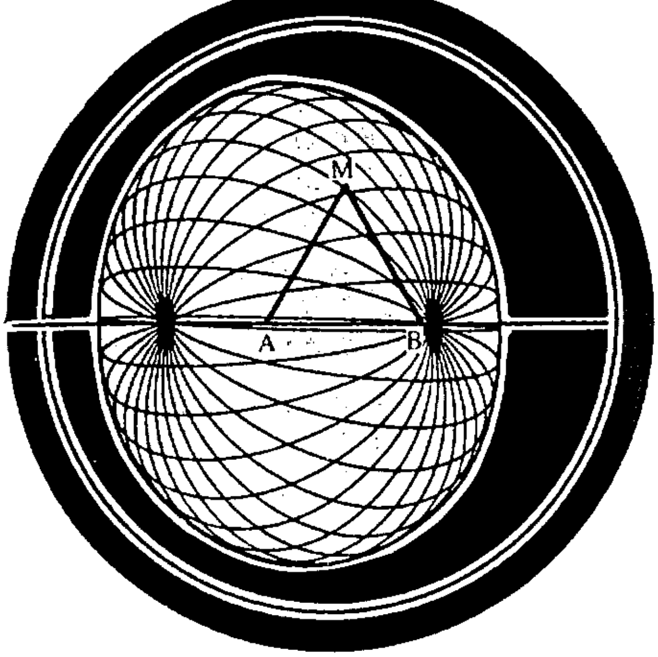


مکان هندسی

قسمت دوازدهم

(اوّل ، دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)

● محمد هاشم رستمی

مثال ۱۰ ــ هذلولی به معادلهٔ $x^{2}-y^{2}=4$ داده شده است. الف ــ این هذلولی را رسم کنید و مختصات مرکز رأسها و کانونهای آن رابیابید. ب ــ مختصات نقطهٔ E مزدوج توافقی نقطهٔ F نسبت به دو رأس A و A′ را پیدا کنید و معادلهٔ دایرهٔ به قطر EF را بنویسید. پ ــ نقطه‌ای روی هذلولی بالا بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A′ برابر $3-2\sqrt{2}$ باشد.

حل ــ الف ــ $x^{2}-y^{2}=4 \Rightarrow \frac{x^{2}}{4}-\frac{y^{2}}{4}=1 \Rightarrow$

$a^{2}=b^{2}=4 \Rightarrow$ ، $O(0,0)$ مرکز هذلولی

$a=b=2 \Rightarrow c=a\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ ، $A\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$ $A'\begin{vmatrix}-2\\0\end{vmatrix}$

$F\begin{vmatrix}2\sqrt{2}\\0\end{vmatrix}$ $F'\begin{vmatrix}-2\sqrt{2}\\0\end{vmatrix}$

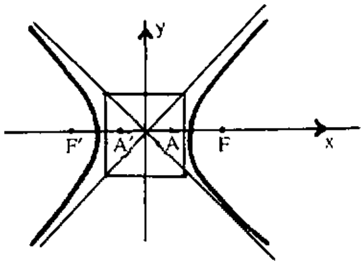
ب ــ بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی داریم:

$\overline{OE}.\overline{OF}=\overline{OA}^{2}$

$\Rightarrow OE\times c=a \Rightarrow OE=\frac{a^{2}}{c}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow$

$E\begin{vmatrix}\frac{a\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\\0\end{vmatrix}$ ، EF وسط پاره‌خط $O'\begin{vmatrix}x=\frac{x_E+x_F}{2}\\y=0\end{vmatrix}$

$=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$



$R=O'E=O'F=a\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}a=\frac{a\sqrt{2}}{4}=\frac{2\sqrt{2}}{4}$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}$ شعاع دایرهٔ به قطر EF .

$(x-\alpha)^{2}+(y-\beta)^{2}=R^{2}\Rightarrow(x-\frac{3\sqrt{2}}{2})^{2}+y^{2}=\frac{1}{2}$
معادلهٔ دایرهٔ به قطر EF

پ ــ دو نقطهٔ E و F پاره‌خط AA' را به نسبت $3-2\sqrt{2}$ تقسیم می‌کنند. زیرا داریم:

$$\frac{FA}{FA'}=\frac{EA}{EA'}=\frac{c-a}{c+a}=\frac{a\sqrt{2}-a}{a\sqrt{2}+a}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}$$

بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A' برابر $3-2\sqrt{2}$ است، دایرهٔ به قطر EF است. لذا نقطهٔ برخورد این دایره با هذلولی را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2-y^2=4 \Rightarrow y^2=x^2-4 \\ (x-\frac{3\sqrt{2}}{2})^2+y^2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{3\sqrt{2}}{2})^2+x^2-4=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2-3\sqrt{2}x=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ و } x=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ x=0 \Rightarrow y^2=-4\ ,$$

$$x=\frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y^2=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M_1(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ و}$$

