## چشم اندازی از

# نظریهٔ گرافها

مهدی بهزاد

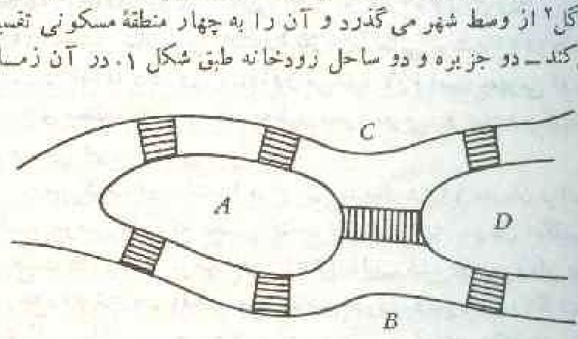
نظریهٔ گرافها که تا یك ربع قرن پیش نزد اکثریت قریب به اتفاق ریاضیدانان ناشناخته بود امروز همگام با سایرشاخه‌های ریاضیات ترکیبیاتی با گامهای بلند به‌پیش می‌رود و مسائل جذاب و ارتباطهای فراوانش با رشته‌های دیگر روز به‌روز اذهان بیشتری را ازمسیرهای متفاوتی به سوی آن می‌کشاند. در این مقاله می‌کوشیم در اطراف این نظریه گشتی بزنیم و چشم‌اندازی، هرچند ناقص، از آن به‌دست دهیم. قسمت اصلی این نوشتار، شامل تاریخچه‌ای کوتاه و شرح چند مقوله از این نظریه است که به‌طور نمونه‌وار ویژگیهای آن را می‌نمایانند. جز دریکی دومورد ساده کلاً از آوردن اثبات می‌پرهیزیم و در بیشتر موارد به‌تعریف شهودی مفاهیم بسنده می‌کنیم. برای معرفی نظریه کتابهای مختلفی را که درشاخه‌های گوناگون آن تألیف شده‌اند درنظر می‌گیریم، و به‌طور ضمنی به‌ارائهٔ موضوع این کتابها می‌پردازیم.

## ۱. تاریخچه

در این قسمت، ریشه‌ها و تاریخچهٔ دوقرنی این نظریه را به‌اختصار بازگو می‌کنیم.

### ۱.۱ مسالهٔ پل کونیگسبرگ[1]

روزهای تعطیل سالهای قبل از ۱۷۳۶ میلادی بچه‌های شهر کونیگسبرگ که امروزه کالینگراد نامیده می‌شود شور وشعفی داشتند. رودخانهٔ پرگل[2] از وسط شهر می‌گذرد و آن را به چهار منطقهٔ مسکونی تقسیم می‌کند ــ دو جزیره و دو ساحل رودخانه طبق شکل ۱. در آن زمان



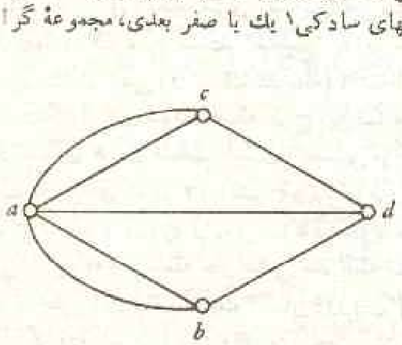

شکل ۱

1. Königsberg 2. Pregel

هفت پل این چهار منطقه را به هم وصل می‌کردند. سرگرمی بچه‌ها و گاه بزرگترها این بود که از خانه خارج شوند، سعی کنند از هر یك از هفت پل موجودفقط یك بار بگذرند، و به‌خانهٔ خود باز گردند. آیا این کار شدنی است؟

هرچند بسیاری از اهالی شهر عملاً قانع شده بودند که پاسخ منفی است ولی اویلر [۱۰] درسال ۱۷۳۶ درمقاله‌ای رسماً منفی بودن پاسخ را ثابت کرد و به‌همهٔ جروبحثها، و شور وشرها پایان داد. وی به‌مناطق $A$، $B$، $C$، و $D$ به‌ترتیب نقاط $a$، $b$، $c$، و $d$ را نسبت داد و به‌تعداد پلهایی که دومنطقه را به هم وصل می‌کردند، بین دونقطهٔ متناظر آنها خطی رسم کرد و شکل ۲ را پدیدآورد. سپس با توسل به‌این نکته که در نمودار نقطه‌ای وجود دارد که تعداد خطهای ماربر آن فرد است کار استدلال را به‌پایان رسانید.

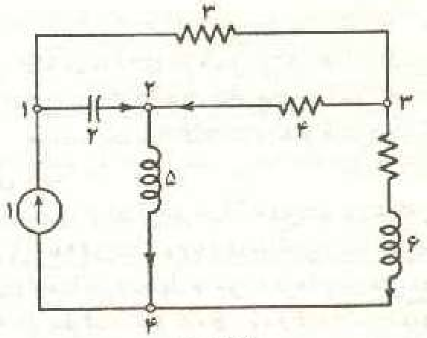
اویلر در این مقاله اظهار می‌کند که به‌هندسه‌ای دست‌یافته است که در آن اندازه مطرح نیست. وی در این سال به‌طور مستقیم شاخه‌ای از ریاضیات را که امروزه به‌نظریهٔ گرافها معروف است بنیان گذاشت، و به‌طور غیرمستقیم شاخهٔ عظیم توپولوژی را به‌وجود آورد. (تعیین سال کشف توپولوژی به‌عنوان شاخه‌ای مستقل کار ساده‌ای نیست، اما مسلم است که این رشته برای تجرید بعضی ازمفاهیم موجود درریاضیات سالها بعد شکوفا شد، و بالاخره لیستینگ در سال ۱۸۴۷ اصطلاح توپولوژی را بر آن نهاد. امروزه نظریهٔ گرافها به‌عنوان رشته‌ای محض جزئی از توپولوژی ترکیبیاتی (جبری) محسوب می‌شود، و در واقع مجتمعهای سادکی[1] یك یا صفر بعدی، مجموعهٔ گرافها را تشکیل می‌دهند.)



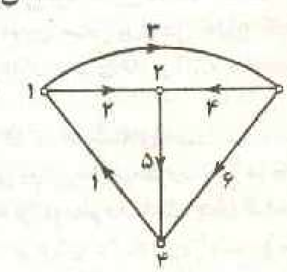

شکل ۲

1. simplicial complexes

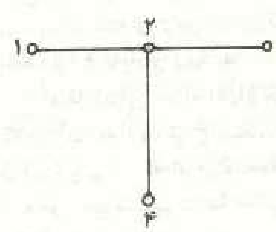
### ۲.۱ شبکه‌های الکتریکی
بیش از یک قرن از حل مسألهٔ پل کونیگسبرگ گذشت تا بار دیگر مفهوم گراف مطرح شد. در این یک قرن اثر اویلر تنها کار مدونی بود که در این زمینه انجام شد. برای تعیین مقدار جریان موجود در هر یک از شاخه‌های یک شبکهٔ الکتریکی حل یک دستگاه همگن از معادلات خطی مورد نیاز است. (به شکل ۳ رجوع کنید.) چون قوانین کیرشهف مستقل از شاخه‌های تشکیل‌دهندهٔ شبکه هستند، در سال ۱۸۴۷ کیرشهف [۱۸] به‌جای شبکه، شکل مجردی از آن را در نظر گرفت که امروزه در مهندسی برق عمدتاً آن را گراف خطی می‌نامند (شکل ۴). سپس برای حل دستگاه از این نمودار هم صرفنظر کرد و در عوض یک "درخت گسترنده" از نمودار را در نظر گرفت و با کمک آن دستگاه معادلات را به دستگاه بسیار ساده‌تری تبدیل کرد (شکل ۵). بدین ترتیب کیرشهف در سال ۱۸۴۷ برای حل یک مسأله کاربردی از گراف استفاده کرد. برای مطالعهٔ بیشتر، کتاب گرافهای خطی و شبکه‌های الکتریکی [۲۴] توصیه می‌شود.



