منطق ریاضی ۴

حمیدرضا امیری

اشاره: در شماره‌ی قبل با قوانین بین گزاره‌ها و ترکیب‌های فصلی، عطفی، شرطی و دوشرطی آشنا شدیم، و با طرح و حل چند هم‌ارزی، کاربرد آن‌ها را در اثبات هم‌ارزی‌ها مشاهده کردیم. در این مقاله پس از اثبات چند هم‌ارزی مهم، به معرفی گزاره‌نماها و گزاره‌های سوری خواهیم پرداخت.

قرارداد: در منطق ریاضی، گزاره‌ی شرطیِ همیشه درست را «استلزام منطقی» می‌نامند.

مثال ۱. ثابت کنید، گزاره‌ی شرطی $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ یک استلزام منطقی است.

حل:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv [(\sim p \vee q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv (q \wedge p) \Rightarrow q$$

$$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow q \equiv \sim (p \wedge q) \vee q \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee q$$

$$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee q) \equiv \sim p \vee T \equiv T$$

مثال ۲. ثابت کنید:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \equiv \sim (p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

تمرین: ثابت کنید، ترکیب شرطی از چپ در تمام ترکیب‌ها توزیع‌پذیر است؛ یعنی:

I) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

II) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

III) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

IV) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

مثال ۳. ثابت کنید: $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

حل:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv \sim (p \vee q) \vee r \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee r$$

$$\equiv (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

تمرین: ثابت کنید:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$$

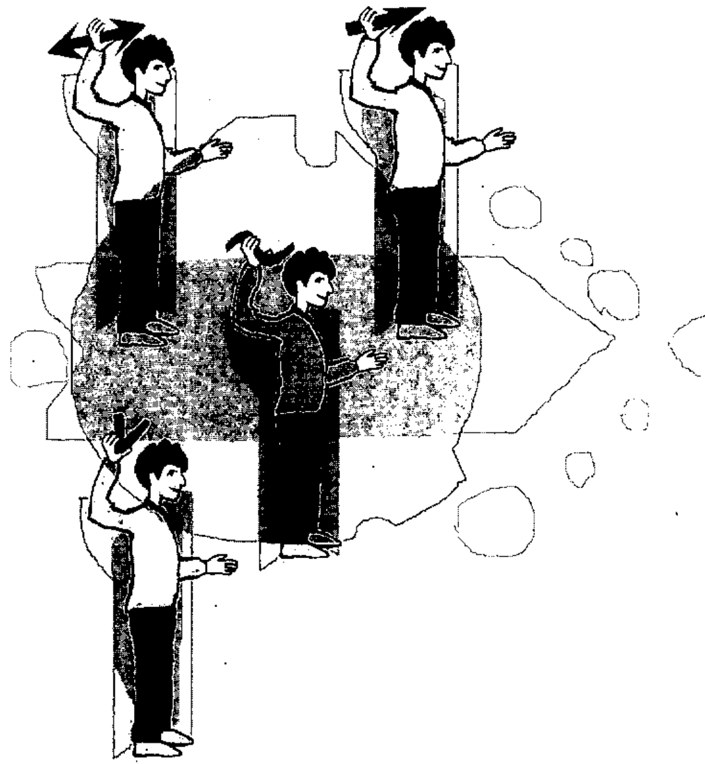
در این قسمت به تعریف گزاره‌نما و مطالب مربوط به دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب یک گزاره‌نما می‌پردازیم تا زمینه‌ای برای تعریف و معرفی سورها و گزاره‌های سوری فراهم شود.

تعریف گزاره‌نما: هر عبارت خبری که دارای یک یا چند متغیر باشد (به طوری که نتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم)، گزاره‌نما نامیده می‌شود. مثلاً: «x عددی زوج است»، یا: «y عددی اول و z عددی منفی است»، هرکدام یک گزاره‌نما هستند.

