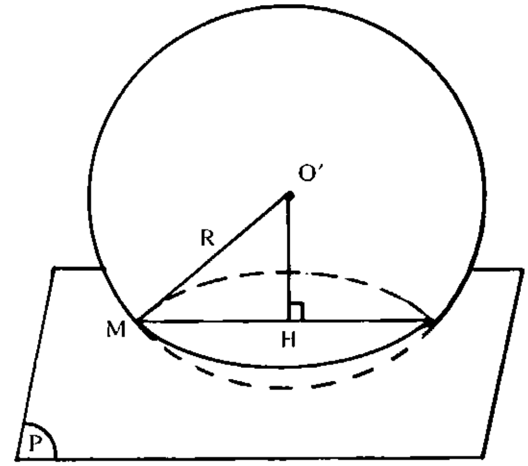
مکان هندسی

(قسمت نهم)

(اوّل ، دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)

محمد هاشم رستمی

مثال ۶ــ معادلهٔ کره‌ای را بنویسیدکه مرکزش نقطهٔ $O'(-۲,۱,۳)$ وفصل مشترکش با صفحهٔ P به معادلهٔ $x-۲y+۲z+۳=۰$ دایره‌ای به شعاع ۴ است.



حل ــ از نقطهٔ O' عمود $O'H$ را برصفحهٔ P فرود می‌آوریم اگر HM یک شعاع ازدایرهٔ فصل مشترک صفحهٔ P و کرهٔ به مرکز O' باشد، $O'M$ برابر شعاع کره است. بنابراین داریم:

$$O'(-۲,۱,۳), P: x-۲y+۲z+۳=۰ \Rightarrow$$

$$O'H=d=\frac{|-۲-۲+۶+۳|}{\sqrt{۱+۴+۴}}=\frac{۹}{۳}=۳$$

$$HM=r=۴ \Rightarrow R=O'M=\sqrt{r^۲+d^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

شعاع کره

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲+(z-\gamma)^۲=R^۲ \Rightarrow$$

معادلهٔ کرهٔ جواب مسأله. $(x+۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۳)^۲=۲۵$

مثال ۷ــ نقطهٔ $O'(-۱,۳,۰)$ مرکز کره‌ای است که برصفحهٔ $P: x-۲y-۲z+۱=۰$ مماس است. معادلهٔ این کره را بنویسید.

حل ــ فاصلهٔ نقطهٔ O' از صفحهٔ P برابرشعاع کره است. پس داریم:

$$R=O'H=\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=$$

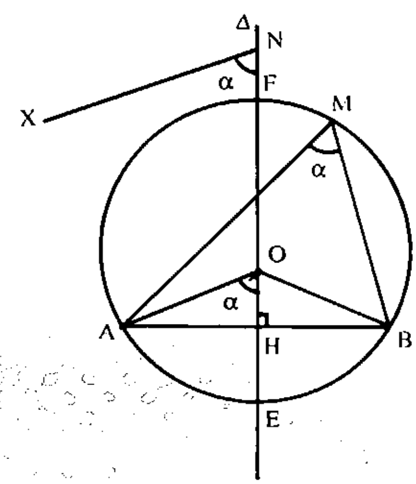
$$\frac{|-1-6-0+1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow R = 2$$

و از آنجا معادلهٔ کره به صورت زیر است :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2 \Rightarrow$$

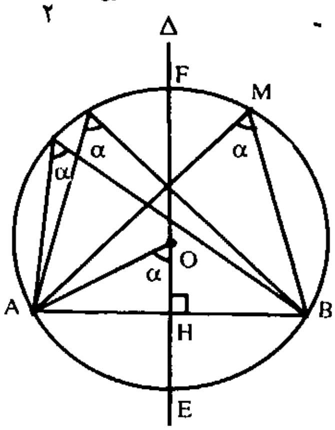
معادله کره $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2 = 4$

۳ ــ کمان درخور یا کمان حاوی یک زاویه ــ مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل کردن آن نقطه به دونقطه ثابت A و B ازآن صفحه زاویهٔ $A\hat{M}B = \alpha$ پدید می‌آید، کمانهایی از دو دایرهٔ متساوی است که بردونقطهٔ A و B می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر مشترکشان برابر 2α است، که این کمانها را کمان درخور یا کمان حاوی زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB می‌نامند.



