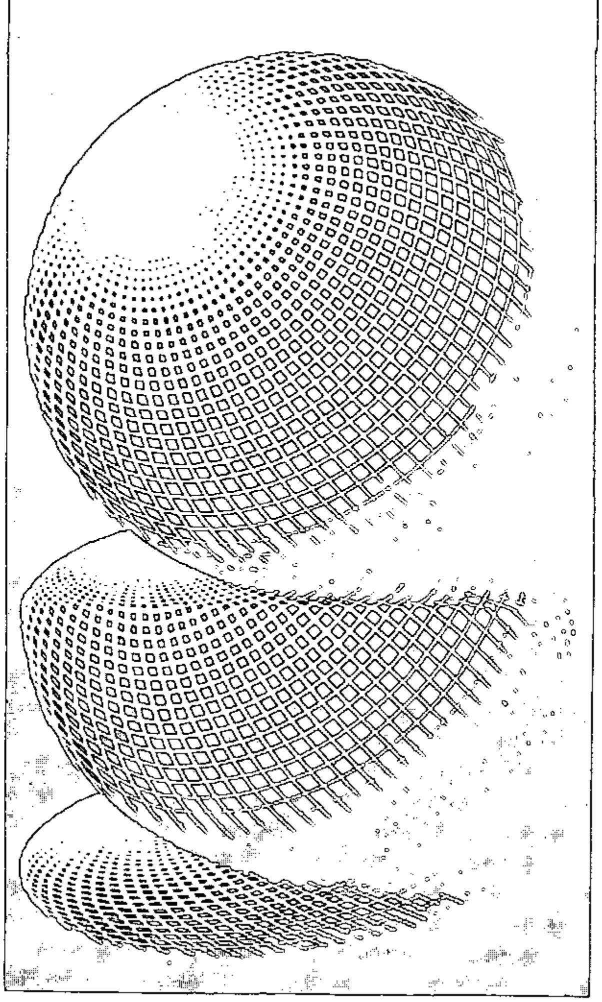


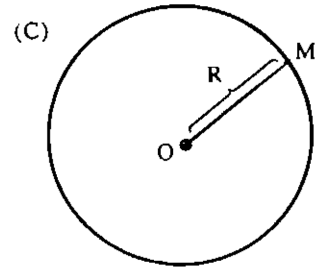
مکان هندسی

(قسمت هشتم)

(اوّل ، دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)

محمد هاشم رستمی

۱ـ دایره : مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابتی باشد، یک دایره است، که آن نقطهٔ ثابت مرکز، و آن مقدار ثابت، شعاع آن دایره می‌باشد. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R را به‌صورت $C(O,R)$ نمایش می‌دهند.

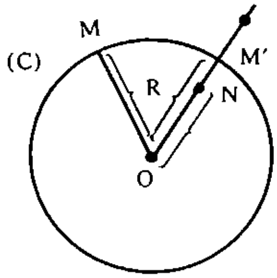


اثبات به روش هندسی: دایرهٔ $C(O,R)$ را درنظر می‌گیریم.

اولاً ــ هر نقطه‌ای مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، فاصله‌اش از مرکز دایره برابر R است، یعنی $OM = R$.

ثانیاً ــ هر نقطه مانند N از صفحه این دایره که فاصله‌اش تا مرکز دایره برابر R باشد، روی این دایره قرار دارد. زیرا اگر نقطه N روی این دایره نباشد، نیم‌خط ON دایره را در نقطهٔ M' قطع می‌کند. حال اگر نقطهٔ N روی پاره‌خط OM' باشد، $ON < OM' = R$ است، که این خلاف فرض است. و درصورتی که نقطهٔ N خارج پاره‌خط OM' واقع باشد، $ON > OM' = R$ است که این نیز خلاف فرض است. بنابراین نقطهٔ N که به فاصلهٔ R از مرکز دایره قرار دارد بر نقطهٔ M' منطبق و لذا روی دایره است. پس :

