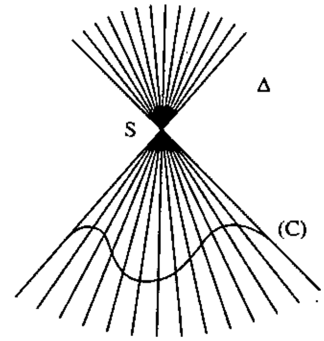
● محمد هاشم رستمی

مکان هندسی

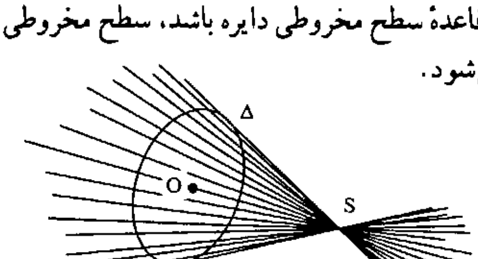
(قسمت شانزدهم)

مقطعهای مخروطی

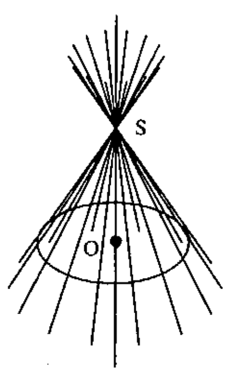
سطح مخروطی. اگر خط Δ چنان تغییر مکان دهد که همواره از نقطهٔ ثابت S بگذرد و بر منحنی ثابت (C) مماس باشد، سطحی به وجود می‌آید که آن را سطح مخروطی می‌نامند. نقطهٔ S رأس، منحنی (C) قاعده و خط Δ مولد سطح مخروطی نامیده می‌شوند.



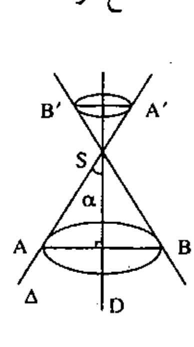
اگر قاعدهٔ سطح مخروطی دایره باشد، سطح مخروطی مستدیر نامیده می‌شود.



اگر در سطح مخروطی مستدیر عمودی که از رأس بر قاعده فرود می‌آید، از مرکز دایره بگذرد، سطح مخروطی را «دوّار» می‌نامند. در این حالت، این خط عمود را محور سطح مخروطی دوّار می‌نامند.



سطح مخروطی دوّار را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف نمود: دو خط راست Δ و D متقاطع در نقطهٔ S را در نظر می‌گیریم.



اگر خط D ثابت بماند و خط Δ حول خط D، چنان دوران نماید که همواره از نقطهٔ ثابت S بگذرد و با خط D، زاویهٔ ثابتی مانند α بسازد، سطحی به وجود می‌آورد که آن را سطح مخروطی دوّار می‌نامند. نقطهٔ S رأس، خط Δ مولد و خط D محور سطح

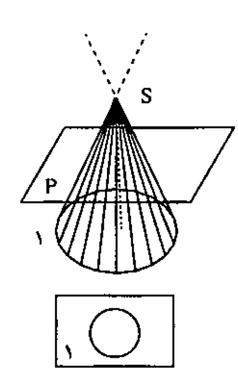
مخروطی دوّار نامیده می‌شوند.

چون خط Δ محدود نیست، سطح مخروطی در دو طرف S به وجود می‌آید که هر جزء را که در یک طرف رأس باشد، یک دامنهٔ سطح مخروطی می‌نامند.

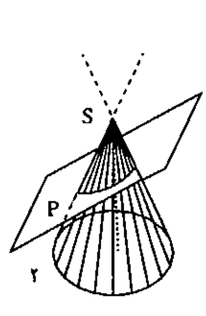
مخروط. اگر قاعدهٔ سطح مخروطی، مسطح و بسته باشد، بخشی از سطح مخروطی که بین رأس و قاعدهٔ آن محصور است، مخروط می‌نامند. بدیهی است در صورتی که سطح مخروطی مستدیر یا دوّار باشد، مخروط نیز بترتیب، مستدیر یا دوّار خواهد بود.

فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی دوّار. اگر صفحهٔ P از نقطهٔ S رأس سطح مخروطی دوّار به مولد Δ و محور نگذرد، فصل مشترکش با این سطح مخروطی دوّار، به یکی از صورتهای زیر است:

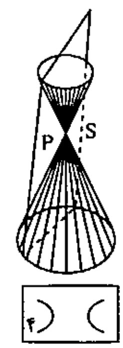
الف. صفحهٔ P بر خط D محور سطح مخروطی عمود باشد در این صورت منحنی مقطع، دایره است.



