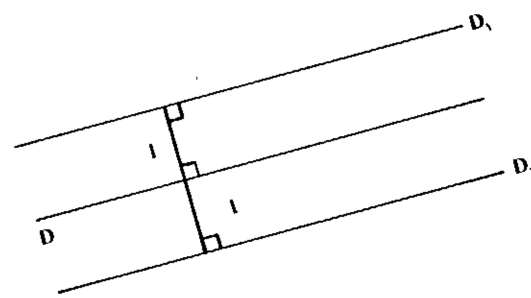
مکان هندسی (قسمت ششم)

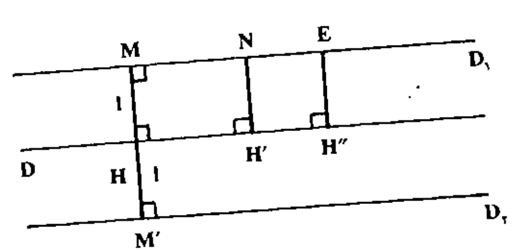
(اوّل، دوم، سوم، چهارم دبیرستان)

محمدهاشم رستمی

۷ ــ مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از خط D واقع در آن صفحه به فاصلهٔ معین l باشد، دو خط راست D_1 و D_2 موازی خط D است، که در طرفین این خط واقعند.



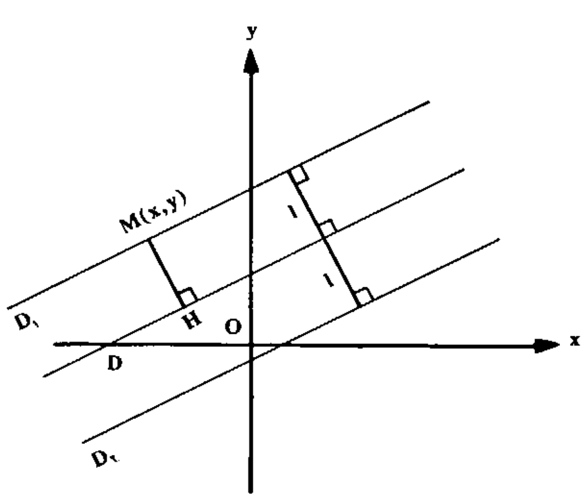
اثبات به روش هندسی ــ خط D را در صفحهٔ P درنظر می‌گیریم و دو خط D_1 و D_2 را به فاصلهٔ l از آن رسم می‌کنیم. برای این کار از نقطهٔ H واقع بر خط D، خط راستی عمود بر این خط رسم کرده، روی آن در دو طرف نقطهٔ H، پاره‌خطهای HM و HM′ را به طول l جدا می‌کنیم، و از نقاط M و M′ خطهای D_1 و D_2 را به موازات خط D رسم می‌نماییم. این دو خط مکان هندسی نقطه‌ای می‌باشند که از خط D به فاصلهٔ معین l واقع است. زیرا:



اولاً: هر نقطه مانند N که روی یکی از دو خط D_1 یا D_2 قرار داشته باشد، از خط D به فاصله l واقع است، چون اگر پای عمود مرسوم از نقطهٔ N بر خط D را H′ بنامیم، چهارضلعی MHH′N که اضلاعش دو به دو موازیند، متوازی‌الاضلاع است که چون زاویه‌هایش قائمه‌اند، مستطیل می‌باشد. پس NH′ = MH = L است.

ثانیاً: هر نقطه‌ای مانند E از صفحهٔ P که از خط D به فاصلهٔ l قرار داشته باشد، بر یکی از دو خط D_1 یا D_2 واقع است، زیرا با توجه به اینکه $MH = EH'' = l$ و $MH \parallel EH''$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90°$ است، چهارضلعی MHH″E مستطیل، و درنتیجه $ME \parallel HH''$ یا $ME \parallel D$ است. پس نقطهٔ E روی خط D_1 قرار دارد (از نقطهٔ M تنها یک خط راست به موازات خط راست D می‌توان رسم کرد).