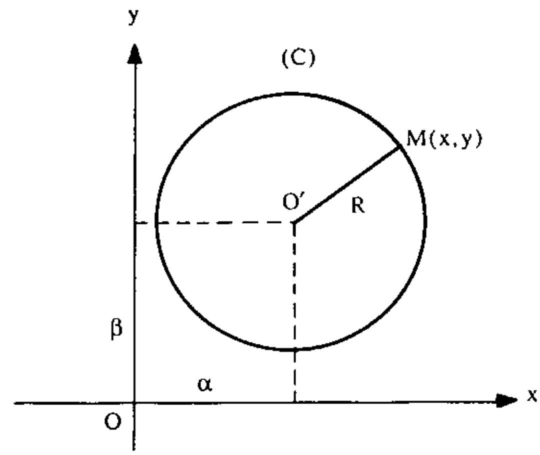
دایره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که فاصله‌اش از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه مقدار ثابتی است.



اثبات به روش تحلیلی: دایرهٔ (C) به مرکز $O'(\alpha,\beta)$ و به شعاع R را در دستگاه مختصات xoy درنظر می‌گیریم. اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه از این دایره باشد، داریم :

$$O'M = R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = R \Rightarrow$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2} \qquad (۱)$$



رابطهٔ (۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ و شعاعش برابر R است. به عکس، هر نقطه مانند $M(x,y)$ که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، فاصله‌اش از نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ برابر R می‌باشد. یعنی روی دایرهٔ $C(O',R)$ قرار دارد.

بنابراین :

مکان هندسی نقطه‌ای از دستگاه مختصات xoy که فاصله‌اش از نقطه ثابت $O'(\alpha,\beta)$ واقع در این صفحه مقدار ثابت R باشد، دایره‌ای به معادلهٔ زیر است :

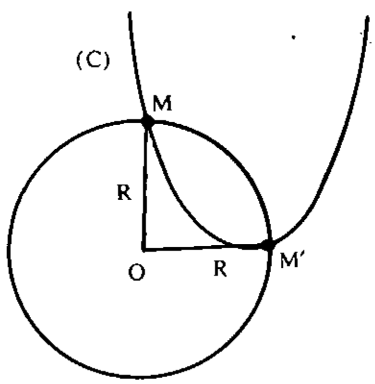
$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2}$$

نکته ۱ : اگر مرکز دایرهٔ به شعاع R بر مبدأ مختصات منطبق باشد، معادلهٔ دایره به‌صورت $x^2+y^2=R^2$ خواهد بود.

نکته ۲ : معادلهٔ (۱) را به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ نیز می‌توان نمایش داد که در این‌صورت مرکز دایره، نقطهٔ $O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ و شعاع دایره $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ ، و شرط حقیقی بودن دایره $a^2+b^2-4c \geq 0$ است.

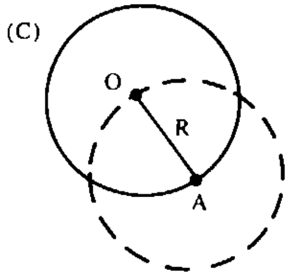
مثال ۱ــ نقطهٔ O و منحنی (C) در یک صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای روی منحنی (C) تعیین کنید که از نقطه O به فاصلهٔ معلوم R باشد.

حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ معین R باشد، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R است. این دایره را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقاط تقاطع این دایره با منحنی (C) جواب مسأله‌اند و به تعداد نقاط برخورد آن دو، مسأله دارای جواب است.



مثال ۲ــ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را تعیین کنید که از نقطهٔ ثابت A واقع در یک صفحه می‌گذرند.

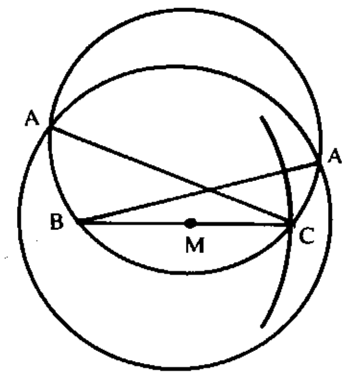
حل ــ اگر دایرهٔ $C(O,R)$ یکی از دایره‌هایی باشد که از نقطهٔ ثابت A می‌گذرند، $AO=R$ است بنابراین مکان هندسی نقطهٔ O دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R می‌باشد.



