مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۶)

ION CUCUREZEANU

Journal of Number Theory 44 (1993)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

راه حل مقدماتی مسألهٔ لوکاس

با استفاده از روش نزول نامتناهی[1]، معادلهٔ پل[2]، و قانون تقابل درجهٔ دوم[3]، ثابت شده است که معادلهٔ $x(x+1)(2x+1)=6y^2$ تنها دارای جواب صحیح وناصفر، $x=24$، $y=70$ است.

در ۱۸۷۵ لوکاس[5] [1] حدس زد که تنها جواب صحیح و ناصفر معادلهٔ

$$x(x+1)(2x+1)=6y^2 \qquad (*)$$

$x=24$، $y=70$ است. معادلهٔ (*) زمانی رخ می‌دهد که شخص این سؤال رامطرح کند که کدام عدد هرمی[6] مربع است، یعنی در جستجوی مقدار n ی باشد که به ازای آن $1^2+2^2+\dots+n^2$ مربع عددی طبیعی است.

مسألهٔ «چهاروجهی = مربع»[7] نیز به همین معادله منجر می‌شود، زیرا (*) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2x(2x+1)(2x+2)=6(2y)^2$$

در ۱۹۱۹، واتسون[8]، [2] مسألهٔ لوکاس را (به اثبات) حل کرد. راه حل وی، مبتنی بر نظریهٔ توابع بیضوی[9]، بسیار پیچیده است.
راه حل مشکل دیگری توسط لجانگرن[10] [3] در سال ۱۹۵۲ داده شد. راه حل مزبور که کوتاه‌تر از راه حل واتسون است، بستگی به معادلهٔ پلی در هیأت درجهٔ دومی[11] دارد، که به هیأت درجه چهارمی[12] منجرمی‌شود که جمع هیأتهای مزدوجش[13] انگاری[14]اند.
مسألهٔ مزبور در اغلب کتب نظریهٔ اعداد[15] ذکر شده است. مردل[16] [4] و گای[17] [5] این پرسش را، که در این مورد راه حلی مقدماتی وجود دارد یا نه، مطرح کرده‌اند. (جالب توجه است که پرسش مزبور اخیراً در مجلهٔ زیر تکرار شده است:

Notices Amer. Math. Soc. 32, No.5 (243) (1985), (608)

هدف این مقاله به دست دادن چنین راه حلی است.

معادلهٔ (*) از آن‌جاکه $x(x+1)$ و $2x+1$ نسبت به هم اول[18] هستند، به یکی از دستگاههای زیر، با $(v,t)=1$ و $y=vt$، منجر می‌شود:

$$\text{(I)}\begin{cases} x(x+1)=6t^2 \\ 2x+1=v^2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \text{(II)}\begin{cases} x(x+1)=2t^2 \\ 2x+1=3v^2 \end{cases}$$

اگر شخص (I) را ابتدا به پیمانهٔ[19] ۸،

$$(v\equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow v^2\equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 2\mid x)$$

و سپس به پیمانه ۳،

$$(3\mid x+1 \Rightarrow v^2=2x+1\equiv -1 \pmod 3))$$

(که غیر ممکن است) تحلیل کند، نشان می‌دهد که تنها امکان، عبارت است از:

$$x=6z^2,\ x+1=u^2,\ 2x+1=v^2$$

به طریقی مشابه، از (II) نتیجه می‌شود که تنها امکان؛

$$x=z^2,\ x+1=2u^2,\ 2x+1=3v^2$$

با $(u,z)=1$، $uz=1$است. به این ترتیب یکی از دو مورد زیر را داریم:

$$(1)\begin{cases} 6z^2+1=u^2 \\ 12z^2+1=v^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad (2)\begin{cases} z^2+1=2u^2 \\ 2z^2+1=3v^2 \end{cases}$$

تنهاجوابهای‌به‌اعدادطبیعی[20] (۱)عبارتنداز $u = v = 1$، $z = 0$ و $z = 2$، $u = 5$، $v = 7$. (جوابهای متناظر (*) به ترتیب عبارتند از $x = 0$، $y = 0$ و $x = 24$، $y = 70$.) در واقع، ابتدا از (۱) به پیمانهٔ ۸، zرا زوج[21] داریم. نیز از دستگاه (۱)، u و v را فرد[22] داریم، $(u , v) = 1$، و بنابراین، $(v - u , v + u) = 2$. از آن جا که $v^2 - u^2 = 6z^2$ یا، $(v + u)(v - u) = 6z^2$

$$\text{(a)} \begin{cases} v + u = 6r^2 \\ v - u = 4s^2 \end{cases} \qquad \text{یا} \qquad \text{(b)} \begin{cases} v + u = 2r^2 \\ v - u = 12s^2 \end{cases}$$

را با $z = 2rs$، $(r , s) = 1$، و r فرد، داریم.