اثبات به روش هندسی ــ دونقطهٔ ثابت A و B را دریک صفحه در نظر می‌گیریم. وسط پاره خط AB را نقطهٔ H می‌نامیم و خط Δ عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه N واقع بر Δ نیم خط Nx را چنان رسم می‌کنیم که $H\hat{N}X = \alpha$ باشد. از یکی ازدونقطهٔ A و B مثلاً از نقطهٔ A خطی به موازات Nx رسم می‌کنیم تا خط Δ عمودمنصف پاره خط AB را درنقطهٔ O قطع کند. از O به نقاط A و B وصل کرده به مرکز O و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره از نقطهٔ B نیز می‌گذرد و اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AEB}$ برابر 2α است. زیرا، $A\hat{O}H = \alpha$ است پس زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = 2\alpha$ است. کمان $\overset{\frown}{AFB}$ مکان هندسی نقطهٔ مورد نظر یعنی مکان هندسی نقطه‌ای مانند M است که از وصل کردن آن به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ $A\hat{M}B = \alpha$ پدید می‌آید، زیرا :

اولاً ــ هر نقطه مانند M که روی این کمان قرارداشته باشد و ازاین نقطه به دونقطهٔ A و B وصل کنیم، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{M}B$ برابر α است. زیرا : $A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AEB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

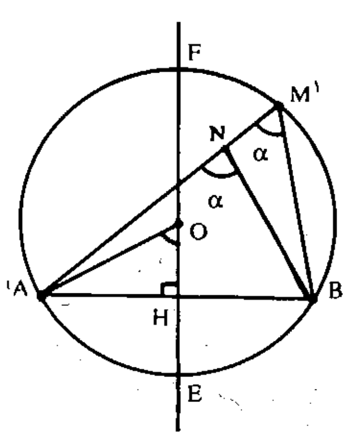


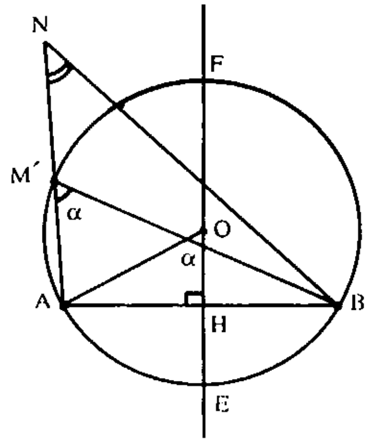
ثانیاً ــ نقطهٔ N رأس هر زاویه مانند $A\hat{N}B = \alpha$ که اضلاعش از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد ودرطرف کمان $\overset{\frown}{AFB}$ واقع است، روی کمان $\overset{\frown}{AFB}$ قرار دارد. زیرا اگر نقطهٔN روی کمان $\overset{\frown}{AFB}$ نباشد، یاداخل دایرهٔ (O,OA) واقع است که دراین صورت $A\hat{N}B > \alpha$ خواهد بود و یا نقطهٔ N خارج دایره فوق قراردارد که در این صورت $A\hat{N}B < \alpha$ است، زیرا در حالت نخست، اگر نقطهٔ برخورد امتداد AN با دایره را M' بنامیم و از M' به نقطهٔ B وصل کنیم داریم :

$$A\hat{N}B = A\hat{M'}B + M'\hat{B}N = \alpha + M'\hat{B}N \Rightarrow A\hat{N}B > \alpha$$

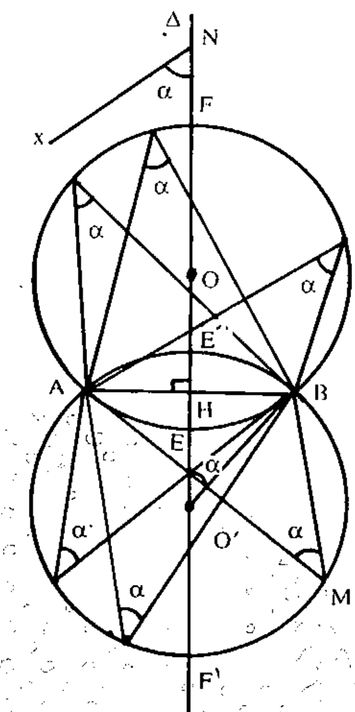
و درحالت دوم، اگر نقطهٔ برخورد AN با دایره را M' بنامیم داریم :

$$A\hat{N}B = A\hat{M'}B - M'\hat{B}N = \alpha - M'\hat{B}N \Rightarrow A\hat{N}B < \alpha$$





کمان $\widehat{AFB}$ را کمان حاوی یا کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB یا مقابل به پاره خط AB می‌نامند.