اثبات به روش تحلیلی ــ خط $D: ax + by + c = 0$ را در دستگاه مختصات xoy درنظر می‌گیریم. اگر M(x,y) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:



$$MH = d = l \Rightarrow l = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow |ax + by + c| = l\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow D_1: ax + by + c + l\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \,,$$

$$D_2: ax + by + c - l\sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

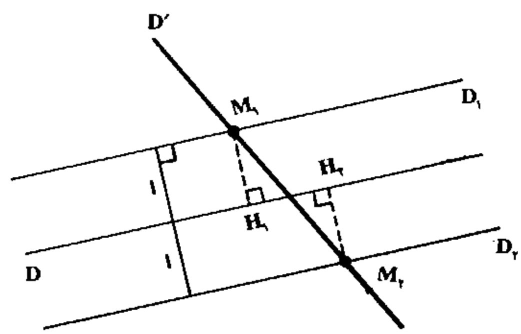
به‌طوری که دیده می‌شود، دو خط D_1 و D_2 خطهای راستی هستند که با خط D موازیند. زیرا:

$$m/D_1 = m/D_2 = m/D = -\frac{a}{b}$$

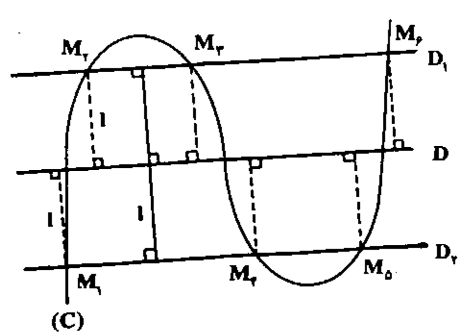
به عکس، مشخص است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ یکی از دو خط D_1 یا D_2 صدق کند، از خط $D: ax + by + c = 0$ به فاصلهٔ l قرار دارد، بنابراین:

مکان هندسی نقطه‌ای که از خط ثابت D به فاصلهٔ معین l واقع است، دو خط راست موازی این خط است که در طرفین آن واقعند.

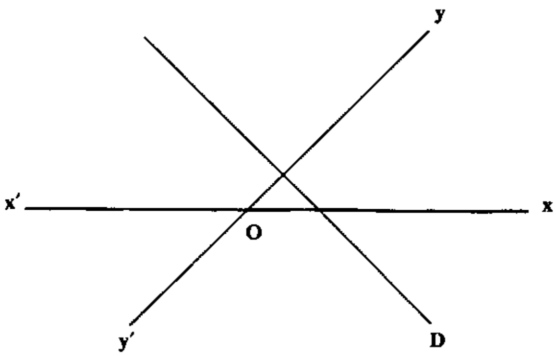
مثال ۱ ــ خط D و خط D' (یا منحنی (C)) در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی خط D' (یا منحنی (C)) تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l قرار داشته باشد.



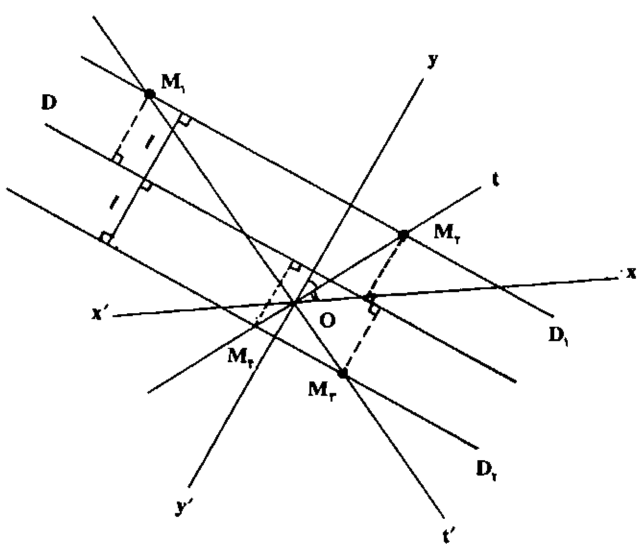
حل ــ دو خط D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ معلوم l قرار دارد، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خطهای D_1 و D_2 با خط D' (یا منحنی (C)) جواب مسأله است و تعداد جوابهای مسأله، به تعداد نقاط برخورد می‌باشند.