$M_2(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ نقطه‌های جواب مسأله

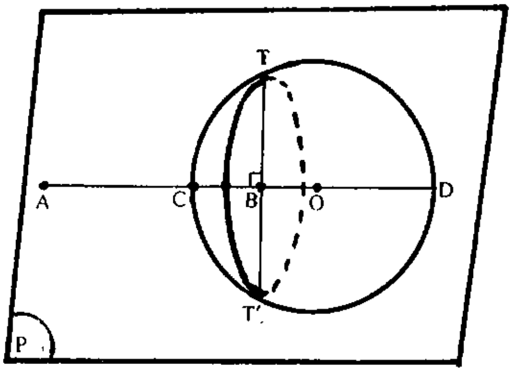
تمرین

۱ ــ پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مساوی $\sqrt{2}$ باشد. شعاع دایرهٔ مکان هندسی و فاصلهٔ مرکز این دایره از نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

۲ ــ دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۸ سانتیمتر از یکدیگر در صفحهٔ P داده شده‌اند. الف ــ نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان بیابید که این پاره‌خط را به نسبت $\frac{5}{3}$ تقسیم کنند. دایرهٔ به قطر CD چگونه دایره‌ای است؟

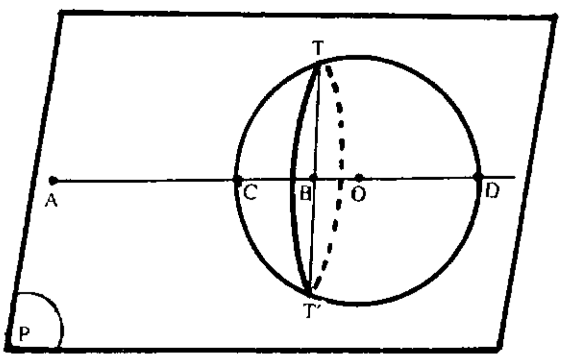
ب ــ نقطه‌ای از صفحهٔ P را تعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۹۰ درجه دیده شود و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{5}{3}$ باشد.

۸ ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.



اثبات به روش هندسی ــ صفحهٔ دلخواه P را که بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد در نظر می‌گیریم و در این صفحه روی پاره‌خط AB و در امتداد آن، دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند. آن‌گاه دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این دایره مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است. حال صفحهٔ P را حول خط AB دوران می‌دهیم. از دوران دایرهٔ به قطر CD واقع در این صفحه که همواره و در هر وضعی از صفحهٔ P، مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است، کره‌ای به قطر CD پدید می‌آید، که این کره مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است.

اثبات به روش تحلیلی ــ دو نقطهٔ ثابت $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ را در دستگاه مختصات $O-xyz$ در نظر



می‌گیریم. اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است، داریم :

$$A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2),\ M(x,y,z) \Rightarrow$$

$$MA=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\ \text{و}$$

$$MB=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$$

$$\frac{MA}{MB}=K \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}=K \Rightarrow$$

$$k^2(x-x_2)^2+k^2(y-y_2)^2+k^2(z-z_2)^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$

پس از ساده کردن معادلهٔ بالا، معادله‌ای به صورت :

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(x_1-k^2x_2)}{k^2-1}x+\frac{2(y_1-k^2y_2)}{k^2-1}y+\frac{2(z_1-k^2z_2)}{k^2-1}z+\frac{k^2(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}{k^2-1}=0 \qquad (1)$$

به‌دست می‌آید که معادلهٔ یک کره به مرکز نقطهٔ

$$O_1\left(\frac{k^2x_2-x_1}{k^2-1},\frac{k^2y_2-y_1}{k^2-1},\frac{k^2z_2-z_1}{k^2-1}\right)$$

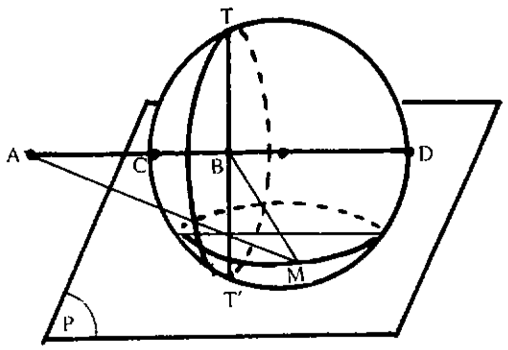
و به شعاع

$$R=\left|\frac{k}{k^2-1}\right|\times\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-2x_1x_2-2y_1y_2-2z_1z_2}$$

است.