مثال ۳ــ مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های، R شعاع دایرهٔ محیطی، $BC=a$ ضلع مثلث و $AM=m_a$ میانهٔ وارد بر ضلع a رسم کنید.

حل ــ دایرهٔ محیطی مثلث، یعنی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R را رسم می‌کنیم. به مرکز نقطهٔ B واقع بر این دایره و به شعاع $BC=a$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ C قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم. آنگاه وسط

پاره‌خط BC را مشخص کرده M می‌نامیم. به مرکز M و به شعاع $MA = m_a$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. اگر این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث را در دو نقطه A و A′ قطع کند از A و A′ به B و C وصل می‌کنیم. دو مثلث متساوی ABC و A′BC جواب مسأله‌اند. مسأله در صورتی جواب دارد که دایرهٔ به مرکز B و به شعاع a و سپس دایرهٔ به مرکز M و به شعاع m_a دایرهٔ محیطی مثلث ABC را قطع کنند و یا با آن مماس باشند.



مثال ۴ــ نقطهٔ $O'(۰,۱)$ و خط $D: ۲x - y + ۲ = ۰$ مفروضند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که از نقطهٔ O′ به فاصله ۳ باشد.

حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از نقطهٔ O′ به فاصلهٔ ۳ است دایره‌ای به مرکز O′ و به شعاع ۳ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ این دایره را نوشته، نقطهٔ برخورد آن با خط D را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$O'(۰,۱)\ ,\ R = ۳\ ,\ (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow$$
$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = ۹$$
$$\Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۹ \qquad \text{معادلهٔ دایره}$$

$$\begin{cases} x^۲ + (y-۱)^۲ = ۹ \\ \qquad \Rightarrow x^۲ + (۲x + ۳ - ۱)^۲ = ۹ \Rightarrow ۵x^۲ + ۸x - ۵ = ۰ \\ ۲x - y + ۳ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{-۴ \pm \sqrt{۴۱}}{۵} \Rightarrow y = \frac{۷ \pm ۲\sqrt{۴۱}}{۵} \Rightarrow$$

$$M_۱\left(\frac{-۴+\sqrt{۴۱}}{۵}, \frac{۷+۲\sqrt{۴۱}}{۵}\right)$$

$$M_۲\left(\frac{-۴-\sqrt{۴۱}}{۵}, \frac{۷-۲\sqrt{۴۱}}{۵}\right)$$

مثال ۵ــ نقطهٔ $O'(۲,-۳)$ مرکز دایره‌ای است که از خط $D: ۳x - ۴y + ۲ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.

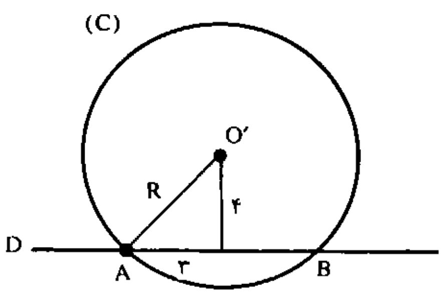
حل ــ اگر دایرهٔ $C(O',R)$ جواب مسأله و AB وتری باشد که این دایره از خط D جدا می‌کند، درصورتی که عمود O′H را بر خط D فرود آوریم در مثلث O′AH داریم:

$$O'A = R\ ,\ O'H = d = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۶ + ۱۲ + ۲|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = ۴$$

$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$R = O'A = \sqrt{O'H^۲ + AH^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$$
$$\Rightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$$

معادلهٔ دایره



مثال ۶ــ دو نقطهٔ $A(۰,۳)$ و $B(۴,۰)$ مفروضند. نقطه‌ای تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳ باشد.

حل ــ نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ $C_۱(A,۲)$ و $C_۲(B,۳)$ جواب مسأله است.