شکل ۳



شکل ۴

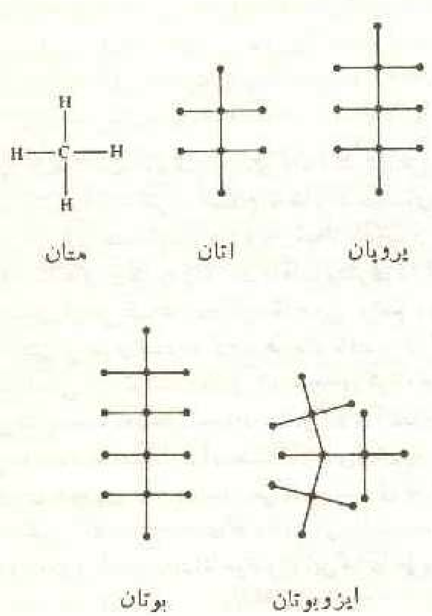


شکل ۵

### ۳.۱ مسألهٔ چهار رنگ
گفته می‌شود از قرنها قبل کسانی که در کار تهیهٔ نقشه و اطلس بوده‌اند در عمل می‌دیده‌اند که برای رنگ‌آمیزی "صحیح" هر نقشهٔ مسطح یا کروی بیش از چهار رنگ لازم نیست. "صحیح" به این معناست که اگر دو کشور مرز مشترک خطی (و نه یک تک‌نقطه) داشته‌باشند باید با دو رنگ مختلف رنگ‌آمیزی شوند. اینکه طرح این مسأله به‌چه‌سالی برمی‌گردد و واضع آن کیست مشخص نیست. نخستین مرجع نوشته شده مربوط است به نامه‌ای که در ۲۳ اکتبر ۱۸۵۲ دومورگان به سر ویلیام هامیلتون می‌نویسد و در آن: راه‌حل مسأله را جویا می‌شود. در این مورد هم می‌توانیم به هر منطقهٔ جغرافیایی یک نقطه نسبت دهیم و دو تا از آنها را با خطی (در واقع با یک "کمان ژوردان") به‌هم وصل کنیم اگر و تنها اگر دو منطقهٔ مربوط دارای مرز خطی مشترک باشند. مسألهٔ چهار رنگ به‌مطالعهٔ عده فامی گرافهای خاصی بر می‌گردد که بعداً درباره آنها صحبت خواهیم کرد. برای مطالعهٔ بیشتر به [۲۱] رجوع کنید.

### ۴.۱ ایزومرهای شیمیایی
کیلی[۸] در سال ۱۸۵۷ حین شمارش ایزومرهای مختلف هیدروکربنهای اشباع شده، $C_nH_{2n+2}$، به ازای اعداد طبیعی n، موفق به کشف گرافهای خاصی شد که آنها را درخت می‌نامند (شکل ۶).

کیلی که ریاضیدان برجسته‌ای بود مسأله را به‌طور مجرد مطرح کرد و پس از حل چند مسألهٔ جنبی توانست پاسخ اصلی خود را بیابد، و با برداشتی کاملاً نظری وجود ایزومرهای ناشناخته‌ای را پیش‌بینی کند. از آن پس راه استفاده از گراف در شیمی باز شد به‌طوری‌که امروزه بسیاری نظریهٔ شیمیایی گرافها را به عنوان شاخه‌ای جدید از علم شیمی می‌پندارند و به‌همین دلیل هم ترینائوستیک، شیمیدان اهل یوگسلاوی در ۱۹۸۳ مبادرت به تألیف دو جلد کتاب تحت عنوان نظریهٔ شیمیایی گرافها [۳۵] کرده است.




شکل ۶

### ۵.۱ پس از گذشت دو قرن
تا سال ۱۹۳۶، دو قرن پس از حل مسألهٔ کونیگسبرگ، هنوز پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در این رشته به‌دست نیامده بود. تنها نکتهٔ قابل توجه، صرفنظر از پیدایش کاربرد نظریهٔ گرافها در مهندسی برق و در شیمی، این بود که در اواسط قرن گذشته منطق صوری گسترش یافت و منجر به‌مطالعهٔ رابطه‌های دوتایی به‌صورت گراف شد [۲۰]. کونیگ در سال ۱۹۳۶ نخستین کتاب این رشته را به‌زبان آلمانی نوشت [۱۹] و نام گراف را اشاعه داد. وی یادآور می‌شود لازم است مفهومی که در زمینه‌های مختلف کاربرد دارد به‌طور مجرد معرفی، و تمام ویژگیهای آن بررسی شود.

دومین کتاب این رشته را برج [۵] در سال ۱۹۵۸ به‌زبان فرانسه نوشت. سومین کتاب که نخستین کتاب نظریهٔ گرافها به زبان انگلیسی نیز هست در ۱۹۶۲ توسط اور[1] [۲۵] تألیف شد. از این زمان بود که رفته رفته تعاریف دقیقتر جای مفاهیم شهودی و نموداری را گرفتند، مسائل کلی جالبی ــ مجرد و کاربردی ــ به‌وجود آمدند، و کنفرانسهای بیشتر و پربارتری برای عرضهٔ مقالات، و تبادل افکار تشکیل شدند.

1. O. Ore

نخستین گردهمایی این رشته که تا حدی جنبهٔ بین‌المللی داشت درسال ۱۹۵۸ درشهر بوداپست، دومین آن در ۱۹۶۰، وسومین آن در ۱۹۶۳ تحت حمایت فرهنگستان علوم چکسلواکی تشکیل شد. درکنفرانس اخیر ۳۷ نفر شرکت داشتند کـه تنها ۱۳ نفرشان از کشور میزبان نبودند ـ مثلاً از آمریکا یك‌نفر، واز انگلستان‌دو نفر. هرچند اور درمقدمهٔ کتاب خود [۲۰] می‌نویسد "... عجیب است که تا به‌حال هیچ کتابی به‌زبان انگلیسی در این‌رشته نوشته‌نشده است، حال آنکه تعداد زیادی از مقالات ارزنده به‌مؤلفان آمریکایی و انگلیسی تعلق دارند..." ولی شواهد امر نشان می‌دهد که تا اوائل دههٔ ۱۹۶۰ این رشته در دنیای انگلیسی زبان و به‌ویژه درآمریکا، رونقی نداشته است.

انتشارکتاب اور در اوایل دههٔ ۶۰ که به دوران طلایی ریاضی آمریکا معروف است اوضاع را به نفع این رشته تغییرداد. بورسهای تحقیقاتی فراوانی در اختیار محققان گذاشته شد، در دوره‌هـای بعد از کارشناسی درسهایی بـه صورت مطالعهٔ انفرادی تحت عناوینی چون "مقولاتی در هندسه" ارائه گردید؛ و تعداد افرادی که رسالهٔ دکتری خودشان را در این رشته نـوشتند روبه‌تزاید گذاشت. نخستین شمارهٔ مجلهٔ نظریهٔ ترکیبیاتی[1] در ۱۹۶۶ و نخستین شمارهٔ مجلهٔ خـاص این رشته[2] در ۱۹۷۷ انتشار یافت. انتشار این دومجله همراه بـا مجلات دیگر در زمینهٔ ریاضیات گسسته، دسترسی به‌کامپیوترهای سریع، کشف الگوریتمهای جالب در ارتباط با این‌نظریه [۴] ونیاز مبرم رشته‌های دیگر به‌نظریهٔ گرافها ـ چه در داخل و چه درخارج حوزهٔ ریاضیات ـ سبب رشد سریع آن شد.

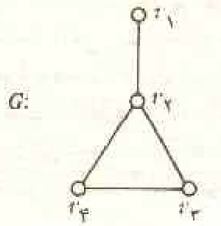
## ۲. چند مقوله

در این قسمت پس‌از معرفی انواع گراف به‌طور خلاصه به ذکر چند مبحث از این نظریه می‌پردازیم، و هرجا که لازم باشد با ارائهٔ مثال یـا نمودار مطلب را تشریح می کنیم. هر چند الزاماً از ارائهٔ تعریف رسمی بسیاری از مفاهیم لازم طفره می‌رویم ولی می کوشیم آنها را روشن سازیم. خواننده می‌تواند برای مطالعهٔ بیشتر به [۱، ۲، یا ۱۳] رجوع کند.

### ۱.۲ انواع گراف

گرچه جهت استاندهکردن اصطلاحات نظریهٔ گرافها کوششهایی به‌عمل آمده است، ولی کلاً در زبان انگلیسی اصطلاحات این نظریه هیچ هماهنگی ندارند. گاه اصطلاحی برای چند مفهوم متفاوت به‌کار می‌رود، و گاه بـرای مفهومی چندیـن اصطلاح دیده می‌شود. خود اصطلاح "گراف" هم از این قاعده مستثنا نیست. در اینجا لازم است بعضی از انواع گرافهایی را که مطرح‌اند معرفی کنیم.

گراف که معمولاً با $G$ نمایش داده می‌شود عبارت است از یك زوج مرتب $(V, E)$ کـه در آن $V$ مجموعه‌ای است ناتهی و متناهی و $E$ مجموعه‌ای است که عناصر آن را زیرمجموعه‌های‌دو عنصری $V$ تشکیل می‌دهند. هرعنصر $V$ را رأس و هرعنصر $E$ را، در صورت وجود، یال $G$ می‌نامیم. مجموعه‌هـای $V$ و $E$ مربوط به‌گراف $G$ را در صورت لـزوم به ترتیب با $V(G)$ و $E(G)$ نمایش می‌دهیم.