درصورتی که از نقطهٔ B خطی موازی Nx رسم کنیم تا عمود منصف پارهٔ خط AB را در نقطهٔ O' قطع کند ودایرهٔ به مرکز O' و به شعاع $O'B = O'A$ را رسم کنیم تا عمود منصف پاره خط AB رادر نقاط E' و F' قطع کند، کمان $\widehat{AF'B}$ نیز کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB است. بنابراین می‌توان گفت:

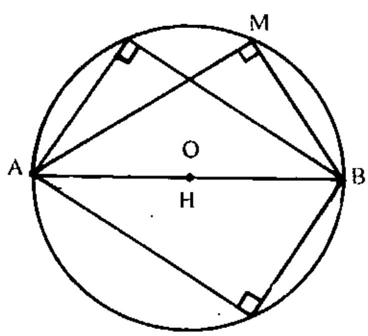
مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل کردن آن نقطه به دونقطهٔ ثابت A و B از آن صفحه زاویهٔ $A\hat{M}B = \alpha$ پدیدمی‌آید. کمانهایی از دودایرهٔ متساوی درآن صفحه است که بر دونقطهٔ مزبور می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر مشترکشان برابر 2α است.

تبصره ۱ــ کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB رامکان هندسی نقطه‌ای کـه از آن نقطه پاره خط AB به زاویهٔ α رؤیت می‌شود نیز می‌نامند.

تبصره ۲ــ کمانهای $\widehat{AEB}$ و $\widehat{AE'B}$ از دودایره، کمان در خور زاویهٔ $180 - \alpha$ وابسته به پاره خط AB است، زیرا:

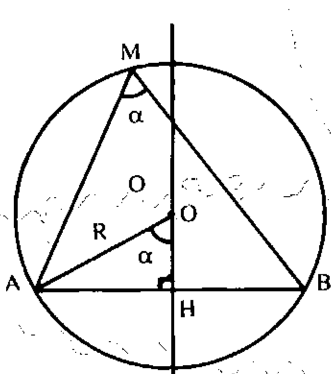
$$\widehat{AEB} = \widehat{AE'B} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AF'B} = 360 - 2\alpha \Rightarrow A\hat{M}_1B = 180 - \alpha$$

تبصره ۳ــ کمان در خور زاویهٔ $90°$ وابسته به پاره خط AB دایرهٔ به قطر AB است. زیرا در این حـــالت دودایرهٔ (O,OA) و $(O',O'A)$ بر هم منطبق شده، مرکز مشترکشان نقطهٔ H وسط پاره خط AB است.



تبصره ۴ــ شعاع دایره‌ای که کمان درخور زاویهٔ α وابســته به پاره خط AB به طول a بخشی از آن است، برابراست با: $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ و فاصلهٔ مرکز این دایره از وتر AB برابر است با:

$$OH = |R\cos\alpha| = \frac{a}{2|tg\alpha|}$$



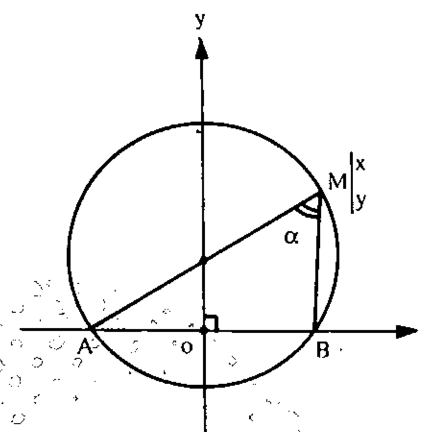
به عنوان مثال اگر طول پاره خط AB برابر ۴ سانتی‌متر باشد و کمان در خور زاویهٔ ۳۰° وابسته به این پاره خط را رسم کنیم، شعاع دایرهٔ مربوط به این کمان درخور برابر است با :

$$R=\frac{۴}{۲\sin ۳۰}=\frac{۴}{۲\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۴}{۱}=۴cm$$

