



جبر گزاره‌ها

آیا تاکنون به کلمه و بهتر بگوییم ترکیب «منطق ریاضی» برخورد کرده‌اید؟ چقدر راجع به این موضوع یا مبحث از ریاضیات تحقیق کرده‌اید؟ اگر ادعا کنیم که «ریاضیات یک زبان است و منطق ریاضی، دستور این زبان» آیا باور می‌کنید؟ در این صورت چگونه می‌توانیم زبانی (ریاضی) را یاد بگیریم، بدون آن که دستور آن زبان را آموخته باشیم؟ مگر آن که همچون زبان مادری، تنها با تکرار و تمرین، آن زبان را فقط در حد رفع نیازهای شفاهی و روزمره یاد بگیریم. در مورد ریاضی هم اگر بخواهیم بدون یادگیری منطق ریاضی به یادگیری علم ریاضی پردازیم، ناچاریم خیلی از مفاهیم ریاضی را فقط حفظ کنیم و حتی روابط بین آنها، را از طریق حفظ کردن به خاطر بسپاریم. و این اتفاقی است که متأسفانه در آموزش ریاضی ما در کتاب‌های درسی رخ داده است و به دلیل این که منطق ریاضی [در نظام جدید آموزش متوسطه] به صورت رسمی از برنامه‌ی درسی حذف شده است، در مواردی ناچاریم مباحثی را مطرح نکنیم یا به صورتی مطرح کنیم که برای دانش آموز در حد دانسته‌هایش قابل درک باشد.

در این مقاله سعی می‌کنیم شما را با مبانی منطق ریاضی

آشنا کنیم و کاربردهای آن را در مباحث ریاضی و کتاب‌های درسی به شما نشان دهیم تا عمق فهم شما از این مطالب بیشتر شده و سرانجام بتوانید مباحث خود را با استدلال منطقی همراه کنید. اکنون سعی کنید به هر یک از سؤال‌های زیر که در حوزه‌ی معلومات شماست با استدلال، منطقی پاسخ دهید:

- (I) آیا تهی تابع است؟
- (II) اگر عضوی در اجتماع دو مجموعه نباشد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
- (III) آیا گزاره‌ی شرطی «اگر ۲ عددی فرد است آن گاه شما ۱۰۰ سال دارید» درست است؟
- (IV) چرا برهان خلف را به عنوان یک اثبات ریاضی می‌پذیریم؟
- (V) اگر مجموعه‌ای از بالا کراندار نباشد، چگونه مجموعه‌ای است؟
- (VI) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ ، در این صورت تعریف حد در نقطه‌ی α به چه صورتی در می‌آید؟
- (VII) آیا رابطه‌ی $R = \{(2, 4), (6, 8)\}$ روی $A = \{2, 4, 6, 8\}$ خاصیت تعدی دارد؟
- (VIII) اگر A زیر مجموعه‌ی B نباشد، چه می‌توان گفت؟

(۳) نقیض گزاره‌ی «تو کیو پایتخت ترکیه است» گزاره‌ی «تو کیو

پایتخت ترکیه نیست» خواهد بود.

(۴) «۸ بر ۴ بخش پذیر است» گزاره‌ای است که نقیض آن به

صورت «۸ بر ۴ بخش پذیر نیست» بیان می‌شود.

(۵) اکنون بگویید نقیض گزاره‌ی «عدد ۱۰ زوج است و بر ۵

بخش پذیر است» چگونه بیان می‌شود؟ کمی جلوتر با

قانون نقیض کردن این گونه گزاره‌ها که آنها را گزاره‌های

مرکب می‌گویند آشنا خواهید شد ولی فعلاً همین را بدانید

که نقیض گزاره‌ی فوق به صورت «عدد ۱۰ فرد است یا

بر ۵ بخش پذیر نیست» بیان می‌شود.

همان طور که مشاهده کردید اگر p گزاره‌ی درست باشد

آن گاه $\sim p$ نادرست و اگر p نادرست باشد آن گاه $\sim p$ درست

است. باید به این نکته توجه داشته باشید که نقیض گزاره‌ی p

گزاره‌ای منحصر به فرد است و مثلاً اگر p گزاره‌ای درست

باشد، هر گزاره‌ی نادرست نمی‌تواند $\sim p$ باشد. در واقع هر

گزاره‌ی مانند p دارای بی‌شمار گزاره‌ی متضاد (از نظر ارزشی)

است ولی فقط یکی از آنها $\sim p$ (نقیض) محسوب می‌شود.

اکنون ببینیم ارزش دو گزاره یا سه گزاره یا ... یا n گزاره

نسبت به هم چیست؟ باید دانست که در حالت کلی، n گزاره

نسبت به یکدیگر دارای 2^n حالت ارزشی هستند. در

جدول‌های زیر برای ۲ و ۳ گزاره و همین طور برای هر گزاره

و نقیضش حالت‌های ارزشی مشخص شده است:

p	q	r	$\sim p$
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

معمولاً واژه‌ی «گزاره» با کلمه‌ی «خبر» یا «جمله‌ی خبری» در ذهن تداعی می‌شود که البته زیاد هم با تعریف گزاره در منطق ریاضی فاصله ندارد.