**شکل ۷**

به‌عنوان مثال فرض کنید

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$$

دراین صورت $G = (V, E)$ یك گراف است. می‌توان نموداری هم بـرای آن رسم کرد؛ این نمودار درشکل ۷ نمایش داده شده است. شکل ۵ و شکل ۶ نیز نمودارهـایی از این نـوع گراف را نمایش می‌دهند.

در این تعریف اگرمجموعهٔ $V$ را نامتناهی بگیریم گراف حاصل یك گراف نامتناهی نامیده می‌شود و خود انـواع گوناگون دارد. حال اگر در همان تعریف به‌جای "زیرمجموعه‌هـای دوعنصری $V$"، "زوجهایی مرتب از عناصر متمایز $V$" را قرار دهیم تعریف یك گراف جهتدار به‌دست می‌آید. واضح است کـه طبق این تعریف، درگراف جهتدار بین دو رأس مفروض حداکثر دو یال، در دوجهت مخالف، وجود دارد. شکل ۴ نمودار یك گراف جهتدار را به‌نمایش می گذارد. گراف جهتدار عمدتاً در زمینه‌های علوم اجتماعی، روانشناسی، و مردم‌شناسی کاربرد دارد. دراین زمینه، کتاب الگوهای ساختاری: آشنایی بانظریهٔ گرافهای جهتدار [۱۴] توصیه می‌شود.

برمی گردیم به‌تعریف گراف و در آن به‌جای "... $E$ مجموعه‌ای است ..." قرارمی‌دهیم "... $E$ خانواده‌ای است ...". با این تغییر، تکرار یالها مجازمی‌شود ودرنتیجه به‌تعریف چند‌ـ‌گراف دست‌می‌یابیم. شکل ۲ نمودار یك چند‌ـ گراف را نشان می‌دهد. بنا به‌این تعریف، هر گراف یك چند‌ـ گراف هم هست، ولی هرچند‌ـ گراف الزاماً یك گراف نیست؛ بعضی از متخصصین، به‌ویژه آنها که با کاربرد نظریه سروکار دارنـد معمولاً منظورشان از گـراف همین "چند‌ـ گراف" است. چند‌ـ گرافها در زمینه‌های مختلف، از جمله در طرحهای بلوکی، استفادهٔ فراوان دارند [۳].

گاه این سؤال مطرح می‌شود که آیا در تعریف گراف نمی‌توانیم خود را به‌مجموعهٔ $E$ که متشکل از زیرمجموعه‌های دوعنصری $V$ است محدود نکنیم؟ پـاسخ مثبت است و دراین صورت مفهوم ابـرگراف به‌دست می آید. با اینکه مفهوم ابرگراف تعمیمی است ازمفهوم گراف، به‌دلایل مختلف، حتی آنها که ابرگرافها را مطالعه می کنند، درکنار آن، ومقدم بر آن، به‌طورجداگانه به‌بررسی گرافها نیز می پردازند. عنوان کتاب برج، گراف و ابرگراف، [۶] دال بر این مدعاست.

گهگاه وجود طوق نیز درگراف مجازشمرده می‌شود وگاهی هم ترکیبهایی از این مفاهیم، تحت عناوین خاص، مطرح می‌شوند که در این مختصر نمی گنجند. در این مقاله صرفـاً مفهوم سادهٔ گراف را در نظر می گیریم ـ گرافی متناهی که نه‌طوق دارد، نه یال چندگانه دارد، و نه‌جهتی روی یالها منظور می‌شود؛ و یالها هم زیرمجموعه‌هایی دو عنصری از مجموعهٔ $V$ هستند.

نحوهٔ دیگر تعریف گراف بـا استفاده از ماتریس است. گراف چهاررأسی راکه درشکل ۷ نمایش دادیم می‌توانیم به‌صورت ماتریس زیرهم تعریف کنیم. اگر $G$ داده شده باشد و باکمك آن با روش زیر

1. *Journal of Combinatorical Theory*
2. *Journal of Graph Theory*

ماتریس $A(G)=[a_{ij}]$ را به‌دست آوریم، در این صورت ماتریس $A(G)$ را ماتریس مجاورت رأسی یا به‌طور ساده ماتریس مجاورت گراف $G$ می‌نامیم. نحوهٔ به‌دست آوردن این ماتریس این است که ستونها را از چپ به‌راست و سطرها را از بالا به‌پایین با نشانهای $v_1$، $v_2$، $v_3$ و $v_4$ مشخص می‌کنیم. درایهٔ $a_{ij}$ را یك می‌گیریم هرگاه $v_iv_j \in E$، و در غیر این صورت آن را برابر با ۰ می‌گیریم؛ $0, 1 \in \mathbf{R}$.

$$A(G)=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

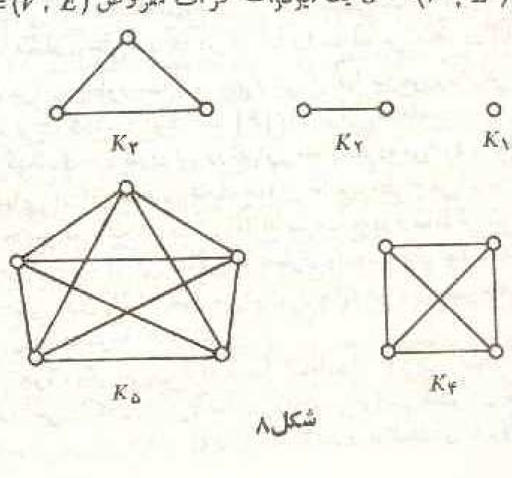
این ماتریس در حالت کلی ماتریسی است $p\times p$، $p=|V|$، ومتقارن که درایه‌های آن تنها از ۰ یا ۱ تشکیل می‌شوند، و درایه‌های روی قطر اصلی آن صفرند. برعکس هرماتریسی که دراین شرایط صدق کند خود یك گراف است. پس می‌توان گفت که گراف چیزی جز یك ماتریس خاص نیست. استفاده از این ماتریس عامل بسیار مؤثری در تعیین برخی از ویژگیهای گراف است. به‌عنوان مثال طیف گراف، که همان مجموعهٔ ویژه‌مقدارهای ماتریس مجاورت آن است، در این رشته که هنوز فاقد ابزارهایی قوی برای اثبات قضایاست، مفهوم فوق‌العاده مفیدی است. برای مطالعهٔ این جنبه که معمولاً نظریهٔ جبری گرافها نامیده می‌شود به [۷، ۹، و ۲۷] رجوع کنید.

## ۲.۲ مسالهٔ رمزی

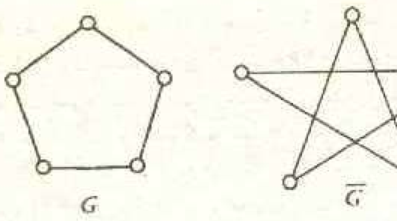
برای یك مهمانی دست کم چند نفر دعوت کنیم تا دست کم سه نفر دوبه‌دو یکدیگر را نشناسند یا دست کم سه نفر دو به‌دو یکدیگر را بشناسند؟ در اینجا فرض بر این است که شناسایی رابطه‌ای است دوطرفه. فرانك رمزی در سال ۱۹۳۰ در مقاله‌ای تحت عنوان "مسأله‌ای از منطق صوری" به‌زبان مجموعه‌ها مسأله‌ای را مطرح کرد که حالت بسیار خاص آن در بالا ذکر شد [۲۳]. این مقاله توسط پال اردیش به‌نظریه‌ای تبدیل شد که به‌نظریهٔ رمزی معروف است [۱۶].

منظور از گراف کامل $K_p$ با $p$ رأس، گرافی است که $p$ رأس و $p(p-1)/2$ یال داشته باشد. شکل ۸ نمودار پنج گراف کامل را نشان می‌دهد. $K_3$ را مثلث نیز می‌نامند.

مکمل گراف $G$ که با $\bar{G}$ نمایش داده می‌شود گرافی است با $V(\bar{G})=V(G)$ که در آن $uv\in E(\bar{G})$ اگر و تنها اگر $uv\notin E(G)$. گراف $G'=(V', E')$ یك زیرگراف گراف مفروض $G=(V, E)$




شکل ۸




شکل ۹

است هرگاه $V'\subseteq V$، و $E'\subseteq E$. اگر زیرگراف $G'$ از $G$ چنان باشد که $V'=V$، در این صورت $G'$ را یك زیرگراف گستردهٔ $G$ می‌نامند.