از (a)، $v = 3r^2 + 2s^2$ را داریم، که در ارتباط با $v^2 = 12z^2 + 1$، $z = 2rs$،

$$9r^4 - 36r^2s^2 + 4s^4 = 1$$

را می‌دهد، که به پیمانهٔ ۱۶ غیر ممکن است، زیرا:

$$9r^4 \equiv 9 \pmod{16}$$

rفرد، اما:

$$4s^2(9r^2 - s^2) \equiv 0 \pmod{16}$$

از (b) داریم: $v = r^2 + 6s^2$، که در ارتباط با $v^2 = 12z^2 + 1$، $z = 2rs$، می‌دهد:

$$r^4 - 36r^2s^2 + 36s^4 = 1 \qquad (3)$$

تنها جوابهای به اعداد طبیعی معادلهٔ (۳) عبارتند از:

$$r = 1 , s = 0 \quad \text{و} \quad r = 1 , s = 1$$

(جوابهای متناظر (*) عبارتند از: $x = 0$ و $x = 24$.)

در واقع، معادلهٔ (۳) را می‌توان به صورت،

$$(6s^2 - 3r^2)^2 - 8r^4 = 1$$

یا

$$(6s^2 - 3r^2 - 1)(6s^2 - 3r^2 + 1) = 8r^4 \qquad (3')$$

نوشت. از آن جا که

$$(6s^2 - 3r^2 - 1 , 6s^2 - 3r^2 + 1) = 2$$

از ('۳) به پیمانهٔ ۳، موارد زیر را، با $(a , b) = 1$، $ab = r$، داریم:

$$\text{(a)} \begin{cases} 6s^2 - 3r^2 - 1 = -2a^4 \\ 6s^2 - 3r^2 + 1 = 4b^4 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} 6s^2 - 3r^2 - 1 = -4b^4 \\ 6s^2 - 3r^2 + 1 = -2a^4 \end{cases}$$

یا:

$$\text{(c)} \begin{cases} 6s^2 - 3r^2 - 1 = -b^4 \\ 6s^2 - 3r^2 + 1 = -8a^4 \end{cases}$$

از (a) یا (b) نتیجه می‌شود که $2b^4 - a^4 = 1$، که می‌تواند به صورت:

$$(b^2)^4 - a^4 = (b^4 - 1)^2$$

نیز نوشته شود، که معادله‌ای به صورت $x^4 - y^4 = z^2$، با $(x , y) = 1$ است. می‌دانیم ([4] را ملاحظه کنید) که تنها جوابهای صحیح معادله توسط

$$x^2 = y^2 = 1 \ , \ z = 0$$

داده شده‌اند. بنابراین $a^2 = b^2 = 1$، که از آن $r = \mp 1$ و (۳)، $s = 0$ یا $s = 1$ را به دست می‌دهد.

این رابطه از (c)،

$$-b^4 + 8a^4 = -2$$

را، که به پیمانهٔ ۴ غیر ممکن است، به دست می‌دهد.

اکنون، ثابت می‌کنیم که تنها جواب دستگاه (۲) عبارت است از:

$$z^2 = u^2 = v^2 = 1$$

(جواب متناظر (*) عبارت است از $x = 1$، $y = 1$.)

از (۲) نتیجه می‌شود که $4u^2 - 3v^2 = 1$. با قرار دادن $U = 2u$، $V = v$، $Z = 2z$، می‌توانیم معادلهٔ اخیر را به صورت

$$U^2 - 3V^2 = 1 \qquad (4)$$

بنویسیم، در حالی که معادلهٔ اول دستگاه (۲) به

$$Z^2 = 2U^2 - 4 \qquad (5)$$

تبدیل می‌شود. اکنون جوابهای معادلهٔ (۴) را، تحت محدودیت مطرح شده توسط (۵)، پیدا می‌کنیم. معادلهٔ (۴) معادلهٔ پلی است که جواب اصلیش $U = 2$، $V = 1$ است. بنابراین جمیع جوابهای (۴) توسط

$$U_n + V_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n \qquad (6)$$

با n صحیح، داده می‌شود.

روابط زیر را به‌سادگی به دست می‌آوریم:

$$U_{-n} = U_n\,,\; V_{-n} = -V_n \qquad (7)$$

$$U_{n+k} = U_n V_k + 3V_n U_k \qquad (8)$$

$$V_{n+k} = V_n U_k + V_k U_n \qquad (9)$$

$$U_{2k} = U_k^2 + 3V_k^2 = 2U_k^2 - 1 \qquad (10)$$

$$V_{2k} = 2U_k V_k \qquad (11)$$

معادلات (۸)، (۹)، (۱۰)، (۱۱) مستلزم مورد زیرند:

$$U_{n+2k} \equiv -U_n \quad (\bmod U_k) \qquad (12)$$

ثابت می‌کنیم که جوابهای معادلهٔ (۴)، تحت محدودیت (۵)، توسط (۶) تنها به ازای $n = \pm 1$، داده می‌شوند.