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow C_۱: x^۲ + (y-۳)^۲ = ۴,$$
$$C_۲: (x-۴)^۲ + y^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ + (y-۳)^۲ = ۴ \\ \qquad \Rightarrow C_۲ - C_۱ = ۰ \Rightarrow ۸x - ۶y - ۲ = ۰ \\ (x-۴)^۲ + y^۲ = ۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴x - ۳y - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + \left(\frac{۴x-۱}{۳} - ۳\right)^۲ = ۴ \Rightarrow$$

$$25x^2-80x+64=0$$
$$\Rightarrow x'=x''=\frac{8}{5}\Rightarrow y=\frac{9}{5}\ \Rightarrow M\left(\frac{8}{5},\frac{9}{5}\right)$$

مسأله تنها یک جواب دارد زیرا دو دایره بر هم مماسند.

مثال ۷ـ معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را درصورتی که $A(3,0)$ و $B(0,1)$ و $C(-1,0)$ باشد، به‌دست آورید.

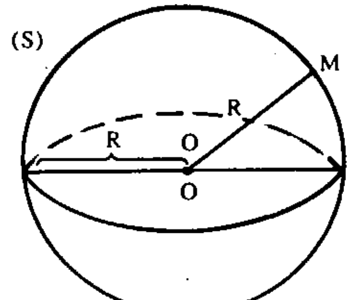
حل ـ معادلهٔ دایره را به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ درنظر می‌گیریم. مختصات این نقطه‌ها در معادلهٔ دایره باید صدق کند پس داریم:

$$A(3,0)\Rightarrow x^2+y^2+ax+by+c=0\Rightarrow 3a+c+9=0 \quad (1)$$
$$B(0,1)\Rightarrow b^2+c+1=0 \quad (2)$$
$$C(-1,0)\Rightarrow -a+c+1=0 \quad (3)$$

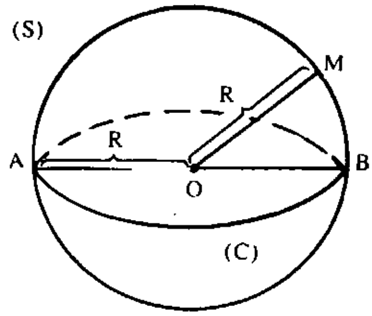
$$\begin{cases}3a+c+9=0\\ b+c+1=0\\ -a+c+1=0\end{cases}\Rightarrow\ a=-2\ ,\ b=2\ ,\ c=-3$$

معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر $\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-2x+2y-3=0}$

۲ـ کره SPHERE : مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ ثابتی به فاصلهٔ ثابتی باشد، کره‌ای است که آن نقطهٔ ثابت مرکز و آن مقدار ثابت شعاع آن کره است. کرهٔ به مرکز O و به شعاع R را به‌صورت $S(O,R)$ نمایش می‌دهند. هر کره با معلوم بودن مرکز و شعاع آن مشخص است.

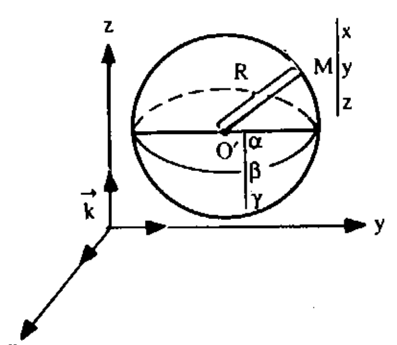


اثبات به روش هندسی ـ دایرهٔ $C(O,R)$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که این دایره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R واقع است. قطر دلخواه AB از این دایره را رسم می‌کنیم. از دوران این دایره حول قطر AB کرهٔ $S(O,R)$ بوجود می‌آید. بدیهی است که هر نقطه واقع بر این کره از نقطهٔ O به فاصلهٔ R است و هر نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ O به فاصلهٔ R واقع باشد روی این کره قرار دارد (زیرا هر نقطه‌ای از این کره روی یکی از دایره‌های به مرکز O و به شعاع R واقع است). پس: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R باشد، کره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.