سؤال: آیا عبارت $x^2 - 4 = 0$ گزاره‌نماست؟

جواب: بله، این عبارت گزاره‌نما است، زیرا عبارتی است خبری و دارای متغیر، و نمی‌توان ارزش آن را تعیین کرد. مثلاً اگر به جای x عدد ۲ یا (-2) قرار دهیم، تساوی برقرار و گزاره‌نما به گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود، ولی به ازای هر $x \neq \pm 2$ گزاره‌ای نادرست حاصل می‌شود.

تعریف دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما: مجموعه‌ی مقادیری که مُجازند به جای متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما قرار بگیرند و



گزاره‌نما را به گزاره (چه درست و چه نادرست) تبدیل کنند، دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما نامیده می‌شوند.

مجموعه‌ی جواب گزاره‌نما: زیرمجموعه‌ای از دامنه متغیر که گزاره‌نما را به گزاره‌ی **درست** تبدیل می‌کند، مجموعه‌ی جواب گزاره‌نما نامیده می‌شود.

مثال: دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب را برای گزاره‌نماهای زیر به دست آورید:

I) x عددی فرد است.

II) z عددی طبیعی بین ۴ و ۷ است.

III) y عددی صحیح بین ۲ و ۳ است.

IV) k عددی بین ۱ و ۲ است.

V) $x^{2}-1=0$

VI) $x^{2}-3x+2\geq 0$

حل:

I) چون صفت زوج و فرد فقط برای اعداد صحیح قابل تعریف است، پس (حق نداریم یا مجاز نیستیم، به جای x عدد $\sqrt{2}$ و یا $\frac{1}{2}$ قرار دهیم):

Z = دامنه‌ی متغیر و $2Z+1$ = مجموعه جواب

II) وقتی به صراحت نوع متغیر بیان می‌شود، تعیین دامنه راحت است. در این قسمت چون قید شده، z عددی طبیعی است، پس:

$\mathbb{N}$ = دامنه‌ی متغیر و $\{5,6\}$ = مجموعه‌ی جواب

III) با توجه به توضیح قبل داریم:

Z = دامنه‌ی متغیر و $\varnothing$ = مجموعه‌ی جواب

IV) چون قیدی روی عدد k گذاشته نشده است، پس:

$\mathbb{R}$ = دامنه‌ی متغیر و $\{x\in\mathbb{R} \mid 1<x<2\}=(1,2)$ = مجموعه‌ی جواب

V) در عبارت $x^{2}-1=0$، به جای x هر عدد حقیقی را می‌توان قرار داد؛ پس:

$\mathbb{R}$ = دامنه‌ی متغیر و $\{1,-1\}$ = مجموعه‌ی جواب

IV) باید عبارت $x^{2}-3x+2$ را تعیین علامت کرد، پس:

$\mathbb{R}$ = دامنه متغیر و $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$ = مجموعه‌ی جواب

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^{2}-3x+2$		$+$		$-$		$+$	

سورها

سورها نمادهایی هستند که برای بیان کمیت به کار می‌روند. اگر یک سور در ابتدای یک گزاره‌نما واقع شود، آن گزاره‌نما را به یک گزاره تبدیل می‌کند. به چنین گزاره‌ای «گزاره‌ی سوری» می‌گویند. سورها بر سه دسته‌اند:

سور عمومی: برای عمومیت و کلیت بخشیدن به کار

می‌رود. نماد آن به شکل (∀) است. گزاره‌ی سوری که با سور عمومی بیان شود، زمانی دارای ارزش درست است که دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب گزاره‌نمای آن با هم برابر باشند. این نماد را «به ازای هر»، «برای تمام مقادیر»، «همه‌ی» و «هر» می‌خوانیم.