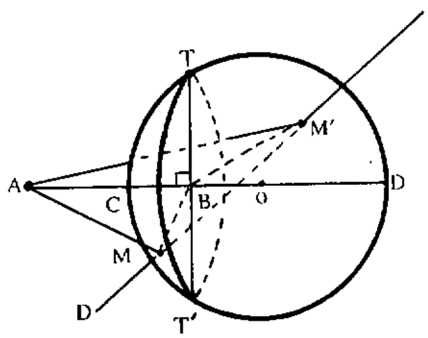
بدیهی است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ برابر مقدار ثابت K است. در ضمن به کمک یکی از رابطه‌های مربوط به تقسیم توافقی، به‌عنوان مثال به کمک رابطهٔ نیوتن می‌توان ثابت نمود که قطر این کره، پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند. بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K باشد، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.

مثال ۱ ــ صفحهٔ P و دونقطهٔ A و B غیرواقع بر آن مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت K است.



حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت K باشد، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند، این کره را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ P جواب مسأله است. در صورتی که کره، صفحه P را قطع کند، جواب مسأله یک دایره است، و اگر کره بر صفحهٔ P مماس باشد، جواب مسأله یک نقطه (نقطهٔ تماس کره و صفحه) است، و اگر کره، صفحهٔ P را قطع نکند مسأله دارای جواب نیست.

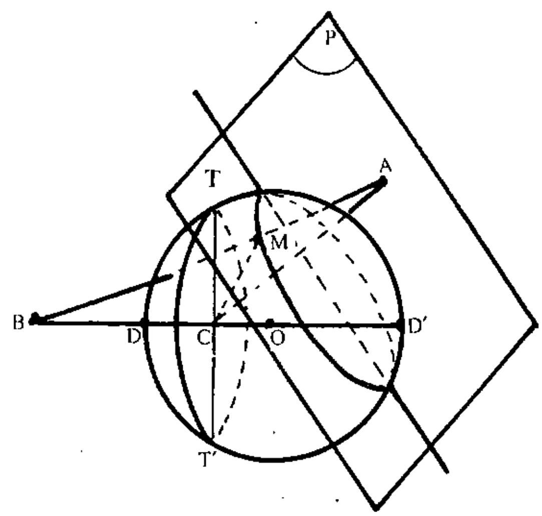
مثال ۲ ــ خط D و دو نقطهٔ A و B غیرواقع در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر K است.



حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر K است، یعنی کرهٔ به قطر CD را چنان که C و D پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کرده‌اند،

رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این کره با خط D جواب مسأله است. مسأله حداکثر ۲ جواب دارد.

مثال ۳ ــ سه نقطهٔ A، B و C مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از دو نقطهٔ A و C به یک فاصله است و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت K است.



حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطهٔ A و C به یک فاصله است صفحه P عمود منصف پاره‌خط AB است که این صفحه را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر K می‌باشد، یعنی کرهٔ به قطر DD′ (نقطه‌های D و D′ پاره‌خط BC را به نسبت K تقسیم کرده‌اند) را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AC جواب مسأله است.

مثال ۴ ــ دو نقطهٔ $A(-1,2,0)$ و $B(3,-2,1)$ مفروض‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\sqrt{2}$ است.

حل ــ راه اول: با قرار دادن $(x_1=-1, y_1=2, z_1=0)$ و $(x_2=3, y_2=-2, z_2=1)$ و $k=\sqrt{2}$ در معادلهٔ (۱) (معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است)، معادلهٔ مکان هندسی مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(-1-6)}{2-1}x+\frac{2(2+4)}{2-1}y+\frac{2(0-2)}{2-1}z$$
$$+\frac{2(9+4+1)-(1+4+0)}{2-1}=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-14x+12y-4z+23=0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

راه دوم: فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد. در این صورت داریم:

$$A(-1,2,0)\ ،\ B(3,-2,1)\ ،\ M(x,y,z)\ ,\ k=\sqrt{2}\Rightarrow$$
$$MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+z^2}\ ,$$
$$MB=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$$
$$\Rightarrow\frac{MA^2}{MB^2}=k^2\Rightarrow\frac{(x+1)^2+(y-2)^2+z^2}{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}=2\Rightarrow$$
$$2(x-3)^2+2(y+2)^2+2(z-1)^2=$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2\Rightarrow$$
$$x^2+y^2+z^2-14x+12y-4z+23=0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

مثال ۵ ــ الف ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه $A(2,0,-1)$ و $B(0,3,1)$ برابر $\sqrt{3}$ باشد. ب ــ ثابت کنید که خط $D:\frac{x+1}{1}=\frac{y-\frac{9}{2}}{-2}=\frac{z-2}{2}$ از مرکز کرهٔ مکان هندسی بالا می‌گذرد. پ ــ نقطه‌هایی از خط D را مشخص سازید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر $\sqrt{3}$ باشد.