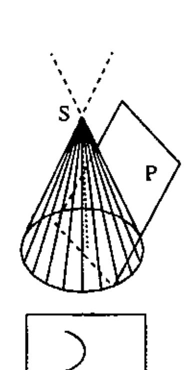
ب. صفحهٔ P بر محور عمود نباشد؛ امّا تمام مولدهای سطح مخروطی را در یک طرف رأس قطع کند، در این صورت مقطع، منحنی مسدودی است که بیضی نامیده می‌شود.



پ. صفحهٔ P برخی از مولدها را در یک طرف رأس و برخی دیگر را در طرف دیگر آن قطع کند، یا به بیان دیگر، صفحهٔ هر دو دامنهٔ سطح مخروطی را تلاقی نماید. در این صورت، مقطع، منحنیی است که از دو شاخهٔ متمایز و نامسدود تشکیل می‌شود که به آن هذلولی می‌گویند.

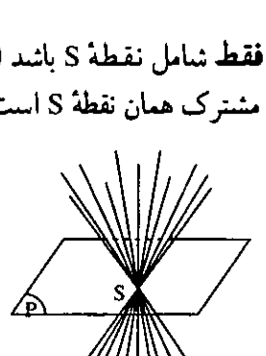


ت. صفحهٔ P با یکی از مولدهای سطح مخروطی موازی باشد. در این صورت، مقطع، منحنی نامسدودی است که سهمی نامیده می‌شود.



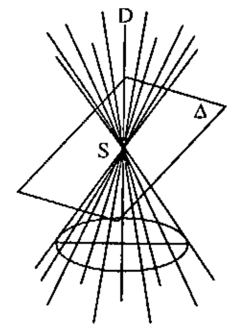
حالتهای ویژه. اگر صفحهٔ P بر نقطهٔ S رأس مخروطی دوّار بگذرد، فصل مشترک آن با سطح مخروطی دوّار به یکی از صورتهای زیر است:

۱. اگر صفحهٔ P **فقط** شامل نقطهٔ S باشد (بر هیچ یک از مولدها نگذرد)، فصل مشترک همان نقطهٔ S است.

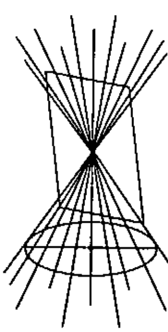


این حالت را حالت خاص دایره می‌نامند.

۲. اگر صفحهٔ P شامل تنها یک مولد سطح مخروطی دوّار باشد، مقطع یک خط راست است که صفحه در طول همین خط راست بر سطح مخروطی مماس است. این حالت را، حالت خاص سهمی می‌نامند.



۳. اگر صفحه شامل دو مولد سطح مخروطی دوّار باشد، فصل مشترک دو خط متقاطع است (همان دو مولد). این حالت را، حالت خاص هذلولی می‌نامند.



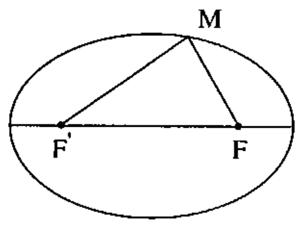
مقطعهای مخروطی. دایره، بیضی، هذلولی و سهمی را که فصل مشترک یک صفحه با یک سطح مخروطی دوّار (در حالتهای مختلف) می‌باشند، مقطعهای مخروطی می‌نامند که در حالتهای ویژه به نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع تبدیل می‌شوند.

بیضی. بیضی مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. دو نقطهٔ ثابت را کانونهای بیضی نامیده و معمولاً به F و F' نشان می‌دهند. مقدار ثابت را عدد ثابت بیضی نامیده و به ۲a نشان می‌دهند.

فاصلهٔ بین دو کانون را که عدد ثابتی است، فاصلهٔ کانونی بیضی می‌نامند و به ۲c نمایش می‌دهند.

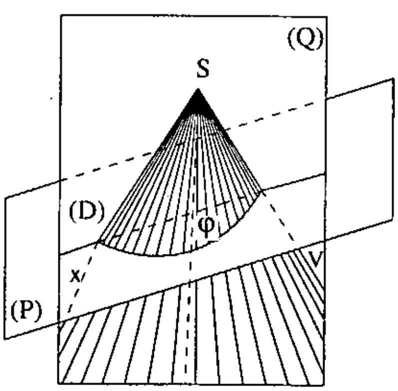
اگر M نقطه‌ای واقع بر بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۲a باشد، داریم :

$$MF + MF' = \text{۲}a$$



قضیهٔ داندلن. اگر صفحه‌ای همهٔ مولدهای سطح مخروطی دوّاری را در یک طرف رأس قطع کند، مقطع آن با سطح مخروطی دوّار یک بیضی است.