سور وجودی: برای بیان وجود شیئی یا خاصیتی از این سور، از نماد (∃) استفاده می‌شود. گزاره‌ی سوری که با سور وجودی بیان شود، زمانی دارای ارزش درست است که مجموعه‌ی جواب گزاره‌نمای آن تهی نباشد. این نماد را «وجود دارد»، «به ازای بعضی مقادیر» و «عضوی هست» می‌خوانیم.

سور صفر: برای بیان نبود شیئی یا خاصیتی از این سور، از نماد (∄) استفاده می‌شود. گزاره‌ی سوری که با سور صفر بیان شود، زمانی دارای ارزش درست است که مجموعه‌ی جواب گزاره‌نمای آن تهی باشد. این نماد را «وجود ندارد»، «به ازای هیچ مقدار» و «عضوی نیست» می‌خوانیم.

مثال: ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0$

ب) $\forall x \in \mathbb{N}; x + 1 > 1$

ج) $\exists x \in \mathbb{N}; x + 2 \le 3$

د) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \le 0$

هـ) $\nexists x \in \mathbb{R}; x + 1 < 1$

و) $\nexists x \in \mathbb{Z}; x^2 - 2 = 0$

جواب:

الف) نادرست است، زیرا: $0 \in \mathbb{R}$ و $0^2 \ngtr 0$

ب) درست است، زیرا: $\mathbb{N}$ = دامنه و $\mathbb{N}$ = مجموعه‌ی جواب

ج) درست است، زیرا: مجموعه‌ی جواب = $\{1\} \ne \varnothing$

د) درست است، زیرا: مجموعه‌ی جواب = $\{0\} \ne \varnothing$

هـ) نادرست است، زیرا:

مجموعه‌ی جواب = $\{x \in \mathbb{R} | x < 0\} \ne \varnothing$

و) درست است، زیرا: مجموعه‌ی جواب = $\varnothing$

نقیض گزاره‌های سوری: گزاره‌های سوری $(\forall x, p(x))$ و $(\exists x, p(x))$ و $(\nexists x, p(x))$ را به ترتیب به صورت‌های (تمام xها خاصیت p دارند) و (xای است که خاصیت p دارد) و (وجود ندارد xای که خاصیت p داشته باشد) می‌خوانیم که برای نقیض کردن آن‌ها به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) $\sim(\forall x; p(x)) \equiv (\exists x; \sim p(x))$

(xای هست که خاصیت p ندارد) ≡ (تمام xها خاصیت p دارند) ~

ب) $\sim(\exists x; p(x)) \equiv (\nexists x; p(x))$

(xای نیست که خاصیت p داشته باشد) ≡ (xای هست که خاصیت p دارد) ~

نکته: هر گزاره‌ی سوری عمومی را می‌توان با تغییراتی هم‌ارز با یک گزاره با سور صفر نوشت؛ به این صورت:

$(\forall x; p(x)) \equiv (\nexists x; \sim p(x))$

(xای نیست که خاصیت p نداشته باشد) ≡ (تمام xها خاصیت p دارند)

با توجه به نکته‌ی بالا و قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم که:

$\sim(\exists x, p(x)) \equiv (\nexists x; p(x)) \equiv (\forall x; \sim p(x)) \Rightarrow$

$\sim(\exists x; p(x)) \equiv (\forall x; \sim p(x))$

ج) $\sim(\nexists x; p(x)) \equiv (\exists x; p(x))$

بنابراین، هرگاه بخواهیم برای نقیض کردن گزاره‌ی

سوری با سور عمومی از سور وجودی استفاده کنیم، یا برای نقیض کردن سور وجودی از سور عمومی استفاده کنیم، باید خاصیت بیان شده را نیز نقیض کنیم. ولی در تبدیل عمومی به صفر یا سور صفر به عمومی، با خاصیت بیان‌شده کاری نداریم.