و فاصلهٔ مرکزدایره از پاره خط AB برابراست با :

$$OH=|R\cos\alpha|=|۴\cos ۳۰|=۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$$

اثبات به روش تحلیلی ــ پاره خط AB به طول a را در نظر می‌گیریم. محور x ها را روی خط AB ومحور y ها را عمود منصف پاره خط AB اختیار می‌کنیم.



در این صورت $A(\frac{-a}{۲},۰)$ و $B(\frac{a}{۲},۰)$ است. اگر $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از وصل کردن آن به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ گردد، داریم :

$$M\Big|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\ ,\ A\Big|\begin{matrix}-\frac{a}{۲}\\۰\end{matrix}\ ,\ B\Big|\begin{matrix}\frac{a}{۲}\\۰\end{matrix}\ ,\ A\hat{M}B=\alpha\Rightarrow$$

$$m_{MA}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{y-۰}{x+\frac{a}{۲}}=\frac{y}{x+\frac{a}{۲}}$$

$$m_{MB}=\frac{y-۰}{x-\frac{a}{۲}}=\frac{y}{x+\frac{a}{۲}}$$

$$tg\alpha=\pm\frac{m-m'}{۱+mm'}\Rightarrow tg\alpha=\pm\frac{\frac{y}{x+\frac{a}{۲}}-\frac{y}{x-\frac{a}{۲}}}{۱+\frac{y}{x-\frac{a}{۲}}\times\frac{y}{x+\frac{a}{۲}}}$$

$$\Rightarrow tg\alpha=\pm\frac{-ay}{x^۲+y^۲-\frac{a^۲}{۴}}\Rightarrow$$

$$x^۲+y^۲-\frac{a^۲}{۴}=\pm\frac{a}{tg\alpha}y\Rightarrow$$

$$C_۱:x^۲+y^۲-\frac{a}{tg\alpha}y-\frac{a^۲}{۴}=۰ \qquad (۱)$$

$$C_۲:x^۲+y^۲+\frac{a}{tg\alpha}y-\frac{a^۲}{۴}=۰ \qquad (۲)$$

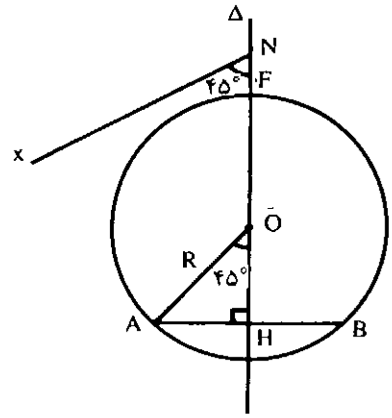
(۱) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O_۱(۰,\frac{a}{۲tg\alpha})$ و به شعاع $R_۱=\frac{a}{۲\sin\alpha}$ و (۲) معادله دایره‌ای به مرکز $O_۲(۰,-\frac{a}{۲tg\alpha})$ و به شعاع $R_۲=\frac{a}{۲\sin\alpha}$ است. که بخشی از این دو دایرهٔ متساوی مکان هندسی موردنظر است.

واضح است هر نقطه مانند M که مختصاتش در یکی از معادله های (۱) یا (۲) صدق کند و متعلق به بخش کمان در خور زاویهٔ α باشد، از وصل کردن آن به نقاط A و B زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ پدید می‌آید. بنابراین :

مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل کردن آن به دو نقطهٔ ثابت A و B از آن صفحه، زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ پدید می‌آید، کمانهایی از دو دایره متساوی از آن صفحه است که بر دونقطهٔ A و B می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وترمشترکشان برابر ۲α است.

مثال ۱ــ پاره خط AB به طول ۴ سانتی‌متر مفروض است. کمان در خور زاویهٔ ۴۵° وابسته به این پاره خط را رسم کنید. شعاع دایره‌ای که کمان درخور بخشی از آن است و فاصلهٔ مرکز این دایره از پاره خط AB را محاسبه کنید.