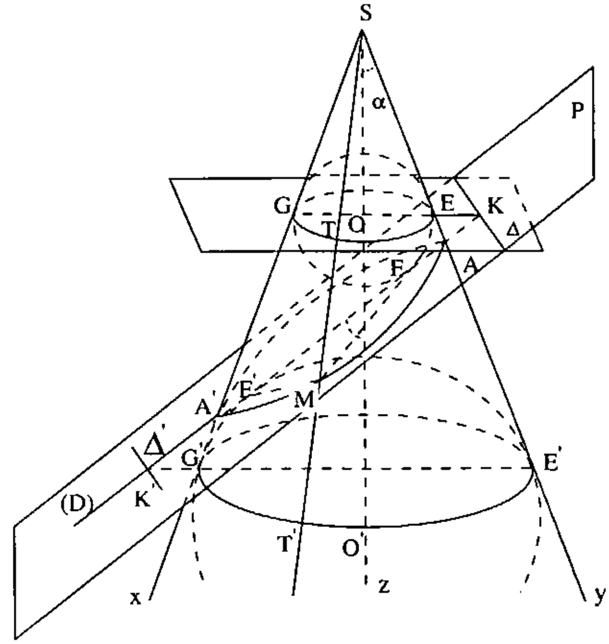
اثبات به روش هندسی. سطح مخروطی دوّار به رأس S و محور D، و صفحهٔ P را که همهٔ مولدهای سطح مخروطی را در یک طرف S قطع کرده است، در نظر می‌گیریم.



نخست صفحهٔ Q را چنان بر محور سطح مخروطی دوّار مرور می‌دهیم که بر صفحهٔ قاطع P عمود باشد و آن را صفحهٔ شکل می‌نامیم. سپس برای ساده کردن اثبات این قضیه، سطح مخروطی و صفحهٔ قاطع را بر صفحهٔ شکل تصویر می‌کنیم. تصویر صفحهٔ P بر صفحهٔ شکل و مقطع آن با صفحهٔ مذکور، خطی مانند D ، و تصویر سطح مخروطی دوّار بر صفحهٔ شکل و فصل مشترکش با آن صفحه، زاویهٔ xSy خواهد بود. چون صفحهٔ P تمام مولدها را در یک طرف رأس S قطع کرده است، خط D دو ضلع زاویهٔ xSy را در یک طرف رأس S قطع می‌کند. (شکل)

زاویهٔ بین خط D و محور مسطح مخروطی دوّار که آن را با φ نشان می‌دهیم، زاویهٔ محور با صفحهٔ قاطع است. اگر α

زاویهٔ مولد با محور سطح مخروطی دوّار باشد، چون صفحهٔ قاطع در یک طرف S قرار دارد و عمود بر محور نیست، $\alpha < \varphi < 90^\circ$ است.



نقطه‌های برخورد خط D با Sy و Sx را به ترتیب، A و A′ می‌نامیم. دایره‌های محاطی درونی و محاطی خارجی مماس بر ضلع AA′ از مثلث SAA′ را رسم می‌کنیم. نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی درونی (O) با ضلعهای SA، AA′ و SA′ را به ترتیب، E، F و G و نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی بیرونی (O′) با ضلعهای Sy، AA′ و Sx را بترتیب، E′ ، F′ و G′ می‌نامیم. حال ثابت می‌کنیم که مقطع یک بیضی است که A و A′ رأسهای محور بزرگ و F و F′ دو کانون آن هستند. زاویهٔ xSy و دایره‌های O و O′ را در حول محورSZ یک دور دوران می‌دهیم ؛ از دوران دایره‌های محاطی درونی و برونی، دو کره به وجود می‌آیند که به ترتیب، در F و F′ بر صفحهٔ قاطع و در طول دو دایره به قطرهای EG و E′G′ بر سطح مخروطی مماسند. حال اگر M یک نقطهٔ دلخواه از منحنی مقطع باشد، باید ثابت کنیم که :

$$MF + MF' = AA'$$

اگر نصف محیط مثلث SAA′ را P بنامیم، داریم :

$$FA = AE = P - SA'$$

و : $F'A' = A'G' = P - SA'$

پس : $FA = F'A'$ و $AF' = AE'$

بنابراین از یک طرف :

$$AF + AF' = A'F' + AF' = AA'$$

و از طرف دیگر :

$$AF + AF' = AE + AE' = EE'$$

پس : $EE' = AA'$

چون M در صفحهٔ قاطع است، MFمماس بر کرهٔ O و MF′ مماس بر کرهٔ O′ است ؛ و چون M روی سطح مخروطی است مولد SM بر کره‌های O و O′ مماس است (T و T′ نقطه‌های تماس، روی دایره‌های تماس واقعند).

پس : $MF = MT$

و : $MF' = MT'$

یعنی : $MF + MF' = MT + MT' = TT'$

و چون تمام مولدهای مخروط ناقص، واقع بین دو دایرهٔ تماس، با هم برابرند، $TT' = EE' = AA'$ ؛ یعنی :

$$MF + MF' = AA'$$

و با فرض $AA' = 2a$ ، خواهیم داشت :

$$MF + MF' = 2a$$