در منطق ریاضی، گزاره به جمله‌ای خبری گفته می‌شود که دارای فقط و فقط یکی از دو ارزش درست (راست) و یا نادرست (دروغ) است. به عنوان مثال، جمله‌های «آیا هوا آفتابی است؟» و «چه گل زیبایی!» هیچ کدام خبری نبوده و گزاره محسوب نمی‌شوند؛ و نیز جمله‌ی « 2 عددی مثبت است» نمی‌تواند گزاره باشد زیرا ارزش آن گاهی درست و گاهی نادرست است.

در منطق ریاضی، معمولاً گزاره‌ها را با حروف کوچک، p, q, r, s, \dots نشان می‌دهند. حال اگر دو گزاره‌ی p و q هم ارزش باشند (هر دو درست یا هر دو نادرست) می‌نویسند $p \equiv q$ و می‌خوانند p هم‌ارز با q است. اگر گزاره‌ای مانند p دارای ارزش درست باشد می‌نویسیم $p?T$ و اگر نادرست باشد می‌نویسیم $p?F$.

اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن گزاره‌ای است منحصر به فرد که با $(\sim p)$ نشان داده می‌شود $(\sim p)$ را نقیض p یا چنین نیست که p می‌خوانیم چند گزاره و نقیض آنها را در این جا مشاهده می‌کنید:

(۱) نقیض گزاره‌ی « $\sqrt{2}$ عددی مثبت است» به صورت « $\sqrt{2}$ عدد مثبتی نیست» بیان می‌شود. در واقع نمی‌توان گفت که نقیض این گزاره به صورت « $\sqrt{2}$ عددی منفی است» بیان می‌شود، چون می‌تواند عددی که مثبت نیست منفی و یا صفر باشد.

(۲) نقیض گزاره‌ی « 2 عددی فرد است» به صورت « 2 عددی فرد نیست» بیان می‌شود (البته در اعداد صحیح اگر عددی فرد نباشد زوج است)

مطابق جدول زیر:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

به عنوان مثال گزاره‌های «عدد ۲ فرد است یا ۵ عدد اول است»، « $1 > 2$ یا $4 < 1$ » و «۱۱ عدد اول است یا $\sqrt{2}$ منفی است» همگی درست‌اند و لی گزاره‌ی « $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ » یا « $4^2 = 2^5$ » نادرست است.

۲- ترکیب عطفی (و): هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ (و) با هم ترکیب کنیم می‌نویسیم $(p \wedge q)$ و این گزاره‌ای است که به صورت $(p$ و $q)$ خوانده می‌شود. ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره‌ی p و q درست باشند؛ مطابق جدول زیر،

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

تمرین: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

(I) «۲ عددی زوج و $4^2 = 2^4$ » ← درست

(II) «۳ عددی زوج و توکیو پایتخت ژاپن است» ← نادرست

(III) « $\frac{1}{x^2+1} > 0$ و $\frac{x^2+1}{x-1} \neq 0$ » ← درست.

ان شاء الله در شماره‌ی بعد با بقیه‌ی ترکیب‌ها آشنا می‌شویم و بلافاصله با یادگیری قوانین حاکم بر ترکیب گزاره‌ها وارد بحث جالب هم‌ارزی‌ها و کاربردهای آنها خواهیم شد.

(برای سه گزاره، $2^2 = 8$ حالت ارزشی حاصل می‌شود که برای p به تعداد $\frac{1}{4} = 4$ حالت T و 4 حالت F و برای گزاره‌ی q $\frac{1}{2} = 2$ ، $\frac{1}{4} = 1$ ، $\frac{1}{2} = 2$ حالت T و 2 حالت F و... و برای گزاره‌ی r $\frac{1}{2} = 1$ ، $\frac{1}{4} = 1$ حالت T و 1 حالت F و... نوشته می‌شود که این قانون قابل تعمیم است.)

تعریف:

قرارداد: اگر جمله‌ای خبری دارای متغیر n باشد آن را گزاره‌نما می‌گوییم و با $p(n)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین وقتی می‌نویسیم $p(x)$ یا $p(x, y)$ یعنی گزاره‌نمایی بر حسب x یا بر حسب x و y . (در شماره‌های بعدی به طور مفصل درباره‌ی گزاره‌نما بحث خواهیم کرد)

مثال. x عددی فرد است، گزاره‌نمایی بر حسب x است، یا $y = x + 1$ گزاره‌نمایی بر حسب x و y است.

نکته: اگر $p(x)$ یک گزاره‌نما باشد در این صورت: (M مجموعه‌ی جواب $p(x)$ است)

$$k \in M \Leftrightarrow p(k) \equiv T$$

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها، به صورت ۴ یا توسط ۴ رابط می‌توان از گزاره‌های ساده، گزاره‌هایی مرکب تشکیل داد. در واقع به ۴ صورت می‌توان گزاره‌ها را با هم ترکیب کرد که عبارتند از:

۱- ترکیب فصلی (یا): هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «یا» با هم ترکیب کنیم می‌نویسیم $(p \vee q)$ و آن گزاره‌ای است که به شکل $(p$ یا $q)$ خوانده می‌شود. ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره نادرست باشند و در سه حالت دیگر درست است؛