دوعدد طبیعی $m$ و $n$ داده شده‌اند. عدد رمزی $R(m, n)$ کوچکترین عدد صحیح مثبتی است چون $p$ که هر گراف $G$ با $p$ رأس دارای زیرگراف $K_m$ باشد یا مکملش $\bar{G}$ دارای زیرگراف $K_n$ باشد. واضح است که $R(m, n)=R(n, m)$. با استقرا به $m+n$ می‌توان ثابت کرد که $R(m, n)$ همواره وجود دارد وهیچگاه از $\binom{m+n-2}{m-1}$ تجاوز نمی‌کند.

به‌سادگی می‌توان نشان داد که $R(1, n)=1$، و $R(2, n)=n$. به‌جز این مقادیر می‌دانیم که

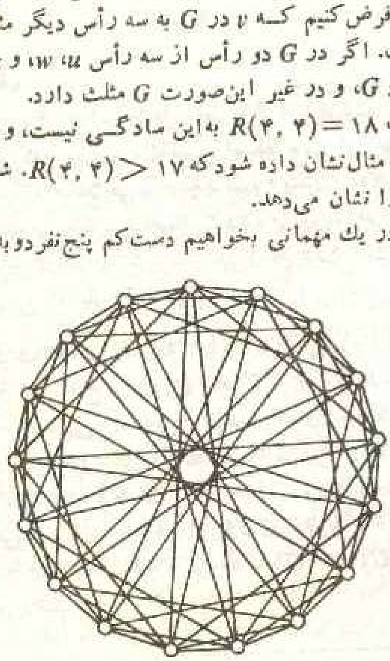
$$R(3, 3)=6 \qquad R(3, 4)=9$$
$$R(3, 5)=14 \qquad R(3, 6)=18$$
$$R(3, 7)=23 \qquad R(4, 4)=18$$

مثلاً برای اینکه ببینیم $R(3, 3)=6$، اول نشان می‌دهیم گرافی با ۵ رأس وجود دارد که نه خودش مثلث دارد و نه مکملش. نمودار این گراف در شکل ۹ رسم شده است.

حال ثابت می‌کنیم که هر گراف $G$ با ۶ رأس یا خودش مثلث دارد یا مکملش. فرض می‌کنیم $v$ یکی از این ۶ رأس باشد. چون $G=\bar{\bar{G}}$، می‌توانیم فرض کنیم که $v$ در $G$ به سه رأس دیگر مثلاً $u$، $w$، و $z$ وصل است. اگر در $G$ دو رأس از سه رأس $u$، $w$، و $z$ به‌هم وصل باشند خود $G$، و در غیر این‌صورت $\bar{G}$ مثلث دارد.

اثبات $R(4, 4)=18$ به‌این سادگی نیست، ولی بازهم لازم است با یك مثال نشان داده شود که $R(4, 4)>17$. شکل ۱۰ نمودار این مثال را نشان می‌دهد.

اگر در یك مهمانی بخواهیم دست کم پنج نفر دوبه‌دو با هم آشنا



شکل ۱۰

باشند یا دست‌کم پنج نفر دو‌به‌دو یکدیگر را نشناسند، مینیمم تعداد مدعوان چقدر است؟ جواب از ۵۵ بیشتر و از ۴۲ کمتر نیست. به‌عبارت دیگر: با اینکه بیش از بیست سال است می‌دانیم که

$$42 \leqslant R(5,5) \leqslant 55$$

ولی تا به حال کسی موفق به‌یافتن مقدار دقیق $R(5,5)$ نشده‌است. گراهام یکی از پیشتازان این رشته که کتابی تحت همین‌عنوان نیز نوشته است [۱۲]، و مسلماً از قدرت خیره‌کنندهٔ کامپیوترهای امروزی حتی ابرمکعبها[1] هم بی‌خبر نیست معتقد است که دست‌کم تا صد سال دیگر هیچ کس نمی‌تواند $R(5,5)$ را بیابد.

به‌طور کلی می‌توان نشان داد که

$$\sqrt{2} < (R(n,n))^{1/n} < 4$$

نابرابری سمت راست از این واقعیت نتیجه می‌شود که

$$R(n,n) \leqslant \binom{2n-2}{n-1} < 4^n$$

برای اثبات نابرابری سمت چپ می‌توان از روش احتمالاتی استفاده کرد. در نظریهٔ گرافها استدلال احتمالاتی اول‌بار در مورد این‌مسأله به‌کار گرفته شده، و مبتکر آن پال اردیش است. ایدهٔ اصلی در این نحوهٔ استدلال بدین شرح است.

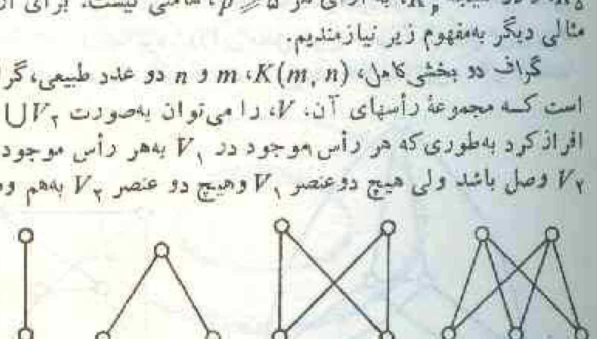
> برای اینکه ثابت کنیم گرافی با $n$ رأس و با یك ویژگی خاص وجود دارد، ابتدا تعداد گرافهای با $n$ رأس‌را که فاقد آن ویژگی‌خاص هستند تخمین می‌زنیم. سپس ثابت می‌کنیم که این عدد از تعداد کل گرافهای با $n$ رأس قطعاً کمتر است.

البته‌این روش ما را در پیدا‌کردن گراف مورد نظر یاری نمی‌کند و معمولاً بهترین نتیجهٔ ممکن را هم به‌دست نمی‌دهد. اما در موارد بسیاری که روشهای دیگر عاجز می‌مانند، این روش راه را می‌گشاید.

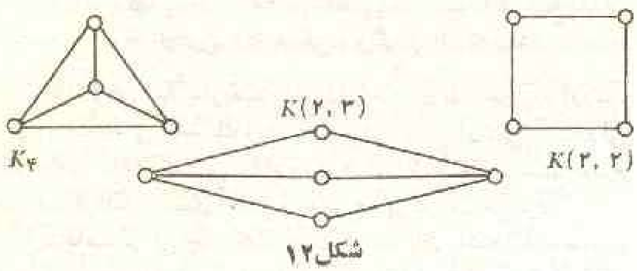
### ۳.۲ گراف هامنی و ضخامت گراف

گرافی چون $G$ را هامنی نامیم هرگاه بتوانیم نمودار آن را روی صفحه (یا به‌طور معادل روی کره) طوری رسم کنیم که خطهای متناظر با یالهای $G$ به‌جز در نقاط متناظر با رأسهای $G$ یکدیگر را قطع نکنند. به‌عنوان مثال گرافهای $K_p$، $1 \leqslant p \leqslant 4$، همگی هامنی‌اند، حال آنکه $K_5$، و در نتیجه $K_p$، به ازای هر $p \geqslant 5$، هامنی نیست. برای ارائهٔ مثالی دیگر به‌مفهوم زیر نیازمندیم.

گراف دو بخشی کامل، $K(m,n)$، $m$ و $n$ دو عدد طبیعی، گرافی است که مجموعهٔ رأسهای آن، $V$، را می‌توان به‌صورت $V_1 \cup V_2$ افراز کرد به‌طوری که هر رأس موجود در $V_1$ به‌هر رأس موجود در $V_2$ وصل باشد ولی هیچ دو عنصر $V_1$ و هیچ دو عنصر $V_2$ به‌هم وصل نباشند. چنین گرافی الزاماً بیش از یك رأس دارد. در شکل ۱۱ چهار گراف دوبخشی کامل نمایش داده شده‌اند که همگی هامنی‌اند. اما $K(3,3)$ هامنی نیست.




شکل ۱۱




شکل ۱۲

توجه کنید که $K_4$، $K(2,2)$، و $K(2,3)$ را طبق شکل ۱۲ نیز می‌توان نمایش داد و لذا این گرافها همگی هامنی‌اند.

(البته‌وقتی نمودار یك گراف هامنی را روی صفحه رسم می‌کنیم مجبور نیستیم تنها از خط مستقیم استفاده کنیم. با این وجود می‌توان ثابت کرد که در مورد گرافهای هامنی این کار هم شدنی است.)

برای اینکه ثابت کنیم $K(3,3)$ هامنی نیست ابتدا قضیهٔ اویلر را ذکر می‌کنیم که اثباتش به‌استقرا بر $q$ است.

