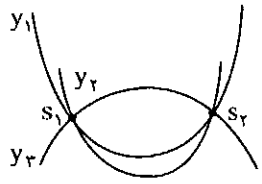
احمد قندهاری

منحنی پوش

نقطه‌ی ثابت .....

بعضی از منحنی‌های به معادله‌ی پارامتری، به ازای مقادیر متفاوت پارامتر، از نقطه یا نقاط مشخصی می‌گذرند. چون مختصات این نقاط به پارامتر بستگی ندارد، آن‌ها را نقاط ثابت گویند.

S_1 و S_2 نقاط ثابت‌اند.



طرز تعیین مختصات نقاط ثابت .....

روش اول: دو مقدار متفاوت به پارامتر نسبت می‌دهیم. معادله‌های دو منحنی حاصل را با هم تقاطع می‌دهیم. از حل آن‌ها، مختصات نقاط ثابت به دست می‌آید.

روش دوم: معادله‌ی منحنی را نسبت به پارامتر مرتب می‌نویسیم و آن را متحد با صفر قرار می‌دهیم. از حل روابط حاصل، مختصات نقاط ثابت به دست می‌آید.

مثال ۱. به دو طریق، مختصات نقاط ثابت دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = mx^2 - (m+2)x + 1$ را بیابید.

حل:

روش اول:

$$m = 0 \Rightarrow y = -2x + 1$$

$$m = 1 \Rightarrow y = x^2 - 3x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 1 = -2x + 1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0,\ x = 1;\quad x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S_1(0,1)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -2 + 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow S_2(1,-1)$$

نقاط S_1 و S_2 نقاط ثابت دسته‌ی منحنی فوق هستند.

روش دوم:

$$y = mx^2 - (m+2)x + 1$$

$$y = mx^2 - mx + 2x + 1 \Rightarrow (x^2 - x)m - (y + 2x - 1) \equiv 0$$

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0,\ 1 \\ y = 1,\ -1 \end{matrix}$$

نقاط ثابت $\Rightarrow S_1(0,1),\ S_2(1,-1)$

مثال ۲. نشان دهید دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = mx^2 - 2x - mx + 4$ به ازای مقادیر متفاوت m از سه نقطه‌ی ثابت می‌گذرند.

حل:

$$y = mx^2 - 2x - mx + 4 \Rightarrow (x^2 - x)m - (y + 2x - 4) \equiv 0$$

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y + 2x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow S_1(0,4)$$

$$x = 1 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S_2(1,2)$$

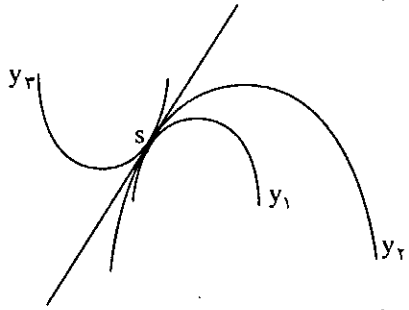
$$x = -1 \Rightarrow y - 6 = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow S_3(-1,6)$$

S_1، S_2 و S_3 سه نقطه‌ی ثابت دسته‌ی منحنی فوق هستند.

خط ثابت .....

بعضی از منحنی‌های به معادله‌ی پارامتری، به ازای مقادیر متفاوت پارامتر، از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند و در این نقطه‌ی ثابت هم بر خط ثابتی مماس‌اند.

به عبارت دیگر، خط ثابت، خط مماس بر دسته‌ی منحنی در نقطه‌ی ثابت است.



توجه: اگر شیب خط مماس در نقطه‌ی ثابت بر دسته‌ی منحنی، مستقل از پارامتر باشد، خط ثابت وجود دارد.

مثال ۳. معادله‌ی خط ثابت دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = a(x-1)^2 + 2x - 3$ را بنویسید.

حل: ابتدا مختصات نقطه‌ی ثابت دسته منحنی را پیدا می‌کنیم.

$$y = a(x-1)^2 + 2x - 3 \Rightarrow a(x-1)^2 - (y - 2x + 3) \equiv 0$$

نقطه‌ی ثابت :

$$\begin{cases}(x-1)^2 = 0 \\ y - 2x + 3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 1 \\ y - 2 + 3 = 0\end{cases} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow S(1,-1)$$

$$y'_x = 2a(x-1) + 2 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'_{x=1} = 2a(0) + 2 \Rightarrow m = 2$$

چون شیب خط مماس، مستقل از پارامتر (a) است، پس خط ثابت وجود دارد.

حال معادله‌ی خط ثابت را می‌نویسیم

$$y - y_s = m(x - x_s)$$

معادله‌ی خط ثابت چنین است :

$$y + 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 3$$

این خط بر دسته‌ی منحنی بالا در نقطه‌ی $S(1,-1)$ مماس است.