حل ــ الف ــ مکان هندسی خواسته شده کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. معادلهٔ این کره به صورت زیر است:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(x_1-k^2x_2)}{k^2-1}x+\frac{2(y_1-k^2y_2)}{k^2-1}y+$$
$$\frac{2(z_1-k^2z_2)}{k^2-1}+\frac{k^2(x_2^2+y_2^2+z_2)^2-(x_1^2+y_1^2+z_1)^2}{k^2-1}=0$$
$$A(x_1=2, y_1=0, z_1=-1)\ ،\ B(x_2=0, y_2=3, z_2=1)،$$
$$k=\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(2-0)}{3-1}x+\frac{2(0-9)}{3-1}y+$$

$$\frac{2(-1-3)}{3-1}z+\frac{3(0+9+1)-(4+0+1)}{3-1}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2x-9y-4z+\frac{25}{2}=0$$

معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی مورد نظر

ب ــ مرکز کرهٔ بالا نقطهٔ $O_1(-1,\frac{9}{2},2)$ است که مختصاتش در معادلهٔ خط D صدق می‌کند پس خط D از مرکز کره می‌گذرد.

پ ــ نقطهٔ برخورد خط D و کرهٔ مکان هندسی بالا را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-9y-4z+\frac{25}{2}=0 \\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-\frac{9}{2}}{-2}=\frac{z-2}{2}=t \Rightarrow x=t-1\ , \end{cases}$$

$$y=-2t+\frac{9}{2}\ ,\ z=2t+2$$

$$\Rightarrow (t-1)^2+(-2t+\frac{9}{2})^2+(2t+2)^2+2(t-1)$$

$$-9(-2t+\frac{9}{2})-4(2t+2)+\frac{25}{2}=0$$

$$\Rightarrow 9t^2=\frac{51}{4}\Rightarrow t^2=\frac{51}{36}\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{51}}{6}\Rightarrow M_1(\frac{\sqrt{51}}{6}-1\ ,$$

$$\frac{-\sqrt{51}}{3}+\frac{9}{2},\frac{\sqrt{51}}{3}+2),$$

$$M_2(\frac{-\sqrt{51}}{6}-1,\frac{\sqrt{51}}{3}+\frac{9}{2},\frac{-\sqrt{51}}{3}+2)$$

مثال ۶ ــ دو نقطهٔ $A(-1,2,+1)$ و $B(3,-1,1)$ در دستگاه مختصات $O-xyz$ داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ xoy را پیدا کنید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است، تعیین می‌کنیم و فصل مشترک آن با صفحه xoy به معادلهٔ $z=0$ را به دست می‌آوریم:

$$A(-1,2,1)\ ,B(3,-1,1)\ ,M(x,y,z)\ ,k=2\Rightarrow$$

$$MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\ ,$$

$$MB=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}\ ,$$

$$\frac{MA}{MB}=2\Rightarrow\frac{MA^2}{MB^2}=4\Rightarrow MA^2=4MB^2\Rightarrow$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=$$

$$4(x-3)^2+4(y+1)^2+4(z-1)^2\Rightarrow$$

$$3x^2+3y^2+3z^2-26x+12y-6z+38=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{26}{3}x+4y-2z+\frac{38}{3}=0$$

معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-\frac{26}{3}x+4y-2z+\frac{38}{3}=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{26}{3}x+4y+\frac{38}{3}=0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده.

تفریح اندیشه ۴

یکی از متصدیان بازی گلف به جای استفاده از تلفن زمین بازی، از زبان اشاره استفاده می‌کرد. مثلاً با یکی از بچه‌ها با تکان دادن پیراهنش حرف می‌زد و در مورد دیگری به جایگاه توپها اشاره می‌کرد.

این وضع در یکی از مسابقات که در آن تلفن نبود به دردش خورد. در این مسابقه مجبور شد از سیستم علامت دادن استفاده کند. او دو پرچم قرمز یک جور، دو پرچم آبی یک جور، و دو پرچم سفید یک جور داشت و آنها را یکی زیر دیگری بدون فاصله بر تیری برافراشت، و به خاطر وضوح کار، هیچ گاه دو پرچم یک رنگ را مجاور هم قرار نداد.

چند علامت متمایز با این سیستم می‌توان فرستاد؟

جواب در صفحهٔ ۸۸