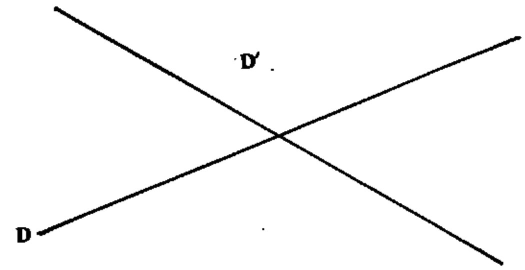
مثال ۲ ــ دو خط راست $x'ox$ و $y'oy$ و خط راست D در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از دو خط راست $x'ox$ و $y'oy$ به یک فاصله، و از خط D نیز به فاصلهٔ معین l قرار داشته باشد.



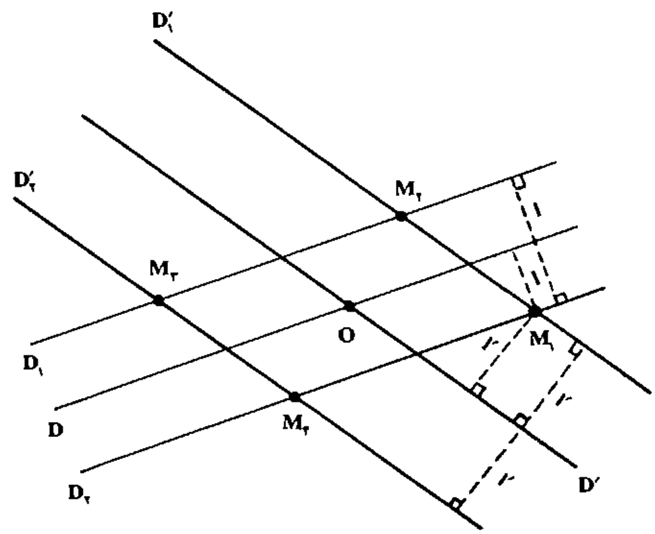
حل ــ خطهای D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ معین l قرار دارد رسم می‌کنیم. از طرفی می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط راست متقاطع به یک فاصله است، نیمسازهای زوایای بین آن دو خط است، بنابراین خطهای ot و ot' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط راست متقاطع $x'ox$ و $y'oy$ را نیز رسم می‌کنیم، نقاط تقاطع خطهای D_1 و D_2 با خطوط ot و ot'، جواب مسأله هستند. این مسأله حداقل دو جواب دارد.



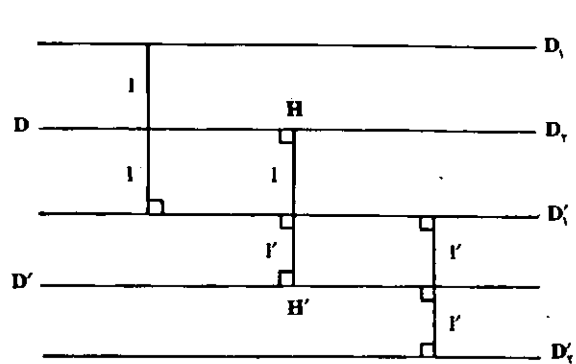
مثال ۳ ــ دو خط راست متمایز D و D' در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که از خط D به فاصلهٔ l و از خط D' به فاصلهٔ l' باشد.(بحث کنید).