> اگر $G$ یك گراف هامنی همبند با $p$ رأس و $q$ یال باشد، و اگر تعداد نواحی حاصل از "جادادن" $G$ در صفحه برابر با $r$ باشد، آنگاه

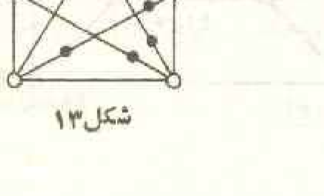
$$p - q + r = 2$$

پس در مورد یك گراف هامنی مفروض، تعداد نواحی بستگی به‌نحوهٔ جادادن آن در صفحه ندارد. حال فرض می‌کنیم $K(3,3)$ هامنی باشد؛ آن را در صفحه جا می‌دهیم، و تعداد نواحی را $r$ می‌نامیم. بنا به‌قضیهٔ اویلر، $r = 5$. چون $K(3,3)$ مثلث ندارد، هریك از نواحی $r$ گانه با دست‌کم چهار یال محدود می‌شود. تعداد یالهایی که هر ناحیه را محدود می‌کنند به‌دست می‌آوریم، و مجموع آنها را برای همهٔ نواحی $N$ می‌نامیم. واضح است که $N \geqslant 4r$. چون در $N$ هر یالی دوبار به‌حساب می‌آید و تعداد یالهای $K(3,3)$ نه است، داریم $N = 18$. پس $r \leqslant 9/2$، که محال است.

یکی از مسائل مهم همهٔ شاخه‌های ریاضیات "مشخص کردن" ساختارهای خاص آن است. مشخص کردن گرافهای هامنی، یعنی‌یافتن "شرایطی لازم و کافی" برای اینکه گرافی هامنی باشد، از سالها پیش مورد توجه بوده است. برای بیان یکی از این قضایا به‌مفهوم زیر نیاز داریم.

هرگاه روی بعضی از یالهای $K_5$ یا $K(3,3)$ "چند رأس اضافه کنیم" گراف حاصل را یك گراف کوراتوفسکی می‌نامیم. واضح است که $K_5$ و $K(3,3)$ خود گرافهای کوراتوفسکی‌اند؛ گرافی که نمودارش در شکل ۱۳ رسم شده نیز از این نوع است. هیچ‌یك از گرافهای کوراتوفسکی هامنی نیستند، زیرا نه $K_5$ هامنی است، و نه $K(3,3)$.

بهترین آزمون شناخته شده برای هامنی بودن گرافها را کوراتوفسکی در سال ۱۹۳۰ ارائه کرده است.



شکل ۱۳

1. Hypercubes

گرافی چون $G$ هامنی است اگر و تنها اگر هیچ‌یك از گرافهای کوراتوفسکی زیرگرافی از $G$ نباشد.

حال فرض کنید بخواهیم گرافی را به‌صورت مدارچاپی درآوریم. اگر گراف هامنی باشد یك ورق عایق برای چاپ آن کافی است؛ ولی اگر هامنی نباشد، کمترین تعداد ورق عـایق لازم چقدر است؟ مفهوم ضخامت گراف برهمین اساس و به‌شرح زیر تعریف می‌شود.

ضخامت گرافی چون $G$ که دست‌کم یك یال داشته باشد، عبارت است ازمینیمم تعداد زیرگرافهای گسترنده وهامنی گراف $G$ که دوبه‌دو هیچ یال مشترك نداشته باشند و "مجموع یالی" آنها برابر با $G$ باشد. ضخامت $G$ با $\theta(G)$ نمایش داده‌می‌شود؛ $\theta(G)=1$ اگر وتنها اگر $G$ هامنی باشد. یافتن این پارامتر در حالت کلی‌مسألهٔ بسیارمشکلی‌است. دراین گونه موارد ناچار رده‌های خاصی‌ازگرافها را درنظرمی‌گیرند و پارامتر موردنظر را برای عناصر این رده‌ها محاسبه می‌کنند. چنین رده‌هایی درنظریهٔ گرافها فراوان‌اند ـ ردهٔ گرافهای‌کامل، ردهٔ گرافهای دو بخشی‌کامل، ردهٔ درختان، ... اثبات شده است که

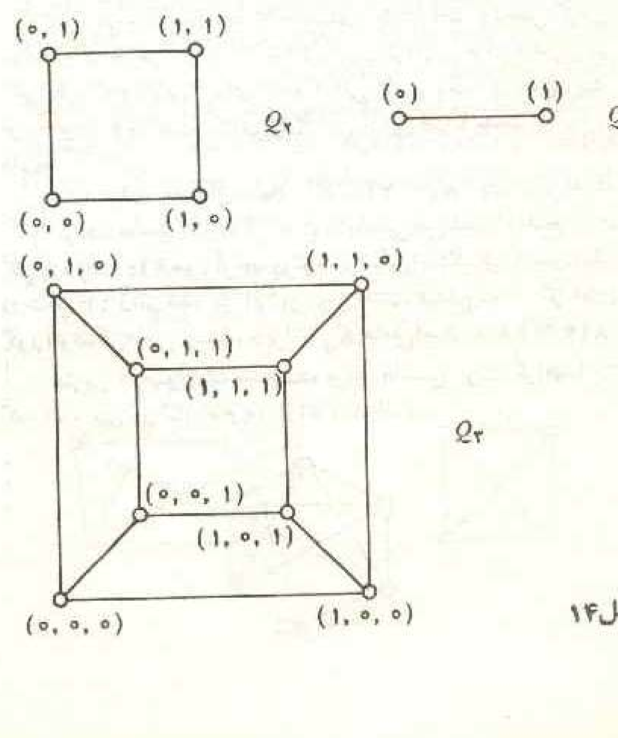
$$\theta(K_p)=\begin{cases}\lfloor(p+7)/6\rfloor, & p\neq 9,10\\ 3, & p=9,10\end{cases}$$

($\lfloor x\rfloor$ بزرگترین عدد صحیحی است که از $x$ بیشتر نیست.) در مورد ضخامت گرافهای دوبخشی‌کامل‌تنها چند نتیجهٔ جزئی به‌دست آمده‌است. ضخامت ردهٔ خاص‌دیگری از گرافها، موسوم به‌ابرمکعبها، هم به‌دست آمده است که به‌علت اهمیت بسیار این رده ازگرافها در سخت‌افزار کامپیوتر ذیلاً به‌شرح آن می‌پردازیم. (فرانك هراری مشغول تألیف کتابی‌در زمینهٔ ابرمکعبهاست که امیدمی‌رود‌درسال ۱۹۸۹ منتشر شود.)

فرض کنید عددطبیعی‌$n$ داده شده باشد. $n$-مکعب که با $Q_n$ نمایش داده می‌شود؛ گرافی است که رأسهایش با $n$-تاییهای مرتب و متمایز $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$، $a_i\in\{0, 1\}$، مشخص می‌شونـد، و در آن دو رأس به‌هم وصل‌اند اگر و تنها اگر $n$-تاییهای متناظرشان دقیقاً در یك موضع‌متفاوت‌باشند. درشکل ۱۴ نمودارسه $Q_n$ به‌نمایش گذاشته شده‌است. اثبات شده است که

$$\theta(Q_n)=\lceil(n+1)/4\rceil$$

($\lceil x\rceil$ کوچکترین عدد صحیحی است که از $x$ کمتر نیست.)




شکل ۱۴

### ۴.۲ عدد تلاقی گراف

بازهم به‌گراف هامنی برمی‌گردیم. بدیهی‌است که اگر $G$ هامنی‌نباشد، به‌هرنحوکه نمودارآن روی صفحه رسم شود بعضی از یالها درنقاط غیرمجاز با هم تلاقی می‌کنند. عدد تلاقی $G$ که با $\nu(G)$ نمایش داده می‌شود، مینیمم تعداد تلاقیهای پاره‌خطهای بازمتناظر با یالهای $G$ در بین تمام نمودارهایی است کـه روی صفحه، $G$ را نمایش می‌دهند. در رسم این نمودارها رعایت شرایط زیر الزامی است.

۱. هیچ خطی نباید با خودش تلاقی داشته باشد.
۲. دو خط باز مجاور نباید تلاقی داشته باشند.
۳. دوخط غیرمجاورومجازند حداکثر یك‌بار تلاقی کنند.
۴. هیچ خط بازی نمی‌تواند نقطهٔ متناظر هیچ رأسی را شامل باشد.
۵. هر نقطهٔ دلخواه صفحه می‌تواند محل تلاقی حداکثر دوخط باشد.