نقیض گزاره‌های سوری با بیش از یک سور

الف) $\sim(\forall x\forall y; p(x,y)) \equiv (\exists x\exists y; \sim p(x,y))$

اثبات:

$$\sim[\forall x(\forall y; p(x,y))] \equiv \exists x \sim(\forall y; p(x,y)) \equiv (\exists x\exists y; \sim p(x,y))$$

ب) $\sim(\exists x\exists y; p(x,y)) \equiv (\forall x\forall y; \sim p(x,y))$

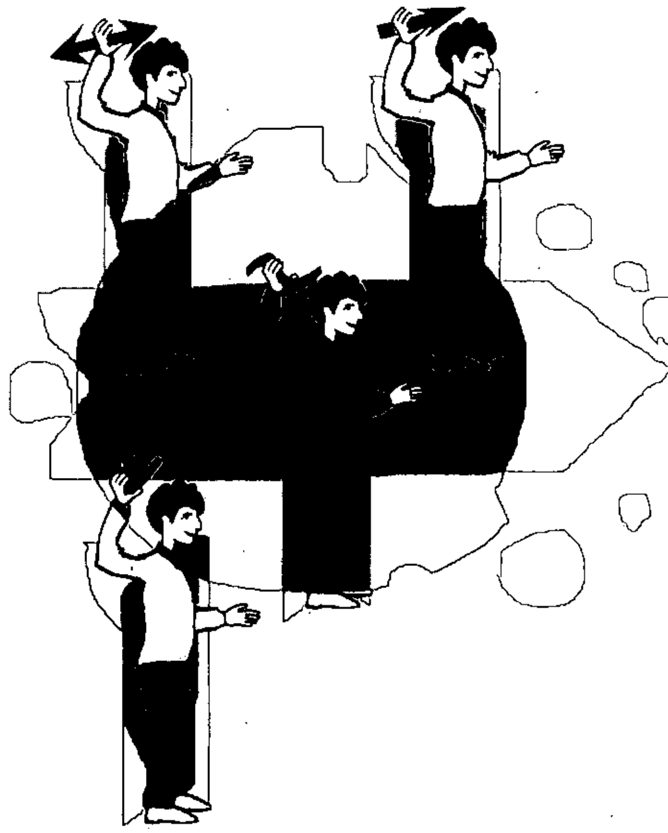
ج) $\sim(\forall x\exists y; p(x,y)) \equiv (\exists x\forall y; \sim p(x,y))$

د) $\sim(\exists x\forall y; p(x,y)) \equiv (\forall x\exists y; \sim p(x,y))$

مثال ۱. نقیض گزاره‌ی زیر کدام است؟

«$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R};\ x > y \Rightarrow y < x \le y+1$»

۱) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ x < y \Rightarrow y+1 < x \le y$



۲) $\forall x \in \mathbb{R},\ \nexists y \in \mathbb{R};\ (x > y) \vee x \le y \vee x > y+1$

۳) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ x > y+1$

۴) $\nexists x \in \mathbb{R};\ \exists y \in \mathbb{R},\ x > y \Rightarrow y < x \le y+1$

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

بنابراین:

$$\sim[x > y \Rightarrow y < x \le y+1] \equiv (x > y) \wedge [x \le y \vee x > y+1]$$

$$\equiv \underbrace{[(x > y \wedge x \le y)]}_{F} \vee [(x > y) \wedge x > y+1]$$

$$\equiv F \vee [x > y \wedge x > y+1] \equiv (x > y) \wedge (x > y+1) \equiv (x > y+1)$$

مثال ۲. نقیض گزاره‌ی زیر کدام است؟

«$\forall x \in \mathbb{R},\ \nexists y \in \mathbb{R};\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2$»

۱) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R};\ x \ne y \Rightarrow x^2 \ne y^2$

۲) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ (x \ne y) \wedge (x^2 = y^2)$

۳) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R};\ (x = y) \wedge (x^2 \ne y^2)$

۴) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2$

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R},\ \nexists y \in \mathbb{R}; x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R} \sim(\nexists y \in \mathbb{R},\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$$

$$\equiv (\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$$

دیدیم که برای نقیض کردن، سور وجودی را به سور صفر، و سور صفر را به وجودی می‌توان تبدیل کرد و خاصیت تغییر نمی‌کند.