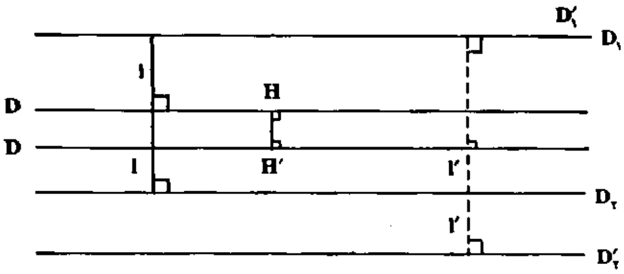
حل — خطهای D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ l قرار دارند و سپس خطهای D'_1 و D'_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D' به فاصلهٔ معین l' است، رسم می‌کنیم:

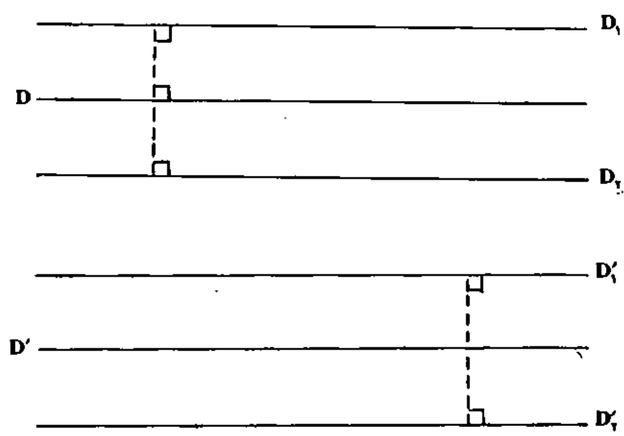


اگر خطهای D و D' متقاطع باشند، چهار خط D_1 و D_2 و D'_1 و D'_2 در چهار نقطهٔ M_1 و M_2 و M_3 و M_4 یکدیگر را قطع می‌کنند که این چهار نقطه جواب مسأله می‌باشند. درصورتی که دو خط D و D' متوازی باشند، خطهای D_1 و D_2 و D'_1 و D'_2 نیز متوازی خواهند بود. و دو حالت پیش می‌آید:



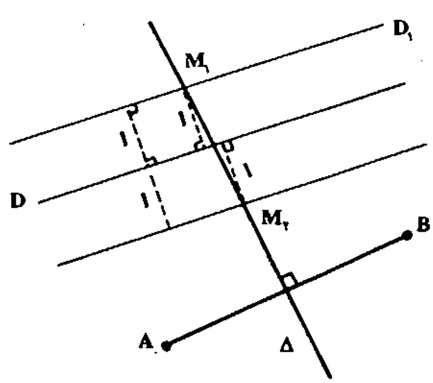
حالت اول: اگر یکی از دو خط D_1 و D_2 بریکی ازخطهای D'_1 یا D'_2 منطبق شوند، مسأله بی‌شمار جواب دارد، و این درصورتی است که فاصلهٔ بین دو خط متوازی D و D' برابر $l+l'$ یا $|l-l'|$ باشد.





حالت دوم: اگر هیچ‌یک از خطوط D_1 و D_2 بر خطهای D'_1 و D'_2 منطبق نشوند، معادله جواب ندارد. و این در صورتی است که فاصلهٔ بین دوخط متوازی D و D' برابر $l+l'$ یا $|l-l'|$ نباشد.

مثال ۴ — دو نقطهٔ A و B و خط D در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معین l واقع بوده، از دو نقطهٔ A و B نیز به یک فاصله باشد.



حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از خط مفروض D به فاصله معین l واقع است دو خط D_1 و D_2 موازی این خط و در طرفین آن است. بنابراین، این دو خط را رسم می کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو نقطهٔ ثابت A و B عمود منصف پاره خط AB است، لذا این عمود منصف را رسم می‌کنیم و آنرا Δ می‌نامیم. نقاط تقاطع خط Δ با خطهای D_1 و D_2 جواب مسأله است و تعداد جوابهای مسأله عبارت است از:

الف) دو جواب، درصورتی که خط Δ غیرموازی با خط D باشد.

ب) بی‌شمار جواب، درصورتی که خط Δ بر یکی از دو خط D_1 یا D_2 منطبق شود.

ج) بدون جواب، درصورتی که خط Δ موازی خط D و متمایز با خطهای D_1 و D_2 باشد.