حل ــ پاره خط AB را به طول ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. سپس خط Δ عمود منصف این پاره خط را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ دلخواه N واقع بر Δ نیم خط N_X را چنان رسم می‌کنیم که با Δ زاویهٔ ۴۵° تشکیل دهد. ازنقطهٔ A خطی موازی N_X رسم می‌کنیم تا Δ را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم کمان $\overset{\frown}{AFB}$



از این دایره مکان هندسی مورد نظر یعنی کمان درخور زاویهٔ ۴۵° وابسته به پاره خط AB است. اگر H وسط پاره خط AB و R شعاع دایره باشد داریم:

$$R=\frac{a}{۲\sin\alpha}=\frac{۴}{۲\sin ۴۵^\circ}=\frac{۴}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

$$OH=|R\cos\alpha|=۲\sqrt{۲}.\cos ۴۵^\circ=۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲$$

مثال ۲ـ پاره خط AB به طول $۱۲\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مفروض است. در صورتی که شعاع دایرهٔ کمان درخور زاویهٔ حادهٔ α وابسته به پاره خط AB برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، اندازهٔ زاویهٔ α را تعیین کنید.

حل ـ داریم:

$$R=\frac{a}{۲\sin\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{a}{۲R}=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{۲۴}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۳}$$

نکته: در صورتی که زاویهٔ α منفرجه باشد، $\alpha=\frac{۲\pi}{۳}$ جواب است.

مثال ۳ـ کمان درخور زاویهٔ ۶۰° وابسته به پاره خط AB را رسم کرده‌ایم. در صورتی که فاصلهٔ مرکز دایرهٔ شامل کمان در خور، از پاره خط AB برابر $۲\sqrt{۳}$ باشد. اندازهٔ پاره خط AB را تعیین کنید.

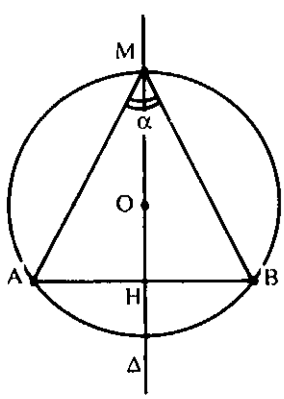
حل: با توجه به داده‌های مسأله داریم:

$$OH=\frac{a}{۲|tg\alpha|}\Rightarrow a=۲OH.|tg\alpha|=۲\times۲\sqrt{۳}$$

$$\times tg\frac{\pi}{۳}=۴\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}=۱۲\Rightarrow a=۱۲.$$ طول پاره خط AB

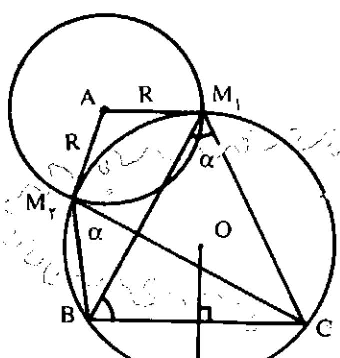
مثال ۴ـ پاره خط AB در یک صفحه مفروض است. نقطه‌ای مانند M از این صفحه را بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از وصل کردن این نقطه به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ $A\hat{M}B$ برابر α پدید آید.

حل ـ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ ثابت A و B به یک فاصله است عمود منصف پاره خط AB است. پس خط Δ عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه پاره خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود، کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB است. بنابراین دومکان هندسی را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع آنها، نقطهٔ M جواب مسأله است و به تعداد نقاط تلاقی، مساله دارای جواب است.



مثال ۵ـ سه نقطهٔ A و B و C دریک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم R باشد و از این نقطه پاره خط BC به زاویهٔ α رؤیت شود.

حل ـ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از نقطهٔ A به



فاصلهٔ R باشد، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. این دایره را رسم می کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه پاره خط BC به زاویهٔ α دیده می‌شود، کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره خط BC است که این کمان در خور را نیز رسم می‌نماییم. نقطهٔ تقاطع این دو، جواب مسأله است.

مثال ۶ـ دو نقطهٔ $A(3,-2)$ و $B(1,0)$ مفروضند. معادلهٔ کمان حاوی زاویهٔ ۹۰° وابسته به پاره خط AB را به دست آورید.