$\nu(G)=0$ اگر و تنهـا اگر $G$ هامنی باشد. وضع تعیین $\nu(G)$ از وضع $\theta(G)$ به‌هیچ‌وجه بهتر نیست. مثلاً می‌دانیم که

به‌ازای هر $p$ با شرط $1\leqslant p\leqslant 10$ داریم:

$$\nu(K_p)=\frac{1}{4}\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p-2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p-3}{2}\right\rfloor$$

حدس ریچارد گای این است که این فرمول به‌ازای جمیع مقادیر $p$ درست است. همچنین می‌دانیم که

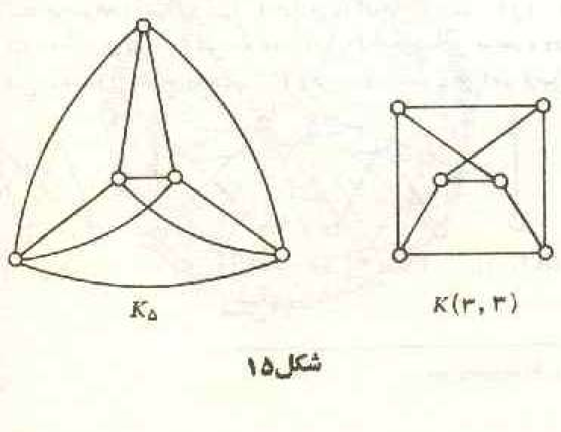
به‌ازای $m$ و $n$ با شرط $1\leqslant\min\{m, n\}\leqslant 6$ داریم:

$$\nu(K(m, n))=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$$

چـــون $K_5$ و $K(3, 3)$ هـامنـی نیستنـد، $\nu(K_5)\geqslant 1$ و $\nu(K(3, 3))\geqslant 1$. شکل ۱۵ نشان می‌دهد که تساوی درهردو مورد برقرار است.

مسألهٔ تعیین $\nu(K(m, n))$ سرگذشت جالبی‌دارد که به‌جنگ دوم جهانی برمی‌گردد. توران دریادداشت تبریکی به‌مناسبت آغاز انتشار مجلهٔ نظریهٔ گرافها [۲۶] چنین می‌نویسد:

"دریك کارخانهٔ آجرسازی نزدیك بوداپست کارمی‌کردیم. در آنجا چند کورهٔ آجرپزی بـود و چند انبار بـرای انبارکردن آجر. بین تمام کوره‌ها وانبارها را ریل کشیده بودند وآجرها را باید باچرخ‌دستی‌ازکوره به‌انبارحمل می‌کردیم ... تنها اشکال موجود مربوط به محل تلاقی ریلها بود. دراین محل چرخ معمولاً از ریل می‌پرید و سبب افتادن آجرهـا می‌شد. خلاصه، این اشکال زحمت




شکل ۱۵

زیادی ایجاد می‌کرد، و وقتی را که برای همهٔ ما پر بها بود تلف می‌نمود. در این زمـان همه عرق می‌ریختیم و فحش می‌دادیم ــ من هم مستثنا نبودم. روزی به‌این فکر افتادم که اگر تعداد تلاقی ریلها مینیمم بود، اتلاف وقت کم می‌شد. امـا، این عدد را چگونـه می‌توان به‌دست آورد؟..."

کلاً مسألهٔ تعیین عدد تلاقی گراف یکی از مسائل بسیار مشکل و حل نشدهٔ نظریهٔ گرافهاست.

## ۵.۲ اعداد فامی

به‌هر گراف $G$ اعـداد فامی متعددی می‌توان نسبت داد. قدیمیترین و معروفترین آنها، عدد فامی رأسی یا به‌طور ساده عدد فامی است که با $\chi(G)$ نمایش داده می‌شود و آن کمترین تعـداد زیـر مجموعه‌های "مستقل" $V$ است که $V$ را افراز می‌کنند. به‌عبارت دیگر $\chi(G)$ برابر است با کمترین تعداد رنگهای لازم جهت "رنگ‌آمیزی" رأسهای $G$ به‌طوری که هیچ دو رأس مجاور رنگ یکسان نداشته باشند. واضح است که

همواره $\chi(K_p)=p$، و $\chi(K(m,n))=۲$.

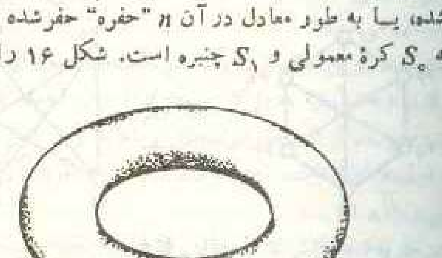
طبیعی است کـه اگر ثابت شود که به‌ازای هر گراف هامنی $G$، $\chi(G)\leqslant ۴$، حدس چهار رنگ به‌قضیهٔ چهار رنگ بدل می‌شود.

حدس چهار رنگ درطول حیات طولانی خود چندین‌بار ظاهراً به‌صورت قضیه درآمده ولی هربار، گاهی پس از گذشت چندین سال بازهم به حدس تبدیل شده، و سرسختانه مقاومت کرده است. مثلاً در ۱۷ ژوئیه ۱۸۷۹ مجلهٔ نیچر اعلام می‌کند که کمپه[1] به ماجرای چهار رنگ پایان داده است. مقالهٔ کمپه در همان سال انتشار یافت [۱۷] ولی در ۱۸۹۰ هیوود موفق شد در آن اشتباه پیدا کند. وی با کمک همان مقاله ثابت کرد که

اگر گراف $G$ هامنی باشد، آنگاه $\chi(G)\leqslant ۵$.

این مطلب به‌قضیهٔ پنج رنگ معروف است. سپس هیوود مسألهٔ چهار رنگ را که مربوط به رنگ‌آمیزی گرافهای هامنی است تعمیم داد تا شاید گـره گشوده شود. برای معرفی ایـن تعمیم به چند مفهوم تازه نیازمندیم.

منظور از رویهٔ $S_n$، $n=۰, ۱, ۲, \ldots$، از گونای $n$، رویه‌ای است که می‌توان آن را به‌صورت کره‌ای تجسم کرد که به‌آن $n$ "دسته" نصب شده، یـا به طور معادل در آن $n$ "حفره" حفرشده است. واضح است که $S_0$ کرهٔ معمولی و $S_1$ چنبره است. شکل ۱۶ را ببینید.



$S_1$

**شکل ۱۶**

اگر گرافی چون $G$ هامنی باشد می‌گوییم $G$ بر $S_0$ جاپذیر است. تجسم تعمیم این مفهوم درمورد جاپذیری گرافی مانند $G$ بر $S_n$ مشکل نیست. واضح است که اگر $G$ دارای $q$ یال باشد، $G$ بر $S_q$ جاپذیر است. گونای گراف $G$ که با $\gamma(G)$ نمایش داده می‌شود، کوچکترین $n$ی است که $G$ بر $S_n$ جاپذیر باشد. لذا $G$ هامنی است اگروتنها اگر $\gamma(G)=۰$. عدد فامی رویهٔ $S_n$، با نماد $\chi(S_n)$، بزرگترین عدد در بین اعداد فامی تمام گرافهایی است که بر $S_n$ جاپذیرند. حدس چهار رنگ حاکی است که $\chi(S_0)=۴$. هیوود درسال ۱۸۹۰ اثبات کرد که $\chi(S_1)=۷$. وی فکر می‌کرد ثابت کرده است که

(*) به‌ازای هرعدد طبیعی $n$، $\chi(S_n)=\left\lfloor \dfrac{۷+\sqrt{۱+۴۸n}}{۲}\right\rfloor$

اما هفتر درسال ۱۸۹۱ نشان داد هیوود تنها ثابت کرده است که

به‌ازای هر عدد طبیعی $n$، $\chi(S_n)\leqslant\left\lfloor \dfrac{۷+\sqrt{۱+۴۸n}}{۲}\right\rfloor$

گزارهٔ (*) بعدها به‌حدس هیوود دربارهٔ رنگ‌آمیزی نقشه شهرت یافت. اگر در (*) به‌جای "هرعدد طبیعی $n$"، "هرعدد صحیح نامنفی" قرار دهیم، به تعمیم حدس چهار رنگ دست می‌یابیم. این مسألهٔ عظیم را چگونه می‌توان حـل کرد؟ ظاهراً در دو حالت جداگانهٔ $\chi(S_0)$، و $\chi(S_n)$ به‌ازای بقیهٔ $n$ها؛ ابتدا به‌حالت دوم می‌پردازیم.