مثال ۵ ــ دو خط $D: 3x - 4y - 5 = 0$ و $D': 2x + 4y + 5 = 0$ مفروضند. نقطه ای روی خط D' مشخص کنید که از خط D به فاصله ۲ سانتیمتر باشد.

حل ــ معادلهٔ خطهای D_1 و D_2 را که از خط D به فاصلهٔ ۲ سانتیمتر قرار دارند، به دست می‌آوریم. نقطه‌های تقاطع این دو خط با خط D'، جواب مسأله است.

$$l = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|3x - 4y - 5|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow$$

$$|3x - 4y - 5| = 10 \Rightarrow D_1: 3x - 4y + 5 = 0 \text{ و } D_2: 3x - 4y - 15 = 0$$

$$\begin{cases} D_1: 3x - 4y + 5 = 0 \\ D': 2x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow M_1(-2, -\frac{1}{4})$$

$$\begin{cases} D_2: 3x - 4y - 15 = 0 \\ D': 2x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow M_2(-2, -\frac{9}{4})$$

نقاط جواب مسأله.

مثال ۶ ــ نقطه‌ای روی منحنی (C) به معادلهٔ $y = \frac{x+7}{x-1}$ تعیین کنید که از خط $D: 2x + y - 3 = 0$ به فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ قرار داشته باشند.

حل ــ نقطهٔ تقاطع منحنی فوق با دو خط D_1 و D_2 که به فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ از خط D واقعند، جواب مسأله است.

$$l = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{|2x + y - 3|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow$$

$$|2x + y - 3| = 10 \Rightarrow D_1: 2x + y + 7 = 0 \text{ و } D_2: 2x + y - 13 = 0$$

$$\begin{cases} D_1: 2x + y + 7 = 0 \\ (C): y = \frac{x+7}{x-1} \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3$$

$$\Rightarrow M_1\Big|^{0}_{-7}, \quad M_2\Big|^{-3}_{-1}$$

$$\begin{cases} D_2: 2x + y - 13 = 0 \\ (C): y = \frac{x+7}{x-1} \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 5$$

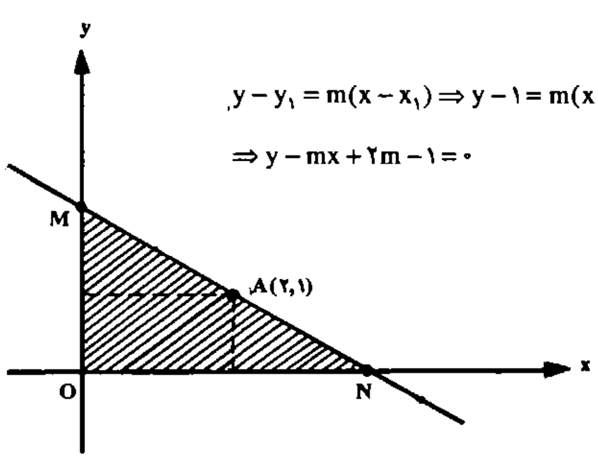
$$\Rightarrow M_3\Big|^{2}_{9}, \quad M_4\Big|^{5}_{3}$$

پس چهار نقطه M_1 و M_2 و M_3 و M_4 روی منحنی (C) وجود دارد که از خط D به فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ می‌باشند.

مثال ۷ ــ نقطهٔ $A(2,1)$ در دستگاه مختصات xoy مفروض است. اولاً ــ معادلهٔ خط D را که از نقطهٔ A می‌گذرد و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۴ سانتی‌متر مربع ایجاد می‌کند، بنویسید.

ثانیاً ــ مختصات نقاطی از بیضی به معادلهٔ $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ را بیابید که از خط D به فاصلهٔ $\sqrt{5}$ قرار داشته باشند.