استنتاج

استنتاج به معنی نتیجه‌گیری است. در منطق، هرگاه از یک سلسله گزاره‌های درست که آن‌ها را مقدمات استنتاج می‌نامیم، بتوانیم گزاره‌ای درست که آن را نتیجه‌ی استنتاج می‌نامیم، نتیجه بگیریم، به کل چنین اعمالی یک دستگاه استنتاجیِ معتبر گفته می‌شود.

تذکر: زیر هم نوشتن چند گزاره به معنی ترکیبِ عطفی آن‌ها است و در این صورت، از به کار بردنِ نماد «$\wedge$» خودداری می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ r \\ . \\ . \\ \underline{s} \\ \therefore Q \end{array}$$

اگر با فرض درست بودن گزاره‌های p و q و r و... و s بتوانیم ثابت کنیم که گزاره‌ی Q نیز درست است، به چنین شکلی یک دستگاه استنتاجی معتبر یا اصطلاحاً یک استنتاج معتبر گفته می‌شود.

معرفی چند استنتاج معتبر و معروف (قوانین استنتاج)

قانون انتزاع: استنتاج زیر همواره معتبر و به قانون انتزاع معروف است.

(همواره از هر ترکیب شرطی و مقدم آن می‌توان تالی‌اش را نتیجه گرفت.)

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \\ p \\ \therefore q \end{array}}$$

قانون نقیض انتزاع

(همواره از هر ترکیب شرطی و نقیض تالی‌اش می‌توان نقیض مقدمش را نتیجه گرفت.)

$$\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \\ \underline{\quad p \quad} \\ \therefore q \end{array} \equiv \boxed{\begin{array}{c} (\sim q \Rightarrow \sim p) \\ p \\ \therefore q \end{array}}$$

قانون رفع مؤلفه

$$\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \\ \underline{p \quad\quad} \\ \therefore q \end{array} \equiv \boxed{\begin{array}{c} (\sim p \vee q) \\ p \\ \therefore q \end{array}}$$

(از هر ترکیب فصلی و نقیض یکی از مؤلفه‌ها می‌توان مؤلفه‌ی دیگر را نتیجه گرفت.)

مثال:

$$\begin{array}{l} (p \vee r) \\ \underline{\sim p \quad} \\ \therefore\ r \end{array}$$

قانون قیاس: استنتاج زیر همواره معتبر و به قانون قیاس معروف است.

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \\ (q \Rightarrow r) \\ \therefore (p \Rightarrow r) \end{array}}$$

قانون عطف مقدمات: هم‌ارزی زیر به قانون عطف مقدمات معروف است. از این قانون در اثبات هم‌ارزی و استنتاج‌ها استفاده می‌شود.

$$\boxed{p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r}$$

از طرفی: $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (q \wedge p) \Rightarrow r \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

بنابراین: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

مثال ۱: به جای علامت ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا استنتاج زیر معتبر باشد؟

$$\begin{array}{l} (p \wedge \sim r) \Rightarrow q \\ \underline{\quad\quad \sim r \quad\quad} \\ \quad \therefore\ ? \end{array}$$

۱) p ۲) $(r \vee p)$

۳) $(\sim p \vee q)$ ۴) $(q \Rightarrow r)$

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است، زیرا:

$$\begin{array}{l} (p \wedge \sim r) \Rightarrow q \equiv \sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q) \\ \underline{\quad\quad\quad\quad \sim r \quad\quad\quad\quad} \\ \therefore \quad\quad (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \end{array}$$

قانون انتزاع

مثال ۲: گزاره‌ی $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ در کدام حالت همیشه نادرست است؟

۱) p و q درست، r نادرست ۲) p و q نادرست، r درست

۳) p درست، q و r نادرست ۴) p نادرست، q و r درست

جواب: گزینه‌ی (۱) صحیح است، زیرا:

می‌دانیم که $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ بنابراین برای

نادرست بودن ارزش گزاره‌ی $(p\wedge q)\Rightarrow r$ باید مقدم درست و تالی نادرست باشد؛ پس باید p و q هر دو درست باشند و r نادرست باشد.