برای اثبات $\chi(S_1)=۷$ کافی است نشان دهیم گرافی چون $G$ وجود دارد که $G$ بر $S_1$ جاپذیر است و داریم $\chi(G)=۷$. در این مورد $K_7$ نامزد خوبی است. همین روش را در مورد $S_1$، $S_2$، ... نیز می‌توان اعمال کرد. لذا کافی است نشان دهیم که $K_p$ با فرض

$$p=\left\lfloor \frac{۷+\sqrt{۱+۴۸n}}{۲}\right\rfloor$$

بر $S_n$ جاپذیر است. اگر $n$ را برحسب $p$ محاسبه کنیم داریم

$$n=\lceil (p-۳)(p-۴)/۱۲\rceil$$

به‌این ترتیب مسأله برمی‌گردد به‌اثبات قضیهٔ زیر:

به‌ازای هر $p\geqslant ۳$، $\gamma(K_p)=\left\lceil \dfrac{(p-۳)(p-۴)}{۱۲}\right\rceil$

محاسبهٔ گونای گراف درحالت کلی مسألهٔ ساده‌ای نیست. با این وجود رینگل و یانگز در سال ۱۹۶۸ توانستند اثبات فرمول فوق را تکمیل کنند، و بدین‌ترتیب به‌اثبات حدس هیوود دربارهٔ رنگ‌آمیزی نقشه دست یابند. محاسبهٔ گونای گرافهای کامل خود تاریخچهٔ جالب و مفصلی دارد [۲۳ و ۲۷].

از اثبات حدس هیوود هشت سال گذشت. نـاگهان در ۲۱ ماه ژوئن ۱۹۷۶ اپل[1] و هاکن[2] اعـلام کردند که توانسته‌اند بـا کمک کامپیوتر مسألهٔ چهار رنگ را رام کنند. هرچند آنان با زیربنای قوی نظری و استفاده از ۱۲۰۰ ساعت وقت یکی از قویترین کامپیوترهای آن زمان درستی حدس چهار رنگ را اثبات کردند، ولـی هنوز هم عده‌ای در صدد پیدا کردن اثبات تحلیلی آن هستند ــ اثباتی که به‌ما بصیرت بدهد و علل بغرنج بودن این مسألهٔ فریبنده و به‌ظاهرساده را آشکار سازد.

گرچه دربارهٔ $\chi(G)$ مطالب زیادی می‌دانیم ولی نکات نامعلوم نیز فـراوان است. کرانهای بالا و پایین متعددی برای این عدد به‌دست

1. A.B. Kempe

1. K. Appel　2. W. Haken

آمده‌اند که یکی از آنها این است که

به ازای هر گراف $G$، اگر $\lambda(G)$ ماکسیمم ویژه‌مقدارهای $G$ (یعنی ماکسیمم ویژه - مقدارهای ماتریس مجاورت $G$) باشد، آنگاه $\chi(G) \leqslant 1 + \lambda(G)$.

قبل از خاتمهٔ مطلب به‌کاربردی از اعداد فامی اشاره می کنیم. فرض کنید بخواهیم برای امتحانات دانشگاهی که در آن صدها درس عرضه می‌شود و دانشجو مختار و گاه مجبور است از گروههای مختلف درس بگیرد، برنامه‌ای تنظیم کنیم که کل امتحانات در زمان محدودی برگزار شوند. بدیهی است که امتحاناتی می‌توانند به‌طور همزمان برگزار شوند که هیچ دانشجویی در بیش‌از یکی از درسهای مربوط ثبت نام نکرده‌باشد. مسألهٔ تعیین حداقل تعداد جلسات امتحانی را چگونه باید حل کرد؟ به‌هر درس یك رأس نسبت می‌دهیم؛ یال $uv$ را برمی گزینیم هرگاه دست‌کم یك‌دانشجو درهردو درس مربوط به‌رأسهای $u$ و $v$ ثبت نام کرده باشد. عدد فامی گراف حاصل پاسخ مسأله است.

عدد فامی یالی که ارتباط نزدیکی به عدد فامی (رأسی) دارد به طور طبیعی به‌ذهن متبادر می‌شود. عدد فامی یالی گرافی چون $G$ که بـا $\chi_1(G)$ نمایش داده می‌شود مینیمم تعـداد رنگهـای لازم برای رنگ‌آمیزی یالهای $G$ است به طوری که هیچ دو یال مجاور رنگ یکسان نداشته باشند. به‌عنوان مثال

$$\chi_1(K_p)=\begin{cases} p-1 & \text{اگر } p \text{ زوج باشد،} \\ p & \text{اگر } p \geqslant 3 \text{ فرد باشد؛} \end{cases}$$

درجهٔ رأسی چون $v$ از گراف $G$ تعداد همهٔ یالهای موجود در $G$ است که $v$ را شامل‌اند. $\Delta(G)$ بزرگترین درجه دربین تمام درجه‌های رأسهـای $G$ را نـمـایش مـی‌دهـد. مثلاً $\Delta(K_p)=p-1$، $\Delta(K(2,3))=3$، و $\Delta(Q_n)=n$. ویزینگ[1] درسال ۱۹۶۴ اثبات کرده است که

به‌ازای هر گراف $G$ داریم $\Delta(G) \leqslant \chi_1(G) \leqslant 1+\Delta(G)$.

گرافهایی مانند $G$ بـا $\chi_1(G)=\Delta(G)$ را گرافهای از ردهٔ ۱ می‌نامند و سایـر گرافها را از ردهٔ ۲. چه گرافهایی از ردهٔ ۱ و چـه گرافهایی از ردهٔ ۲ هستند؟ به عبارت دیگر شرایط لازم وکافی برای اینکه گرافی از ردهٔ ۱ باشد چیست؟ این مسأله هنوز حل نشده است.

### ۶.۲ مسألهٔ شمارش

جان‌فرالی‌می‌گوید: "هرگزقضیه‌ای راکه چیزی‌رامی‌شمارد دست‌کم نگیرید."

مسألهٔ شمارش کلاً در ریاضیات، به‌ویژه در ترکیبیات، و بالاخص درنظریهٔ گرافها از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است؛ ابزاری است بسیار قوی برای اثبات، و در عین حال مسأله‌ای است بسیار بغرنج. حتی اگر الگوریتمی برای شمارش کمیتی وجود داشته باشد، امروزه مسألهٔ کارابودن آن، ومقایسهٔ الگوریتمهای مربوط مطرح است. برای مطالعهٔ بیشتر و درك اهمیت نقش نظریهٔ گرافهـا در نظریهٔ پیچیدگی محاسبات به [۱۱] رجوع کنید.

دو گراف $G=(V,E)$ و $G'=(V',E')$ یکریخت‌اند هرگاه یك تابع دوسویی چون $f$ از $V$ به $V'$ وجود داشته باشد که $uv \in E$ اگرو تنها اگر $f(u)f(v) \in E'$.

چندگراف نایکریخت با $p$ رأس وجود دارد؟ بـا $p$ رأس و $q$ یال، $0 \leqslant q \leqslant p(p-1)/2$، چندتا؟ چندتا از اینها همبند اند؟ چندتا از ردهٔ ۱ هستند و چندتا از ردهٔ ۲؟ به عنوان مثال با هشت رأس چند گراف نایکریخت وجود دارد؟ (۱۲۳۴۴ تا.) با هشت رأس چند گراف جهتدار نایکریخت وجود دارد. (۱۷۹۳۳۵۹۱۹۲۸۴۷ تا. فراموش نکنید که بین هیچ دو رأسی بیش‌از دو یال وجود ندارد.)

گفته‌اند که در ریاضیات ترکیبیاتـی روشهای شمارشی پیش از اینکه علم باشند، هنر به حساب می آیند؛ ولی باید اعتراف کرد که در این روزها در اثر پیدایش نظریه‌های قوی شمارشی این گفته دیگر چندان مصداق ندارد. دربارهٔ شمارش گرافها مطلب بسیار زیاد است ــ به کتاب تحت همین عنوان [۱۵] رجوع کنید. در بسیاری از این گونه شمارشها نقش اصلی با قضیهٔ شمارشی پولیاست کـه با نظریهٔ گروهها درارتباط نزدیك است و خود مستلزم بحث جداگانه‌ای است.

به چند مفهوم زیر توجه کنید. درخت گرافی است "همبند" که تعداد یالهای آن یکی از تعداد رأسهایش کمتر است. گرافهایی که نمودارشان درشکل ۵ یا شکل ۶ رسم شده همه درخت‌اند. دو گراف $G=(V,E)$ و $G'=(V',E')$ را یکسان نامیم هرگاه $V=V'$، و $E=E'$. دو گراف می‌توانند یکریخت باشند، ولـی یکسان نباشند. مثلاً دو نمـودار شکل ۱۷ هـر چند دو گراف یکریخت را نمایش می‌دهند، یکسـان نیستند؛ زیـرا $V(G)=V(G')$ ولی بـا اینکه $v_1v_5 \in E(G)$؛ $v_1v_5 \notin E(G')$.