حل ــ ضریب زاویهٔ خط D را برابر m فرض می‌کنیم داریم:



$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = m(x - 2)$$

$$\Rightarrow y - mx + 2m - 1 = 0$$

$x=0 \Rightarrow y=-2m+1$ عرض ازمبداء خط $\Rightarrow M(0,-2m+1)$

$y=0 \Rightarrow x=\frac{2m-1}{m}$ طول از مبداء خط $\Rightarrow N(\frac{2m-1}{m},0)$

$$S_{OMN}=\frac{1}{2}|pq| \Rightarrow 4=\frac{1}{2}\left|(\frac{2m-1}{m})\ (-2m+1)\right|$$

$$\Rightarrow (2m-1)^2=8|m| \Rightarrow 4m^2+1-4m=-8m$$

$$\Rightarrow 4m^2+4m+1=0 \Rightarrow \boxed{m=-\frac{1}{2}}$$

$$4m^2+1-4m=8m \Rightarrow 4m^2-12m+1=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{6\pm\sqrt{32}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{m=\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\ ,\ \boxed{m=\frac{3}{2}-\sqrt{2}}$$

مسأله را با $m=-\frac{1}{2}$ حل می کنیم، محاسبهٔ در مورد دو مقدار دیگر m نیز، شبیه این محاسبه است.

$$m=-\frac{1}{2} \Rightarrow D: y+\frac{1}{2}x-1-1=0 \Rightarrow D: 2y+x-4=0$$

حال معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ $\sqrt{5}$ واقع است می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد آن را با منحنی (C) به دست می‌آوریم.

$$l=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \sqrt{5}=\frac{|2y+x-4|}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$|2y+x-4|=5 \Rightarrow 2y+x-4=+5 \Rightarrow D_1: x+2y-9=0$$

$$2y+x-4=-5 \Rightarrow D_2: x+2y+1=0$$

$$\begin{array}{l} D_1: \\ (C): \end{array}\begin{cases} x+2y-9=0 \\ \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow M_1(\frac{19}{5},\frac{13}{5})$$

$$\begin{array}{l} D_2: \\ (C): \end{array}\begin{cases} x+2y+1=0 \\ \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow M_2(\frac{1}{5},-\frac{3}{5})$$

*** نام کسانی که حل درست یک یا دو مسأله هندسهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۳ را فرستاده‌اند:**

۱ـ آقای بهمن اصلاح پذیر دبیر ریاضی منطقهٔ ۱۷ تهران

۲ـ آقای امین سعیدفر دانش آموز سال چهارم ریاضی‌فیزیک از تهران

۳ـ آقای مهران نقی‌زاده دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از شهر ری

۴ـ آقای علی ازدری راد دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از مشهد

۵ـ آقای رضا تقی پور از شیراز

۶ـ آقای محمود تدین دانش‌آموز سال دوم ریاضی فیزیک از ساری (دبیرستان دکتر بهشتی)

۷ـ آقای عبداله شعبانی از مراغه

۸ـ آقای امیرمنصور خان محمد از تهران

۹ـ آقای رضا سالم از دبیرستان کمال تهران

۱۰ـ آقای علی مسگری دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از گرگان (دبیرستان شهید بهشتی)

۱۱ـ آقای رضا بردباری دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از شیراز

۱۲ـ آقای محمد بینشناز دانش‌آموز سال دوم ریاضی‌فیزیک از تهران

۱۳ـ آقای علی مقدم دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از منطقهٔ ۱۱ تهران (دبیرستان شهید مفتح)

۱۴ـ آقای علی نخودچی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک ازمشهد (دبیرستان شهید جباریان)

۱۵ـ آقای علی نصیری امینی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از منطقه ۷ تهران (دبیرستان صالح)

۱۶ـ آقای میثم نصیری دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از تهران

۱۷ـ آقای محمدرضا ضرابی از تهران

۱۸ـ آقای شبگیر حسنی دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از تهران

۱۹ـ آقای عبداله قهقایی (آرش) دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از آمل

۲۰ـ آقای علی قاسمی دانش‌آموز سال اول از مشهد مقدس

۲۱ـ آقایان علی‌هزاری و علی‌جلوه‌دار سال سوم ریاضی از تهران