مثال ۴. دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = a(x^2 - 4)^2 + x^2$ به ازای مقادیر متفاوت a بر دو خط ثابت مماس‌اند. معادله‌های آن‌ها را بیابید.

حل: ابتدا مختصات نقاط ثابت را به دست می‌آوریم.

$$y = a(x^2 - 4)^2 + x^2 \Rightarrow a(x^2 - 4)^2 + (x^2 - y) \equiv 0$$

$$\begin{cases}x^2 - 4 = 0 \\ x^2 - y = 0\end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

نقاط ثابت

$$x = 2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow S_1(2,4)$$
$$x = -2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow S_2(-2,4)$$

$$y = a(x^2 - 4)^2 + x^2 \Rightarrow y'_x = 4ax(x^2 - 4) + 2x$$
$$x = 2 \Rightarrow m_{1\,\text{مماس}} = y'_{x=2} = 8a(0) + 4 = 4$$

$$x = -2 \Rightarrow m_{2\,\text{مماس}} = y'_{x=-2} = -8a(0) - 4 = -4$$

$$S_1(2,4),\ m_1 = 4$$
$$y - y_{S_1} = m_1(x - x_{S_1})$$
$$y - 4 = 4(x-2)$$

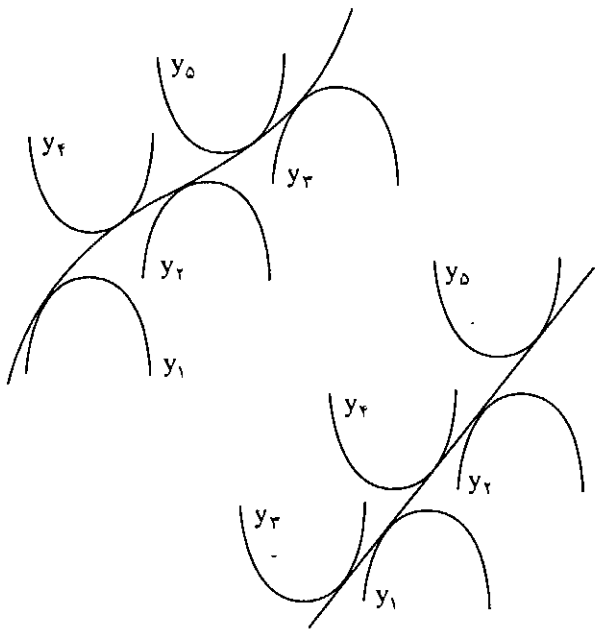
معادله‌ی یک خط ثابت $\boxed{y = 4x - 4}$

$$S_2(-2,4),\ m_2 = -4$$
$$y - y_{S_2} = m_2(x - x_{S_2})$$
$$y - 4 = -4(x+2)$$

معادله‌ی خط ثابت دیگر $\boxed{y = -4x - 4}$

پوش یا لفّاف .....

بعضی از تابع‌های به معادله‌ی پارامتری، به ازای مقادیر متفاوت پارامتر، بر خط یا بر منحنی ثابتی مماس‌اند. این خط یا منحنی را پوش یا لفّاف دسته‌ی منحنی اصلی گویند.



برای تعیین معادله‌ی پوش یا لفّاف، از معادله‌ی منحنی نسبت به پارامتر مشتق می‌گیریم (x و y عدد ثابت فرض می‌شوند). سپس بین رابطه‌ی مشتق و معادله‌ی تابع، پارامتر را حذف می‌کنیم.

مثال ۵. معادله‌ی منحنی پوش دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = 2m^2x - 4mx^2 + 4$ را بیابید.

حل: از معادله‌ی منحنی نسبت به m مشتق می‌گیریم (x و y مقادیر ثابت‌اند).

$$0 = 4mx - 4x^2 \Rightarrow m = x$$

در معادله‌ی دسته‌ی منحنی، به جای m، x قرار می‌دهیم.

$$y = 2m^2x - 4mx^2 + 4,\ m = x$$

معادله‌ی منحنی پوش یا لفّاف

$$y = 2x^3 - 4x^3 + 4 \Rightarrow y = -2x^3 + 4$$

مثال ۶. معادله‌ی پوش دسته‌ی خط به معادله‌ی $y = 2mx - m^2 + 1$ را بیابید.

حل:

$$0 = 2x - 2m \Rightarrow m = x$$

$$y = 2mx - m^2 + 1,\ m = x$$

معادله‌ی منحنی پوش دسته‌ی خط

$$y = 2x^2 - x^2 + 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$$

❐