اثبات به روش تحلیلی ـ در دستگاه مختصات xoy نقطهٔ ثابت $O'(\alpha,\beta,\gamma)$ را درنظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی فوق باشد، یعنی نقطه‌ای باشد که از نقطهٔ O' به فاصلهٔ R باشد، در این صورت داریم:

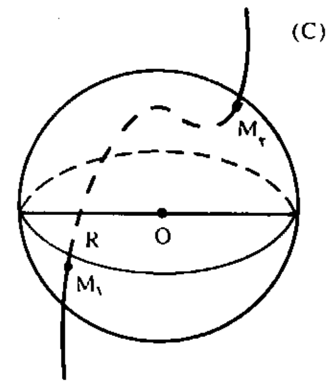


$$O'M=R=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}\quad\Rightarrow$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \qquad (1)$$

به عکس، هر نقطه‌ای از فضا که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، از نقطهٔ ثابت $O'(\alpha,\beta,\gamma)$ به فاصلهٔ ثابت R واقع است. بنابراین رابطهٔ (۱) معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که از نقطهٔ ثابت O' به فاصلهٔ ثابت R قرار دارد، یعنی معادلهٔ کره‌ای به مرکز O' و به شعاع R است.

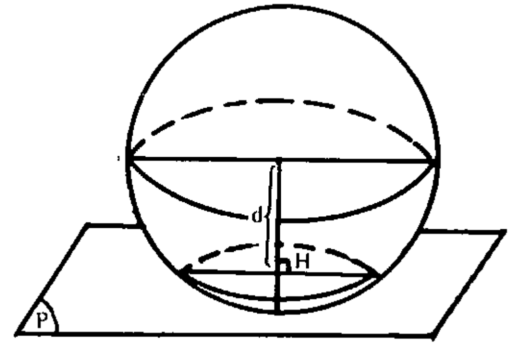
به‌طوری که دیده می‌شود معادلهٔ کره، معادله‌ای درجه دوم است. بنابراین کره سطحی درجه دوم می‌باشد.

مثال ۱ــ نقطه O و منحنی (C) غیرواقع در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی منحنی (C) تعیین کنید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ معلوم R باشد.



حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ R باشد کره‌ای به مرکز O و به شعاع R است. این کره را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این کره با منحنی (C) جواب مسأله است، و به تعداد نقاط برخورد، مسأله دارای جواب است.

مثال ۲ــ صفحهٔ P و نقطهٔ O غیرواقع بر آن مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ معلوم R باشد (بحث کنید).



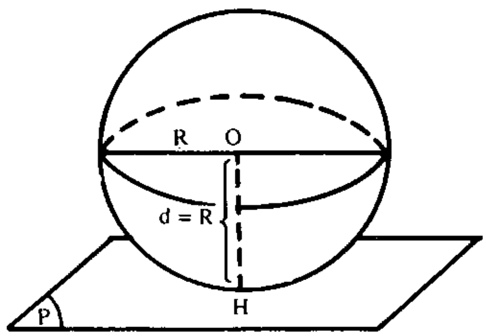
حل ــ کرهٔ به مرکز O و به شعاع R یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R واقع است، رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ P جواب مسأله است.

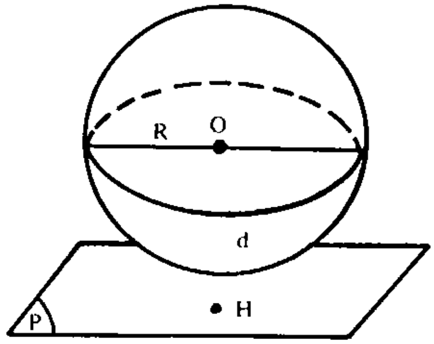
بحث ــ اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحهٔ P را d بنامیم، یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید.

۱) اگر $d < R$ باشد، مکان هندسی جواب مسأله، یک دایره است.