حل ـ می‌دانیم که کمان درخور زاویهٔ ۹۰° مقابل به هر پاره خط دایره‌ای به قطر آن پاره خط است، بنابراین معادلهٔ دایرهٔ به قطر پاره خط AB را باید به دست‌آوریم. داریم:

$$O'\left|\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ \beta = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-2+0}{2} = -1\end{array}\right. \Rightarrow O'(2,-1)$$

O' مرکز دایره،وسط پاره‌خط AB است.

$$R = O'A = \sqrt{(3-2)^2 + (-2+1)^2}$$
$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{2}$$
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$$

معادلهٔ مورد نظر

مثال ۷ ـ دو نقطهٔ $A(-1,2)$ و $B(3,0)$ در دستگاه مختصات xoy مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را تعیین کنید که از وصل کردن به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ ۴۵° پدید آید.

(پاره خط AB از آن نقطه به زاویهٔ ۴۵° رؤیت شود.)

حل ـ فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد، در این صورت داریم:

$$M\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right., A\left|\begin{array}{l}-1\\2\end{array}\right., B\left|\begin{array}{l}3\\0\end{array}\right. \Rightarrow m_{MA} = \frac{y-2}{x+1}, m_{MB} = \frac{y}{x-3}$$

$$\alpha = 45^\circ, \ tg\alpha = \pm\frac{m-m'}{1+mm'} \Rightarrow$$

$$tg45^\circ = \pm\frac{\dfrac{y-2}{x+1} - \dfrac{y}{x-3}}{1 + \dfrac{(y-2)y}{(x+1)(x+3)}} \Rightarrow$$

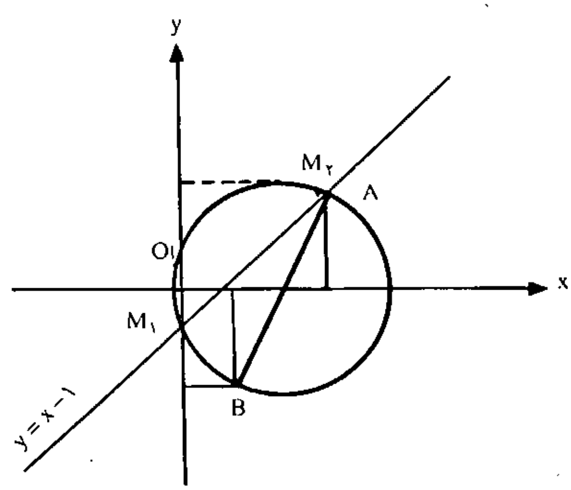
$$1 = \pm\frac{-4y-2x+6}{x^2+y^2-2x-2y-3} \Rightarrow C_1: x^2+y^2+2y-9=0$$

$$C_2: x^2+y^2-4x-6y+3=0$$

معادله دایره هایی که بخشی از آنها کمان در خور زاویهٔ ۴۵° وابسته به پاره خط AB است.

مثال ۸ـ خط D به معادلهٔ $y=x-1$ و دو نقطهٔ $A(3,2)$ و $B(1,-2)$ مفروضند. روی منحنی (C) نقطه‌ای تعیین کنیدکه از آن نقطه پاره خط AB به زاویهٔ ۹۰° دیده شود.

حل ـ نقطهٔ تقاطع کمان درخور زاویهٔ ۹۰° وابسته به پاره خط AB با منحنی (C) جواب مسأله است. اما می‌دانیم که این کمان درخور دایره‌ای به قطر پاره خط AB است.



بنابراین معادله دایرهٔ به قطر AB را نوشته با معادلهٔ منحنی (C) قطع می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$A(3,2), B(1,-2) \Rightarrow$$

$O'(2,0)$ وسط AB، $R = O'A = \sqrt{5}$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 5$$

معادلهٔ دایرهٔ به قطر AB

$$\begin{cases} y = x-1 \\ (x-2)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + (x-1)^2 = 5 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 3 \Rightarrow$$

$$M_1(0,-1), \ M_2(3,2)$$

نقطهٔ M_2 بر نقطهٔ A منطبق است و جواب مسأله نیست. پس تنها نقطهٔ جواب مسأله نقطهٔ M_1 است.