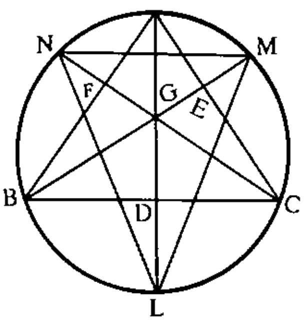
مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۳)

اشتاینر ـ لموس[1] و مثلث خودمیانه[2]

پاری[3]

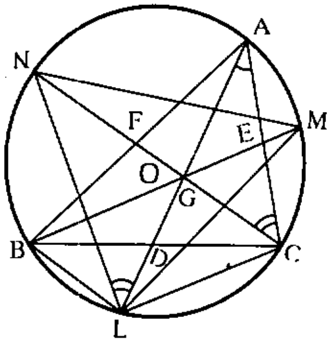
قضیهٔ مشهور اشتاینر ـ لموس براین است که اگر دونیمساز داخلی مثلثی مساوی باشند دراین صورت مثلث متساوی الساقین است. این قضیه این نکته را به زیبایی تشریح می‌کند که اثبات عکس یک قضیه می‌تواند بسیار مشکلتر از خود قضیه باشد. اثر قضیهٔ اشتاینر ـ لموس در بسیاری از مقالات قابل ملاحظه است.

با بررسی مثلث حاصل از برخوردهای ثانی میانه‌های مثلث با دایرهٔ محیطی آن، می‌توان مطلب جالب دیگری راجع به این موضوع به‌دست آورد. فرض می‌کنیم G نقطهٔ میانه‌ای[4] مثلث ABC باشد و میانه‌های مثلث اضلاع مقابل آن را در DEF و دایرهٔ محیطی آن را بار دیگر در LMN تلاقی کنند.



شکل ۱

هنگامی که ABC متساوی‌الساقین باشد LMN نیز بنا به تقارن، با رأس L متساوی‌الساقین است (شکل ۱). اما آیا عکس این مطلب درست است، یعنی، اگر LMN متساوی‌الساقین باشد ABC لزوماً متساوی‌الساقین است؟ مشاهدهٔ شکل ۱ آشکار می‌کند که عکس قضیهٔ مورد بحث راست است، اما ملاحظهٔ شکل ۲ نشان می‌دهد که عکس مزبور محققاً نادرست است. بنابراین شرایطی که مثلث نامتساوی‌الساقین ABC مثلث متساوی‌الساقین LMN ی را به‌وجود می‌آورد کدامند؟



شکل ۲

اگر اضلاع مثلث مورد بحث را abc و میانه‌های AD و BE و CF را به ترتیب d و e و f بنامیم، در این صورت

$$4d^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$
$$4e^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$$
$$4f^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

و قوت G نسبت به دایرهٔ محیطی عبارت است از

$$AG.GL = BG.\ GM = CG.\ GN = g^2 \quad \text{(مثلاً)}$$

اما مثلثهای AGC و NGL متساوی‌الزوایا و مشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{NL}{AC} = \frac{GL}{GC} = \frac{AG.GL}{AG.GC}$$

باقراردادن $AG = \frac{2d}{3}$ ، $GC = \frac{2f}{3}$ و $AC = b$ داریم

$$NL = \frac{9g^2b}{4df}$$

به‌همین ترتیب از مثلثهای AGB و MGL

$$LM = \frac{9g^2c}{4de}$$

از $NL = LM$ داریم

$$\frac{9g^2b}{4df} = \frac{9g^2c}{4de}$$

بنابراین $b/f = c/e$ و $4b^2e^2 = 4c^2f^2$

درنتیجه

$$b^2(2c^2 + 2a^2 - b^2) = c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

بنابراین،

$$2a^2(b^2 - c^2) = b^4 - c^4 = (b^2 + c^2)(b^2 - c^2)$$

و $b^2 = c^2$، حالت متساوی‌الساقین، یا $2a^2 = b^2 + c^2$، حالت نامتساوی‌الساقین. هنگامی که $2a^2 = b^2 + c^2$ داریم

$$4d^2 = 3a^2,\ 4e^2 = 3c^2,\ 4f^2 = 3b^2$$

درنتیجه،

$$d = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ e = \frac{c\sqrt{3}}{2},\ f = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

و $d : e : f = a : c : b$. بنابراین میانه‌ها متناسب بااضلاع، البته در ترتیبی متفاوت‌اند.

نظر به رابطهٔ غیرمعمول فوق، مثلث مورد بحث را مثلث خودمیانه نامیده‌اند.

رابطهٔ $d = \frac{3\sqrt{a}}{2}$ مکان هندسی رأس A ی خودمیانه را با معلوم بودن قاعدهٔ BC مشخص می‌کند.

اگر مثلث متساوی‌الاضلاع αBC یی را بر قاعدهٔ BC (بانقطهٔ وسط D) بناکنیم دراین صورت مکان هندسی A دایرهٔ به مرکز D باشعاع $D\alpha$ است.

عبارت $2a^2 = b^2 + c^2$ رابطه‌ای با قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌دهد و در واقع می‌توان بی‌نهایت مثلث خودمیانه از مثلثهای فیثاغورسی خاصی به‌طریق زیر به‌دست آورد:

اگر x، y، z اضلاع مثلثی فیثاغورسی با $x>y>z$ و $\frac{x}{2}>z$ باشد، دراین صورت x، $(y + z)$، $(y - z)$ مثلثی خودمیانه است. به‌عنوان مثال، سه‌تائی فیثاغورسی ۱۳، ۱۲، ۵ سه‌تائی خودمیانه‌ای ۱۳، ۱۷، ۷ را، که کوچکترین مثلث خود میانه بااضلاع درست است، به‌دست می‌دهد.

مثلث خودمیانه دارای بعضی از خواص جالب هندسی است:

(a) نقطهٔ میانه‌ای G نقطهٔ وسط وتر میانه‌ای AL است.

(b) BGCL متوازی‌الاضلاع است.

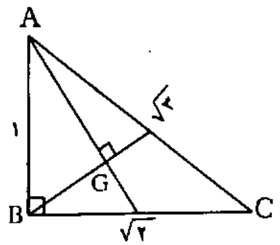
(c) مثلثهای BGL و CLG غیرمستقیماً مشابه ABC اند.

(d) خط اویلری OG برمیانهٔ AG عموداست.

(e) نقطهٔ اشتاینری[5] بر L، واقع برمیانهٔ AG، منطبق است.

(f) اگر K نقطهٔ لموینی[6] باشد، دراین صورت GK موازی BC است.

(g) اگر T نقطهٔ فرمائی[7] باشد، دراین صورت قطعات BT، AT و CT تصاعدی حسابی با $AT = \frac{BT+CT}{2}$ می‌سازند.



شکل ۳

با بازگشت به رابطهٔ فیثاغورسی، تنها یک مثلث خودمیانهٔ قائم‌الزاویه، با اضلاع $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، ۱ موجود است (شکل ۳). درضمن مثلث مزبور تنها مثلث با دوضلع عمود و دو میانهٔ عمود برهم است.

یادداشت‌ها

1. Steiner - Lehmus
2. Automedian Triangle
3. C. F. PARRY
4. Median Point

۵ ـ چهارمین تقاطع بیضی محیطی «Circumellipse» اشتاینر (مرکز درنقطهٔ میانه‌ای) بادایرهٔ محیطی.

۶ ـ «Lemoine Point»، نیز معروف به نقطهٔ قرینهٔ میانه‌ای «Symmedian Point» یعنی مزدوج حافظ زاویه «Isogonal Conjugate» (یاقرینهٔ) نقطهٔ میانه‌ای.

۷ ـ نقطهٔ هم زاویهٔ داخلی «Internal Isogonic Point»؛ نیز نقطهٔ کمترین فاصلهٔ مجتمع از رؤس مثلث.