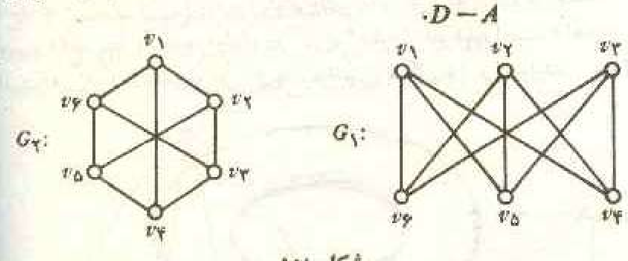
همان‌طور کـه در بخش ۴.۱ ذکر شد کار کیلی در شیمی آلی به‌شمارش‌مربوط می شود. صورت قضیهٔ درختی کیلی به‌شرح زیر است:

تعداد درختهای نایکسان با $p$ رأس برابراست‌با $p^{p-2}$.

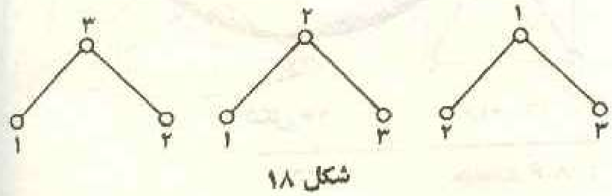
به‌عنوان‌مثال اگر $p=3$ طبق شکل ۱۸ سه درخت نایکسان‌وجود دارد، حال آنکه با سه رأس تعداد درختهای نایکریخت یك است.

یکی ازکارهای کیرشهف (به‌بخش ۲.۱ رجوع کنید) هم به‌مسألهٔ شمارش مربوط است. گرافی چون $G$ با $p$ رأس را نشاندار می‌نامیم هرگاه هر یك از رأسهایش با یکی از $p$ نشان متمایز دلخواه، فرضاً $v_1$، $v_2$، ...، $v_p$، به‌طور یك به یك مشخص شده بـاشد. مـاتریس درجات چنین گرافی را کـه با $D=[d_{ij}]$ نمایش می‌دهند مـاتریسی $p\times p$ است که در آن $d_{ii}$، $1 \leqslant i \leqslant p$، برابر است با درجهٔ رأس $v_i$، و $d_{ij}=0$ هرگاه $i \neq j$. قضیهٔ کیرشهف به‌شرح زیر است:

اگر $G$ با $p \geqslant 2$ رأس، گراف نشانداری بـاشد، و اگر ماتریس مجاورت آن با $A$ و ماتریس درجاتش با $D$ مشخص شود، آنگاه تعداد درختان گسترندهٔ نایکسان $G$ برابر است بـا مقدار هریك از همعاملهای ماتریس $D-A$.




شکل ۱۷




شکل ۱۸

1. V. G. Vizing

حال قضیه را با مثال مذکور درشکل ۷ تشریح می کنیم. ماتریس $A$ قبلاً داده شده است. ماتریس $D$ برابر است با

$$D=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

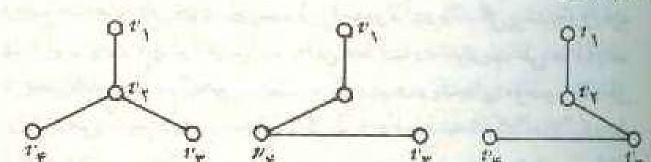
و لذا داریم

$$D-A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۳ & -۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

همعامل درایهٔ جنوب‌شرقی این ماتریس برابر است با

$$(-۱)^{۴+۴}\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{vmatrix}=۳$$

در شکل ۱۹ نمودار تمام درختان گسترندهٔ نایکسان گراف مزبور داده شده است.



شکل ۱۹

## کلام آخر

نظریهٔ گرافها شاخه‌ای از ریاضیات است که در رشته‌های بسیاری کاربرد دارد. ترینائستیك در مقدمهٔ فصل اول جلد I کتاب خود می‌نویسد: "نظریهٔ گرافها با نظریهٔ ماتریسها، نظریهٔ گروهها، نظریهٔ مجموعه‌ها، احتمال، ترکیبیات، آنالیزعددی، و توپولوژی در ارتباط است. ازآن در زمینه‌های متفاوتی چون اقتصاد و فیزیك نظری؛ روانشناسی و فیزیك اتمی؛ زیست‌شناسی و زبان‌شناسی، علوم اجتماعی و جانورشناسی، مهندسی و مردم‌شناسی، علوم کامپیوتر و جغرافیا، و غیره استفاده می‌شود."

مقتضیات نوین تکنولوژی مسائل جدید یا صورتهای جدیدی از مسائل قدیم ریاضی را درمرکز توجه قرار داده است که بسیاری از آنها به‌صورت گراف فرمولبندی می‌شوند (از قبیل نحوهٔ گردش پیامها، توزیع اطلاعات، رمزنگاری و . . .) ونظریهٔ گرافها به‌بررسی آنها می‌پردازد.

این‌نظریه‌وجه اشتراك فراوانی با هندسهٔ اقلیدسی‌دارد، و شباهت آن با نظریهٔ اعداد نیز زیاد است. برای حل مسائل‌آن به‌قدرت‌تجسم فضایی قوی نیاز است، و لذا آموزش آن قدرت تجسم را پرورش می‌دهد. بسیاری از مسائل آن درخور فهم دانش‌آموزان دبیرستانها هم هست. با همهٔ این ملاحظات، بسیاری از متخصصین ورود آن را به‌برنامه‌های درسی دبیرستانها بعید نمی‌بینند.

مسائل آن سهل و ممتنع‌اند؛ وکلاً راههای استاندهای برای‌حل آنها کشف نشده است. این رشته مملو از مسائل حل نشده‌ای است‌که غالباً روی می‌نمایند، دل می‌برند، ولی به‌سختی‌تسلیم می‌شوند. به‌طور کلی، سادگی صورت مسائل و دشواری حل آنها یکی از ویژگیهای بارز نظریهٔ گرافهاست.

کلام آخراینکه، نظریهٔ گرافها سرزمینی‌است با چشم‌انداز گسترده و قلمروهای کشف نشدهٔ بسیار که کاوشگران را به‌سوی خود می‌خواند.

مراجع

1. Behzad M., Chartrand G., *Introduction to Theory of Graphs*, Allyn & Bacon, Boston (1971).
2. Behzad M., Chartrand G., Lesniak L., *Graphs and Digraphs*, Prindle, Weber & Schmidt (1979).
3. Behzad M., Mahmoodian E.S., "Graphs versus designs- a quasi-survey," Proceedings of the Sixth International Conf. on the Theory and Appl. of Graphs, Wiley (to be Published).
4. Bellman R., Cooke K.L., Lockett J., *Algorithms, Graphs, and Computers*, Academic Press (1970).
5. Berge C., *Theorie des Graphes et ses Applications*, Dunod, Paris (1958).
6. Berge C., *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland (1973).
7. Biggs N., *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press (1974).
8. Cayley A., "On the theory of the analytical forms called trees," *Philos. Mag.*, **13**, (1857) 19-30.
9. Cvetkovic D. M., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs*, Academic Press (1980).
10. Euler L., "Solutio problematis od geometriam situs pertinentis," *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae*, **8** (1736) 128-140.
11. Garey J. M. R., Johnson D. S., *Computers and Intractability*, W. H. Freeman & Company (1980).
12. Graham R. L., Rothchild B. L., Spencer J. H., *Ramsey Theory*, Wiley (1980).
13. Harary F., *Graph Theory*, Addison-Wesley (1969).
14. Harary F., Norman R.Z., and Cartwright D., *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*, Wiley (1965).
15. Harary F., Palmer E. M., *Graphical Enumeration*, Academic Press(1973).
16. Hoffman P., "The man who loves only numbers," *The Atlantic Monthly*, (November 1987) 60-74.
17. Kempe A. B., "On the geographical problem of the four colors," *Amer. J. Math.*, **2** (1879) 193-200.
18. Kirchhoff G., "Über die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer ströme geführt wird," *Ann. Phys. Chem.* **72** (1847) 497-508.
19. König D., *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Leipzig (1936).
20. Ore O., *Theory of Graphs*, Amer. Math. Soc. Collog. Publ. **38** (1962).
21. Ore O., *The Four-Color Problem*, Academic Press (1967).
22. Ramsey F., "On a problem of formal logic," *Proc. London Math. Soc.*; **30** (1930) 264-286.
23. Ringle G., *Map Color Theorem*, Springer-Verlag (1974).
24. Seshu S., and Read M. B., *Linear Graphs and Electrical Networks*, Addison-Wesley (1961).
25. Trinajstic N., *Chemical Graph Theory*-vols. I & II, CRC Press Inc. Boca Raton, Florida (1983).
26. Turan P., "A note of welcome," *Journal of Graph Theory*, **1** (1977) 7-9.
27. White A. T., *Graphs, Groups, and Surfaces*, North-Holland (1973).