفاصله و از خط D_3 به فاصله ثابت $2\sqrt{21}$ واقع باشد.

۹ ـ خطهای متوازی $D_1:\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ و $D_2:\begin{cases}x=+1\\y=-4\end{cases}$ و خط $D_3:\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از دو خط D_1 و D_2 متساوی‌الفاصله و از خط D_3 به فاصله ۴ واقع باشد.

۱۰ ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از خط $D:2x-1=y-3=3z-6$ به فاصله ۳، و از صفحهٔ $P:2x-y-2z=0$ به فاصله ۲ است.

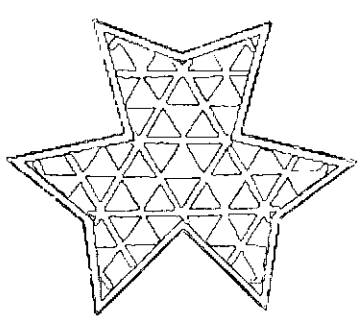
۱۱ـ صفحه $P:3x+4y-1=0$ وخط $D:\begin{cases}x+y=3\\z-y=4\end{cases}$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ P را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معین $2\sqrt{3}$ باشد.

۱۲ ـ اولاً ـ معادلهٔ خطی را بنویسید که از مرکز کرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$ می‌گذرد، با محور x ها زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$، با محور عرضها زاویهٔ $\text{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{4}$ می‌سازد و زاویه‌اش با محور z ها منفرجه است.

ثانیاً ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از سطح کرهٔ فوق را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ ۲ قرار دارد.

۱۳ ـ دو خط $D:\begin{cases}x=2a-1\\y=3-a\\z=a+2\end{cases}$ و $D':\begin{cases}x=2y-3\\z+x=2\end{cases}$ مفروضند مختصات نقاطی از خط D را بیابید که از خط D' به فاصلهٔ ۵ واقعند.

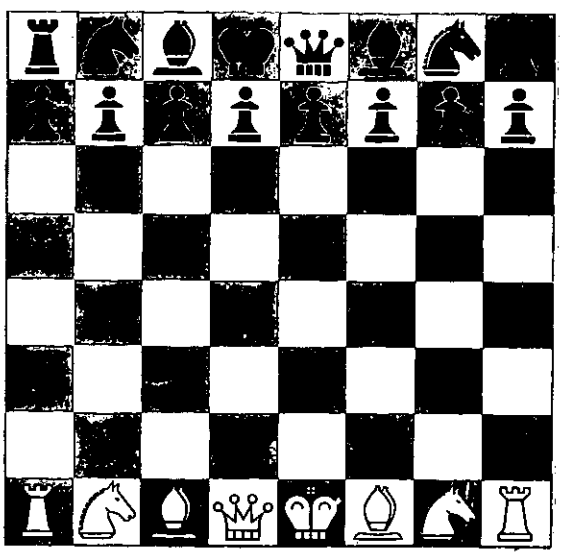
۱۴ ـ دو خط متقاطع $D:x=y=z-1$ و $D':\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z-2$ مفروض‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از این دو خط به فاصلهٔ معین ۲ واقع است.



تفریح اندیشه ۴

یک رخ شطرنج روی صفحه شطرنج که از ۶۴ خانه تشکیل شده است می‌خواهد از آخرین خانهٔ سمت چپ بالا، به اولین خانه سمت راست پایین بیاید. در خانه‌های عمودی، این مهره فقط می‌تواند از بالا به پایین، و در خانه‌های افقی، به راست یا چپ حرکت کند، اما نمی‌تواند از خانه‌ای که تازه گذشته، دوباره بگذرد.

چند راه ممکن برای حرکت رخ وجود دارد؟



جواب در صفحهٔ ۸۸