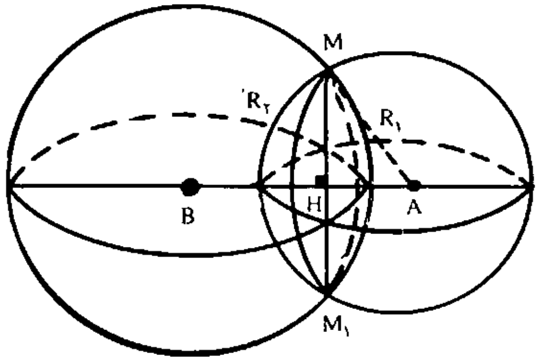
۲) اگر $d = R$ باشد، جواب مسأله یک نقطه است.

۳) اگر $d > R$ باشد، مسأله جواب ندارد.





مثال ۳ــ دو نقطهٔ A و B و دو عدد مثبت R_1 و R_2 به قسمی مفروضند که $AB < R_1 + R_2$ است. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ R_1، و از نقطهٔ B به فاصلهٔ R_2 واقع است.



حل ــ فصل مشترک کرهٔ به مرکز A و به شعاع R_1، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ A به فاصلهٔ R_1 واقع است، با کرهٔ به مرکز B و به شعاع R_2، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ B به فاصلهٔ R_2 قرار دارد، جواب مسأله است که چون $d = AB < R_1 + R_2$ است، این دو کره متقاطع‌اند و فصل مشترک آنها که یک دایره است جواب مسأله است.

مثال ۴ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از نقطهٔ $O'(1,-2,3)$ به فاصلهٔ ۵ واقع است.

حل ــ مکان هندسی خواسته شده کره‌ای به مرکز O' و به شعاع $R=5$ است، پس داریم:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(y-\gamma)^2=R^2$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(y-3)^2=25$$

مثال ۵ ــ نقطه‌ای روی خط $D: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ تعیین کنید که از نقطهٔ $A(1,-1,0)$ به فاصلهٔ $\sqrt{3}$ واقع است.

حل ــ نقطهٔ تقاطع کرهٔ به مرکز A و به شعاع $\sqrt{3}$ با خط D جواب مسأله است. بنابراین داریم:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=(\sqrt{3})^2 \Rightarrow$$

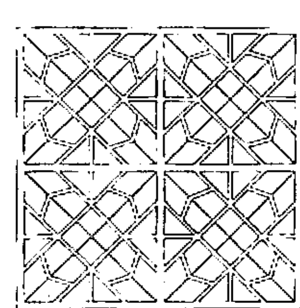
$$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3 \qquad \text{معادلهٔ کره}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}=t \Rightarrow x=2t\ ,\ y=-t+1\ ,\ z=3t-2\\(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow (2t-1)^2(-t+2)^2+(3t-2)^2=3 \Rightarrow 14t^2-20t+6=0$$

$$\Rightarrow t=1\ ,\ t=\frac{3}{7} \Rightarrow M_1(2,0,1)\ ,\ M_2(\frac{6}{7},\frac{4}{7},\frac{-5}{7})$$

نقاط جواب مسأله



تفریح اندیشهٔ ۳

تکه‌های هشت

کاپیتان یک کشتی تصمیم گرفت به سه افسر و هفت سرباز برای کارهای برجسته‌شان جایزه بدهد. کیسه‌ای حاوی ۱۴۰ سکهٔ طلا تهیه و آنها را به دو کیسهٔ نامساوی تقسیم کرد و کیسهٔ بزرگتر را به سربازها و کیسهٔ کوچکتر را به افسرها داد.

افسرها سکه‌های خود را شمردند و دریافتند که تعداد آنها ۲ سکه بیشتر از آن است که بتواند بین آنها به تساوی تقسیم شود. و زمانی که سربازها سعی در تقسیم سهم خود به هفت قسمت مساوی کردند یک سکه برایشان باقی ماند و بزودی بر سر آن به نزاع پرداختند. دعوا به حدی بالا گرفت که خود کاپیتان به میانجیگری پرداخت و دستور داد سکهٔ باقیمانده به افسرها داده شود.

اکنون، در صورتی که سهمیهٔ هر افسر از هر سرباز بیشتر باشد، در هر کیسه چند سکه بوده است؟

جواب در صفحه ۸۷