بنا به (۷) می‌توان فرض کرد که $n > 0$. از آن جا که U زوج است، از (۶) نتیجه می‌شود که n فرد است. فرض می‌کنیم $n = 4m \pm 1$. به ازای $m \neq 0$، می‌توانیم

$$n = \pm 1 + 2^t(2h + 1)$$

را، با $t \geq 2$ و $h \geq 0$ بنویسیم. قرار می‌دهیم $j = 2^t$؛ به این ترتیب، $n = j \pm 1 + 2jh$.

h بار به کار بردن (۱۲) می‌دهد:

$$U_n \equiv (-1)^h U_{j\pm 1} \quad (\bmod U_j)$$

از آن جا که

$$U_{j\pm 1} = U_j U_{\pm 1} + 3V_j V_{\pm 1} = 2U_j \pm 3V_j$$

داریم:

$$U_n \equiv \pm 3V_j \quad (\bmod U_j)$$

از (۵) نتیجه می‌شود که:

$$Z^2 = 2U_n^2 - 4 \equiv 18V_j^2 - 4 \; (\bmod U_j)$$

از آن جا که معادلهٔ (۴) مستلزم

$$3V_1^2 \equiv -1 \quad (\bmod U_j)$$

است، داریم:

$$Z^2 \equiv -10 \quad (\bmod U_j)$$

همنهشتی[23] فوق غیرممکن است. در واقع، به ازای $t \geq 2$ (یعنی، $j \geq 4$)، از (۱۰) با استفاده از استقرا[24] نتیجه می‌شود که:

$$U_j \equiv 2 \;(\bmod 5) \quad \text{و} \quad U_j \equiv 1 \;(\bmod 8)$$

(به حساب بیاورید که $U_4 = 97$). در این صورت، با استفاده از نمادنویسی معمول نماد لژاندر ـ ژاکوبی[25]، می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{-10}{U_j}\right) = \left(\frac{10}{U_j}\right) = \left(\frac{2}{U_j}\right)\left(\frac{5}{U_j}\right) = \left(\frac{5}{U_j}\right)$$

$$= \left(\frac{U_j}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1$$

که اثبات را تمام می‌کند.

یادداشتها

۱. Infinite descent

۲. Pell's Equation. معادلهٔ دیوفانتی $x^2 - Dy^2 = 1$، که در آن D عدد صحیح غیرمربعی است. این معادله احتمالاً معروفترین معادلهٔ دیوفانتی بعداز معادلهٔ مربوط به سه تاییهای فیثاغورثی $a^2 + b^2 = c^2$، و از بعضی جهات از آن مهمتر است. یکی از مثالهای مشهور این مورد، مسألهٔ موسوم به مسألهٔ رمهٔ ارشمیدس است. این مسأله به معادلهٔ $x^2 - 4729494y^2 = 1$ منجر می‌شود که کوچکترین جوابش که توسط امتور «Amthor» به دست آمده، دارای ۲۰۶۵۴۵ رقم است. [برای توضیحات بیشتر رجوع کنید به: جلد سی و هفتم مجلهٔ آشنایی با ریاضیات ـ پاییز ۱۳۷۱؛ مقالهٔ نظریهٔ اعداد یونانی، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، صفحهٔ ۲۷۲.]

۳. Quadratic Reciprocity Law. نمادهای لژاندری معکوس اعداد اول فرد p و q مشمول فرمول $\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{[(p-1)/2][(q-1)/2]}$اند. این قانون، که به قانون تقابل درجهٔ دوم موسوم است، توسط اویلر تنظیم

شد، اما به اثبات نرسید.اولین اثبات کامل آن توسط کارل‌فردریک گاوس، «Karl Friedrich Gauss»، در ۱۸۰۱ ارائه شد.

۴. Nontrivial Integer Solution

۵. Lucas

٦. Pyramidal Number

۷. «Tetrahedron = Square»

۸. Watson

۹. Theory of Elliptic Functions

۱۰. Ljunggern

۱۱. Quadratic Field

۱۲. Quartic Field

۱۳. Conjugate Fields

۱۴. Imaginary

۱۵. Number Theoretic Books

۱٦. Mordell

۱۷. Guy

۱۸. Relatively Primes

۱۹. Modulo

۲۰. Natural Numbers

۲۱. Even

۲۲. Odd

۲۳. Congruence

۲۴. Induction

۲۵. Legendre - Jaccobi Symbol

مراجع:

1. E. Lucas, problem 1180, Nouvelle Ann. Math (2)14 (1875), 33.6.
2. G.N. Watson, The problem of the square pyramid, Messenger of Math. 48 (1918/1919), 1 - 22.
3. W. LYUNGGREN, New Solution of a problem proposed by Lucas, Nordisk Mat. Tidskr. 34 (1952), 65 - 72.
4. L. J. MORDELL, «Diophantine Equations», Academic press, London, 1969.
5. R.K. Guy, «Unsolved Problems in Number Theory», Springer - Verlag, Berlin / NewYork, 1984.
6. S.P. MOHANTY AND A.M.S. RAMASAMY, the simultaneous diophantine equations. $5y^2-20=x^2$ and $2y^2+1=z^2$.J.Number Theory 18, No.3 (1984), 356 - 359.