مثال ۳: گزاره‌ی $\sim p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $(p\vee q)\wedge r$ ۲) $(p\vee q)\vee r$

۳) $(p\vee\sim q)\vee r$ ۴) $(p\wedge q)\wedge r$

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sim p\Rightarrow(\sim q\Rightarrow r)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\Rightarrow r$$
$$\equiv\sim(\sim p\wedge\sim q)\vee r\equiv(p\vee q)\vee r$$

قانون ادخال فاصل: استنتاج زیر همواره معتبر، و به قانون ادخال فاصل معروف است.

$$\boxed{\begin{array}{c} p \\ \therefore p\vee q\end{array}}$$

(از هر گزاره‌ی درست می‌توان ترکیب فصلی آن گزاره با هر گزاره‌ی دلخواه دیگر را نتیجه گرفت.)

مثال ۴: به جای ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا بحث معتبر باشد؟

$$\begin{array}{l} q\Rightarrow\sim r \\ \underline{r\qquad\quad} \\ \therefore\ ? \end{array}$$

۱) $q\Rightarrow p$ ۲) $\sim r\Rightarrow\sim q$

۳) $\sim s\Rightarrow\sim q$ ۴) هر سه گزینه‌ی قبل

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است، زیرا طبق قانون نقیض انتزاع:

$$\begin{array}{l} q\Rightarrow\sim r \\ \underline{r\qquad\quad} \\ \therefore\ \sim q \end{array}$$

طبق قانون نقیض انتزاع

از طرفی

$$\begin{array}{l} \sim q \\ \therefore\sim q\vee r\equiv\sim r\Rightarrow\sim q \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{l} \sim q \\ \therefore\sim q\vee p\equiv q\Rightarrow p \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sim q \\ \hline \therefore\sim q\vee s\equiv\sim s\Rightarrow\sim q \end{array}$$

قانون حذف عاطف: استنتاج زیر همواره معتبر و به قانون حذف عاطف معروف است.

$$\frac{p\wedge q}{\therefore p} \quad \text{یا} \quad \frac{p\wedge q}{\therefore q}$$

(از هر ترکیب عطفی می‌توان هریک از مؤلفه‌هایش را نتیجه گرفت.)

مثال ۵: به جای ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا استنتاج معتبر باشد؟

$$\begin{array}{l} (p\wedge\sim q)\Rightarrow r \\ \underline{(p\wedge\sim r)\qquad\quad} \\ \therefore\ ? \end{array}$$

۱) $\sim p$

۲) q

۳) $\sim q$

۴) r

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است، زیرا:

1) $(p\wedge\sim q)\Rightarrow r$

2) $(p\wedge\sim r)$

3) $p\Rightarrow(\sim q\Rightarrow r)$ از ۱ و عطف مقدمات

4) p از ۲ و حذف عاطف

5) $(\sim q\Rightarrow r)$ از ۳ و ۴ و انتزاع

6) $\sim r$ از ۲ و حذف عاطف

7) $\therefore q$ از ۵ و ۶ و نقیض انتزاع

نکته: هرگاه نتیجه‌ی یک استنتاج، گزاره‌ای شرطی باشد، برای اثبات معتبر بودن استنتاج می‌توانیم مقدم نتیجه‌ی استنتاج را جزء مقدمات استنتاج فرض، و از آن به عنوان یک گزاره‌ی درست استفاده کنیم (زیرا اگر نادرست باشد، نتیجه‌ی استنتاج به انتفای مقدم درست است و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند).