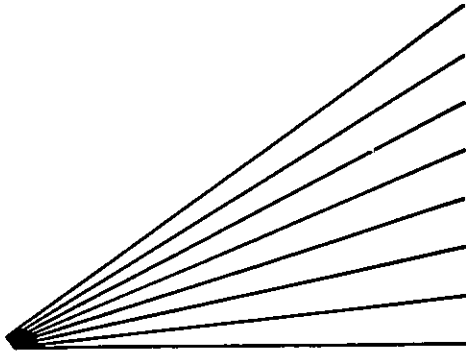


# مفهومهای اصلی و

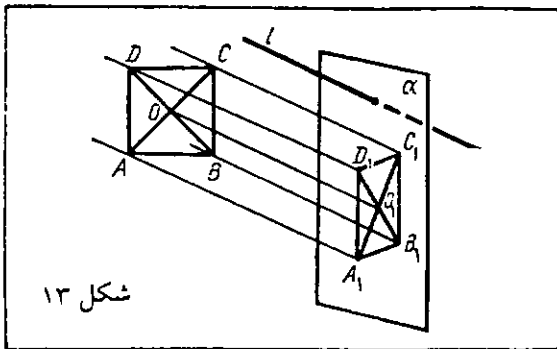
## اصل موضوعها در

### هندسه فضایی (۴)

پرویز شهریاری



تصویر دربارهٔ تصویر موازی راه، می‌توان با سایه‌ای که از نمونهٔ مقوایی شکل، در اثر نور آفتاب، روی دیوار می‌افتد، مجسم کرد. به علت دوری خورشید از زمین، می‌توان پرتوهای خورشیدی راه، به تقریب، موازی به حساب آورد.

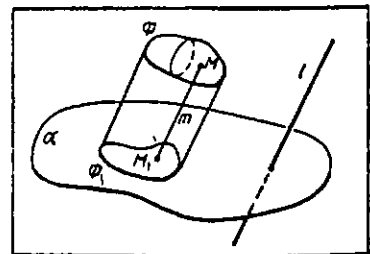


شکل ۱۳

اگر مقوایی را به شکل مربع ABCD بریده باشیم، سایه آن روی دیوار، به شکل چهار ضلعی  $A_1B_1C_1D_1$  (شکل ۱۳) در می‌آید. مطالعهٔ شکل‌های ABCD و  $A_1B_1C_1D_1$  در موقعیتهای مختلف صفحهٔ مربع، موجب می‌شود تا بتوانیم، فرضیه‌هایی دربارهٔ ویژگیهای تصویر موازی، حدس بزنیم. این ویژگیها را، با این شرط تنظیم می‌کنیم که تصویر، موازی باخط راست باشد، ولی خط راست  $l$  هیچ کدام از پاره‌خطها یا خطهای راستی که تصویر می‌شوند، موازی نباشد (شکل ۱۳).

۱۰. تصویر موازی شکلها. ویژگیهای تصویر موازی در این بخش و بخش بعد، قانونهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که، در هندسهٔ فضایی، برای نشان دادن شکلها در روی صفحه، به کار می‌روند. ابتدا با نوع تازه‌ای از نگاشت شکلها، یعنی تصویر موازی آشنا می‌شویم.

صفحه  $\alpha$  و خط راست  $l$ ، متقاطع با صفحه  $\alpha$  راه، در نظر می‌گیریم (شکل ۱۲). اگر از نقطهٔ دلخواه  $M$ ، متعلق به شکل مفروض  $\phi$ ، خط راست  $m$  را موازی باخط راست  $l$  رسم کنیم، نقطهٔ  $M_1$ ، نظیر نقطهٔ  $M$  (یا نگارهٔ  $M$ )، در محل برخورد خط راست  $m$  با صفحه  $\alpha$  به دست می‌آید. این نگاشت  $f$  راه، تصویر شکل  $\phi$  بر صفحهٔ  $\alpha$ ، موازی باخط راست  $l$  گویند. نقطهٔ  $M_1 = f(M)$  راه، تصویر موازی نقطهٔ  $M$ ،  $m$  را خط راست تصویر کننده، شکل  $\phi_1 = f(\phi)$  را تصویر موازی شکل  $\phi$  و صفحه  $\alpha$  را صفحهٔ تصویر نامند.



شکل ۱۲

۹۱. پاره‌خط راست  $AB$ ، صفحه‌تصویر را در نقطه  $M$  قطع کرده است. تصویر آن را  $A_1B_1$  می‌نامیم. می‌دانیم  $|AB| = m$

$$\frac{|A_1M|}{|MB_1|} = \frac{p}{q} \quad \text{و} \quad \text{مطلوب است } |AM| \text{ و } |BM|$$

۹۲. ۱) تصویرهای دو نقطه مفروض  $A$  و  $B$  بر صفحه  $\alpha$  را،  $A_1$  و  $B_1$  می‌نامیم. چگونه می‌توان نقطه برخورد خط راست  $AB$  را با صفحه  $\alpha$  پیدا کرد؟ ۲) نقطه‌های  $A$  و  $B$  و  $C$  - که روی یک خط راست نیستند - و تصویرهای آنها،  $A_1$  و  $B_1$  و  $C_1$ ، بر صفحه  $\alpha$ ، داده شده است. خط راست فصل مشترک دو صفحه  $ABC$  و  $\alpha$  را، چگونه می‌توان پیدا کرد؟

### ۱.۱. نمایش شکلها در هندسه فضایی

تا این جا، بدون این که به چگونگی روش کار پردازیم، شکلهایی مثل چهاروجهی و متوازی‌السطوح را، روی صفحه نشان داده‌ایم. اکنون می‌خواهیم دربارهٔ نمایش شکلها، اندکی دقیقتر، صحبت کنیم. وقتی در هندسه فضایی، از نمایش یک شکل صحبت می‌کنیم، منظور شکلی است که با تصویر موازی شکل مفروض بر صفحه، مشابه باشد.

در این بخش، قانونهای نمایش ساده‌ترین چندضلعیها و چند وجهیها را شرح می‌دهیم. وجه‌های یک چندوجهی، چندضلعیهایی هستند که روی صفحه‌های مختلف قرار گرفته‌اند و، بنابراین، طبیعی است ابتدا، به نمایش چند ضلعیهای پردازیم که صفحه آنها، منطبق بر صفحه تصویر و یا موازی با آن نیست. از حالتی که، صفحه چندضلعی، با خط راست تصویر کنند (خط راستی که تصویر، موازی با آن انجام می‌شود) صرف‌نظر می‌کنیم، زیرا در این حالت، تصویر چند ضلعی، به صورت یک پاره‌خط راست درمی‌آید.

۱. مثلث. اگر سایه یک مثلث مقوایی را روی دیوار، ضمن تغییر وضع مثلث، مورد مطالعه قرار دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که، تصویر یک مثلث، می‌تواند مثلثی به هر شکل باشد: تصویر یک مثلث مفروض بر یک صفحه (یعنی نمایش مثلث) می‌تواند مثلثی به شکل دلخواه

الف) می‌بینیم که تصویر هر ضلع یا قطر مربع، به صورت پاره‌خط راست در می‌آید.

ویژگی ۱. تصویر یک خط راست (پاره‌خط راست)، یک خط راست (پاره‌خط راست) است.

ب) در مربع  $ABCD$  داریم:  $[AB] \parallel [CD]$  و  $[AD] \parallel [BC]$ . در تصویر هم، «سایه» این پاره‌خطهای راست، موازیند.  $[A_1D_1] \parallel [B_1C_1]$  و  $[A_1B_1] \parallel [C_1D_1]$ .

ویژگی ۲. تصویرهای دو خط راست موازی، باهم موازیند.

ج) داریم:  $|AO| : |AC| = \frac{1}{4}$  و  $|AB| : |DC| = 1$ . می‌توان توجه کرد که همین نسبتها، برای پاره‌خطهای تصویر هم وجود

$$\text{دارد، یعنی: } \frac{|A_1D_1|}{|D_1C_1|} = \frac{|AD|}{|DC|} \quad \text{و} \quad \frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|AB|}{|DC|}$$

ویژگی ۳. نسبت طولهای دو پاره‌خط راست موازی، برابر است با نسبت طولهای تصویرهای آنها.

### پرسشها و مسأله‌ها

۸۶. سه نقطه مفروضند. ضمن تصویر موازی، چند نقطه روی صفحه تصویر به دست می‌آیند؟

۸۷. در تصویر صفحه، نیم صفحه زاویه، چه شکلی به دست می‌آید؟

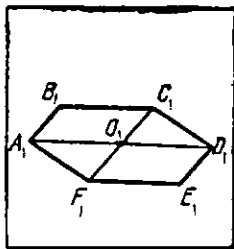
۸۸. طول یک پاره‌خط راست، با طول تصویر آن برابر شده است. این پاره‌خط راست، نسبت به صفحه تصویر، چه وضعی می‌تواند داشته باشد؟

۸۹. دو خط راست، تصویرهایی موازی دارند. آیا این گزاره درست است: خود خطهای راستی که تصویر شده‌اند، موازیند؟

۹۰. ۱) ثابت کنید، تصویر نقطه وسط یک پاره‌خط راست، در وسط پاره‌خط راست تصویر است؛ ۲) آیا می‌توان چهاروجهی  $ABCD$  را، طوری بر یک صفحه تصویر کرد که در تصویر، یک متوازی‌الاضلاع به دست آید؟

**حل:** دوزنقه  $A_1B_1C_1D_1$  را نمایش یک دوزنقه متساوی الساقین می‌گیریم (شکل ۱۴، a). در دوزنقه اصلی (شکل ۱۴، b)، ارتفاع  $DE$  موازی محور تقارن  $MN$  است ( $M$  و  $N$ ، نقطه‌های وسط دو قاعده‌اند). چون در تصویر موازی، خطهای راست موازی، موازی باقی می‌مانند؛ در ضمن، نسبت پاره‌خطها، در حالت موازی بودن آنها، تغییر نمی‌کند، بنابراین ارتفاع دوزنقه  $A_1B_1C_1D_1$  را می‌توان به این ترتیب ساخت: (۱) نقطه‌های  $M_1$  و  $N_1$ ، وسط پاره‌خطهای راست  $A_1B_1$  و  $D_1C_1$  را پیدا می‌کنیم؛ (۲) خط راست  $M_1N_1$  را رسم می‌کنیم، (۳) پاره‌خط راست  $D_1E_1$  را موازی ( $M_1N_1$ ) رسم می‌کنیم.

۴. شش ضلعی منتظم. شش ضلعی منتظم  $ABCDEF$  را در نظر می‌گیریم. محل برخورد قطرهای  $AD$  و  $FC$ ، مرکز تقارن شش ضلعی است، بنابراین، لوزیهای  $ABCD$  و  $DEFO$  نسبت به نقطه  $O$  قرینه یکدیگرند.



شکل ۱۵

لوزی  $ABCD$ ، در تصویر، به صورت متوازی‌الاضلاعی مثل  $A_1B_1C_1D_1$  درمی‌آید (شکل ۱۵). نقطه‌هایی که نسبت به مرکز  $O$  قرینه یکدیگرند، در تصویر، قرینه هم، نسبت به نقطه  $O_1$  درمی‌آیند. (بخش ۱۰، ویژگی ۳). به این ترتیب، برای به دست آوردن بقیه رأسهای تصویر، کافی است نقطه‌های  $D_1$  (قرینه  $A_1$  نسبت به  $O_1$ )،  $E_1$  (قرینه  $B_1$  نسبت به  $O_1$ ) و  $F_1$  (قرینه  $C_1$  نسبت به  $O_1$ ) را پیدا کنیم. قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر را معمولاً با حرف  $Z$  نشان می‌دهند و این طور می‌نویسند:

$$D_1 = Z_{O_1}(A_1) \quad , \quad E_1 = Z_{O_1}(B_1) \quad , \quad F_1 = Z_{O_1}(C_1)$$

باشد. مثلاً، مثلث متساوی‌الاضلاع، می‌تواند به صورت هرگونه مثلثی با ضلعهای مختلف درآید. در نتیجه: در تصویر موازی، مقدار زاویه‌ها و نسبت طول پاره‌خطهای راستی که با هم موازی نیستند، در حالت کلی، ثابت نمی‌ماند.

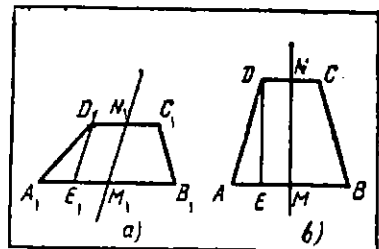
**مسأله ۱.** در نمایش یک مثلث متساوی‌الاضلاع (یعنی در تصویر موازی این مثلث)، جای تصویر مرکز مثلث را پیدا کنید.

**حل.** مرکز هر مثلث، نقطه برخورد میانه‌های آن است. با توجه به ویژگی ۳، تصویر هر میانه، به صورت میانه تصویر به دست می‌آید. بنابراین، کافی است در مثلث تصویر، دو میانه را رسم کنیم؛ محل برخورد آنها، تصویر مرکز مثلث اصلی را به ما می‌دهد.

۲. متوازی‌الاضلاع. چون ضمن تصویر، موازی بودن دو خط راست حفظ می‌شود، بنابراین نمایش یک متوازی‌الاضلاع فضایی بر صفحه (و در حالت خاص، نمایش یک مستطیل، یک لوزی یا یک مربع)، یک متوازی‌الاضلاع است، ولی البته، طول ضلعها و اندازه زاویه‌های تصویر، می‌تواند تغییر کند. در واقع، برای درک بیشتر این موضوع، می‌توان دو مثلثی را در نظر گرفت که به وسیله یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع اصلی، به وجود آمده‌اند و، سپس، به آن چه در مورد نمایش مثلث گفته‌ایم، توجه کرد.

۳. دوزنقه. از ویژگیهای تصویر موازی نتیجه می‌شود که نمایش یک دوزنقه، دوزنقه دیگری است که، در آن، نسبت طولهای دو قاعده، ثابت می‌ماند.

**مسأله ۲.** روی تصویر یک دوزنقه متساوی‌الساقین، تصویر ارتفاع را پیدا کنید.



شکل ۱۴

راستی که از وسط ساق بر قاعده عمود شده است.

۹۵. در تصویر یک مثلث دلخواه، تصویر ارتفاع و تصویر مرکز دایره محیطی مثلث اصلی را پیدا کنید.

۹۶. (۱) در مثلث  $ABC$  می‌دانیم، نسبت طولهای دو ضلع  $AB$  و  $BC$  برابر  $\frac{2}{3}$  است. نمایش این مثلث و نمایش نیمساز زاویه  $B$  از آن را پیدا کنید؛ (۲) نسبت طول ضلعهای مجاور به زاویه قائمه  $AC$  و  $BC$  از مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  برابر  $\frac{2}{3}$  است. نمایش مرکز دایره محاطی این مثلث را پیدا کنید.

۹۷. (۱) آیا ممکن است نمایش یک چهارضلعی، یک چهارضلعی دلخواه باشد؟ (۲) آیا ممکن است نمایش یک دوزنقه، یک متوازی‌الاضلاع باشد؟ (۳) آیا ممکن است نمایش یک لوزی، یک مربع باشد؟

۹۸. (۱) چه ویژگیهایی از لوزی، ضمن نمایش تصویری آن، حفظ می‌شود و چه ویژگیهایی از آن تغییر می‌کند؟ (۲) چه ویژگیهایی از مستطیل، ضمن نمایش تصویری آن، حفظ می‌شود؟

۹۹. مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی مفروض است. نمایش تصویری آن را پیدا کنید و، سپس، نمایش مربعی را پیدا کنید که ضلع آن: (۱) ضلع مجاور به زاویه قائمه مثلث مفروض؛ (۲) وتر مثلث مفروض باشد.

۱۰۰\*. در چهارضلعی  $ABCD$ ، طول همه یالها با هم برابرند و  $k$ ، وسط یال  $BD$  است. (۱) خطهای راست  $KN$  و  $KM$  را، به ترتیب، بر  $(AD)$  و  $(DC)$  عمود کرده‌ایم ( $M$  و  $N$ ، پای عمودها هستند)؛ (۲) نقطه برخورد صفحه  $KMN$  را با خط راستی که از نقطه  $D$  به محل برخورد میانه‌های وجه مقابل وصل می‌کند، نشان دهید؛ (۳) مساحت مثلث  $KMN$  را پیدا کنید، به شرطی که طول هر یال چهاروجهی برابر  $a$  باشد.

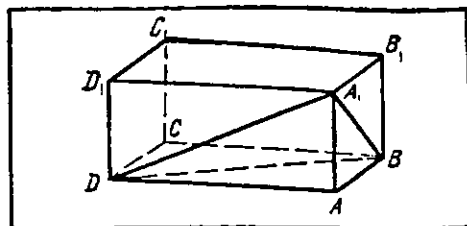
۱۰۱. (۱) مقطع مکعب  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  را با صفحه‌ای که از وسط یالهای  $AA_1$ ،  $BC$ ، و  $CC_1$  گذشته است، مشخص کنید؛ (۲)

\* در این مسأله و برخی مسأله‌های دیگر، واژه «نمایش» یا «نمایش تصویری» را انداخته‌ایم.

در این صورت، شش ضلعی  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ، نمایش مطلوب است.

۵. چهاروجهی. اگر مدل یک چهاروجهی را، مثلاً با مقوا، تهیه کنیم و سایه آن را، با تغییر موقعیت چهاروجهی، روی دیوار، مورد مطالعه قرار دهیم، می‌توانیم قانون نمایش آن را به این صورت تنظیم کنیم: یالهای یک چهاروجهی، در نمایش مسطحه آن، به صورت ضلعا و قطرهای یک چهارضلعی درمی‌آیند.

۶. متوازی‌السطوح. فرض می‌کنیم، متوازی‌السطوح  $AC_1$  داده شده باشد. یالهای  $AB$ ،  $AD$  و  $AA_1$  را، که در یک رأس به هم رسیده‌اند، در نظر می‌گیریم و به چهاروجهی  $A_1ABD$  توجه می‌کنیم. با استفاده از قانون نمایش چهاروجهی، به این نتیجه می‌رسیم که نمایش یالهای  $AB$ ،  $AD$  و  $AA_1$  را می‌توان به صورت سه پاره‌خط راستی نشان داد که از یک نقطه آغاز شده‌اند (شکل ۱۶)؛ ولی هیچ دوتایی از آنها، روی یک خط راست نیستند.



شکل ۱۶

با مشخص کردن این سه پاره‌خط راست، وضع متوازی‌السطوح در نمایش مسطحه خود، مشخص می‌شود. هر یک از یالهای دیگر، با یکی از این سه پاره‌خط راست موازی است و طولی برابر آن دارد (ویژگیهای ۱ تا ۳ از بخش ۱۰).

### پرسشها و مسأله‌ها

۹۳.  $A_1B_1C_1$  را نمایش مثلث  $ABC$  می‌گیریم. آیا ارتفاع مثلث  $A_1B_1C_1$ ، نمایش ارتفاع مثلث  $ABC$  است؟

۹۴. یک مثلث متساوی‌الساقین را طوری تصویر کنید که، در تصویر، به صورت یک مثلث متساوی‌الاضلاع درآید. در این تصویر، پیدا کنید: (۱) تصویر نیمساز زاویه رأس؛ (۲) تصویر پاره‌خط

### خطهای راست متنافر

۱۱۰.  $[BC_1]$  قطر وجه  $BCC_1B_1$  از منشور قائم  $ABC_1A_1B_1C_1$  است. با استفاده از معیار شناسایی خطهای راست متنافر، خطهای راستی را نام ببرید که: (۱) با  $(BB_1)$ ؛ (۲) با  $(AC)$ ؛ (۳) با  $(BC_1)$  متنافر باشند.

۱۱۱. می‌دانیم دو خط راست  $p$  و  $q$  با هم متنافرند و خط راست  $r$ ، خط راست  $p$  را قطع می‌کند. موقعیت دو خط راست  $q$  و  $r$ ، نسبت به هم، چگونه می‌تواند باشد؟

۱۱۲. می‌دانیم  $a \cap \alpha = b$ ،  $a \subset \alpha$ ،  $\alpha \cap \beta = m$ . موقعیت خطهای راست  $a$  و  $b$ ، نسبت به هم، چگونه می‌تواند باشد؟  
 ۱۱۳. دو خط متنافر  $a$  و  $b$  و نقطه  $M$ ، که روی  $a$  یا  $b$  نیست، مفروضند. آیا خط راستی وجود دارد که از نقطه  $M$  بگذرد و هر یک از دو خط راست  $a$  و  $b$  را قطع کند؟

### خطهای راست و صفحه‌های موازی

۱۱۴. مربع  $ABCD$  قاعدهٔ هرم قائم  $SABCD$  را تشکیل می‌دهد.  $M$  و  $N$ ، به ترتیب، وسط یالهای  $SB$  و  $SC$  هستند. نشان دهید: (۱) خطهای راست موازی با صفحه  $ABC$ ؛ (۲) خطهای راست موازی با صفحه  $ASD$ ؛ (۳) صفحه‌های موازی با خط راست  $AB$ .

۱۱۵. خط راست  $a$ ، صفحه  $\alpha$  را قطع می‌کند. آیا روی صفحه  $\alpha$  می‌توان خط راستی موازی با  $a$  رسم کرد؟  
 ۱۱۶. موقعیت خط راست  $a$ ، نسبت به صفحه  $\alpha$ ، چگونه است، اگر خط راست  $a$  خط راستی واقع بر صفحه  $\alpha$ ، نسبت به هم متنافر باشند؟

۱۱۷. خط راست  $a$  با صفحه  $\alpha$  موازی است. ثابت کنید، اگر از نقطه  $M$  واقع بر صفحه  $\alpha$ ، خط راستی موازی با  $a$  رسم کنیم، روی صفحه  $\alpha$  قرار دارد.

۱۱۸. یک صفحه و خط راستی موازی با آن، که روی صفحه نیست، مفروضند. ثابت کنید، پاره خطهای راست موازی با هم، که بر خط راست و صفحه مفروض تکیه دارند، طولهایی برابر دارند.

اگر طول هر یال مکعب برابر  $A$  باشد، طول ضلعهای مقطع را پیدا کنید.

۱۰۲. در مکعب مستطیل  $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ ، طول یالهای  $AB$ ،  $BC$ ،  $BB_1$  متناسب با عددهای ۳، ۲، ۱. مطلوب است نقطه برخورد (۱) یال  $AB$  با نیمساز زاویه  $BB_1A$ ؛ (۲) خط راست  $CC_1$  با نیمساز زاویه  $BB_1C_1$ .

### ۱۲. مسأله‌های اضافی

#### اصل موضوعها و نتیجه‌های آن

۱۰۳. چهار نقطه را در نظر می‌گیریم که هیچ سه تایی از آنها، روی یک خط راست نباشند. چند خط راست متفاوت می‌توان رسم کرد که، هر یک از آنها، از دو نقطه مفروض بگذرد؟  
 ۱۰۴. چهار نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه داده شده‌اند. چند صفحهٔ مختلف می‌توان رسم کرد به نحوی که، هر یک از آنها، از سه نقطهٔ مفروض بگذرد؟

۱۰۵. آیا این گزاره درست است: (۱) هر سه نقطه‌ای به یک صفحه تعلق دارند، (۲) از هر سه نقطه دلخواه، تنها یک صفحه عبور می‌کند؟  
 ۱۰۶. آیا ممکن است، دو صفحه دارای دو خط راست مشترک باشند؟

۱۰۷. آیا این گزاره درست است: اگر خط راستی با هر یک از خطهای راست متقاطع، نقطهٔ مشترکی داشته باشد؛ با این خطهای راست، در یک صفحه قرار دارد؟

۱۰۸. نقطه‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، و  $D$ ، غیرواقع بر یک صفحه مفروضند. ثابت کنید، وسط پاره خطهای راست  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$  و  $DA$  روی یک صفحه‌اند. این نقطه‌ها، رأسهای چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

۱۰۹. در چهاروجهی  $ABCD$ ، نقطه‌های  $M$  و  $N$ ، به ترتیب، درون یالهای  $AC$  و  $BC$  قرار دارند، در ضمن،  $(MN) \parallel (AB)$ . اگر نقطه  $P$ ، در درون وجه  $ABD$  باشد، مقطع چهاروجهی  $ABCD$  را با صفحه  $MNP$  پیدا کنید.

متعلق به یال  $AB$ ، وجه  $AA_1D_1D$  و وجه  $BB_1C_1C$  باشند.

۱۲۶. در چهاروجهی  $ABCD$ ، رأس  $D$  را به نقطه  $M$ ، محل برخورد میانه‌های وجه  $ABC$ ، وصل کرده‌ایم. (۱) مقطع چهاروجهی را با صفحه‌ای پیدا کنید که از نقطه  $N$  وسط پاره‌خط راست  $DM$ ، موازی با وجه  $BCD$  رسم شده است؛ (۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به شرطی که طول هر یال چهاروجهی برابر  $a$  باشد.

۱۲۷. روی سه یال دو به دو متناظر متوازی‌السطوح، سه نقطه انتخاب کرده‌ایم. مقطع متوازی‌السطوح را با صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، پیدا کنید.

۱۲۸. آیا ممکن است، مقطع مکعب: (۱) مثلثی متساوی‌الاضلاع؛ (۲) مربع؛ (۳) پنج ضلعی منتظم؛ (۴) شش ضلعی منتظم؛ (۵) هفت ضلعی منتظم باشد؟

### تصویر موازی، نمایش شکلیها

در مسأله‌های از ۱۲۹ تا ۱۳۱، حالت‌هایی را هم در نظر بگیرید که، خط راستی که تصویر موازی با آن صورت می‌گیرد، بتواند با صفحه‌ی تصویر و یا با صفحه‌ی شکل مسطحه، موازی باشد.

۱۲۹. در تصویر موازی، تصویر (۱) نقطه؛ (۲) خط راست؛ (۳) پاره‌خط راست؛ (۴) نیم خط راست؛ (۵) زاویه؛ (۶) صفحه، به چه صورتی درمی‌آید؟

۱۳۰. در تصویر موازی، تصویر (۱) مثلث؛ (۲) دوزنقه؛ (۳) چهاروجهی؛ (۴) متوازی‌السطوح، چه شکلی می‌تواند باشد؟

۱۳۱. تصویر زاویه  $ABC$ ، ضمن تصویر موازی، به صورت (۱) نیم خط راست  $B_1A_1$ ؛ (۲) خط راست  $A_1C_1$ ؛ (۳) زاویه  $A_1B_1C_1$  درآمده است. در کدام یک از این حالتها، نگاشتی معکوس پذیر از شکل مفروض بر تصویر خود است؟

۱۳۲. خطهای راست متناظر  $a$  و  $b$  را، روی صفحه‌ای که هر دو خط راست را قطع کرده است، تصویر کرده‌ایم؛ در ضمن، خط راست  $a$  را موازی با  $b$  و خط راست  $b$  را موازی با  $a$ . ثابت کنید تصویرها با هم موازیند.

۱۱۹. مقطع چهاروجهی  $ABCD$  را با صفحه‌ای که از نقطه  $M$  واقع در درون صفحه  $ABC$  موازی با خطهای راست  $AB$  و  $DC$  رسم شده است، پیدا کنید.

۱۲۰. هرم منتظم  $SABCD$  مفروض است. مطلوب است مقطع آن (۱) با صفحه‌ای که از  $(BC)$  و نقطه  $M$  واقع بر مثلث  $SAD$  می‌گذرد؛ (۲) با صفحه‌ای که از نقطه  $O$  واقع بر قاعده، موازی صفحه  $SAB$  رسم شده است. اگر  $|AB| = a$  و  $|SA| = b$  باشد، محیط مقطع را پیدا کنید.

### صفحه‌های موازی

۱۲۱. موقعیت دو صفحه  $\alpha$  و  $\beta$ ، نسبت به هم، چگونه است، اگر: (۱) خط راستی واقع در صفحه  $\alpha$ ، با صفحه  $\beta$  موازی باشد؛ (۲) هر خط راست واقع در صفحه  $\alpha$ ، با صفحه  $\beta$  موازی باشد؛ (۳) خط راستی که صفحه  $\alpha$  را قطع کرده است، با صفحه  $\beta$  موازی باشد؟

۱۲۲. آیا این گزاره‌ها درستند: (۱) اگر صفحه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  موازی باشند و خط راستی متعلق به صفحه  $\alpha$  باشد، آن وقت این خط راست با صفحه  $\beta$  موازی است؛ (۲) اگر دو خط راستی که، یکی بر  $\alpha$  و دیگری بر  $\beta$  قرار دارد، نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند، آن وقت دو صفحه  $\alpha$  و  $\beta$  موازیند؟

۱۲۳. متوازی‌السطوح  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  مفروض است. ثابت کنید: (۱)  $(D_1 C B_1) \parallel (A_1 D B)$ ؛ (۲)  $(A_1 B C_1) \parallel (A C D_1)$ .

۱۲۴. صفحه‌های موازی  $\alpha$  و  $\beta$  مفروضند. از نقطه  $M$ ، که بر هیچ یک از این دو صفحه واقع نیست، خطهای راست  $a$  و  $b$  را، به نحوی رسم کرده‌ایم که صفحه  $\alpha$  را در نقطه‌های  $A_1$  و  $B_1$ ، و صفحه  $\beta$  را در نقطه‌های  $A_2$  و  $B_2$  قطع کنند. می‌دانیم  $|MA_1| = ۸$ ،  $|A_1 A_2| = ۱۲$ ،  $|A_2 B_2| = ۲۵$ . مطلوب است محاسبه  $|A_1 B_1|$ .

۱۲۵. مقطع متوازی‌السطوح  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  را با صفحه  $MNP$  پیدا کنید، به شرطی که نقطه‌های  $M$  و  $N$  و  $P$ ، به ترتیب،