

# مفهومهای اصلی و اصل موضوعها در هندسه فضایی

## قسمت اول

● پرویز شهریاری

### ۱. ورود به مطلب

امروز، نزدیک به یازده سده بعد از این سربل و روش شناس بزرگ ایرانی، آموزش هندسه، براساس همین اصل آموزشی فارابی قرار دارد. ما در سالهای پیش از دبیرستان، با بسیاری از جسمهای هندسی (مثل مکعب، مکعب مستطیل، هرم، منشور، کره) آشنا می شویم ولی برای آن که با مفهوما، تعریفها و اصل موضوعهای هندسه فضایی، به صورتی دقیق و منظم، آشنا شویم، کار با بسیاری از این جسمها را فرامی گیریم: (محاسبه حجم، مساحت، سطح جانبی، ...) اگر به تاریخ ریاضیات هم مراجعه کنیم، توجه می شویم که بشر هم، به همین ترتیب، به آگاهیهای هندسی دست یافته است و، البته در این راه، طبیعت و نیازهای زندگی، راهنما و انگیزه کار او بوده است. لازم بود برای ادامه زندگی، میزان محصول کشاورزی برآورد شود و انبارهای مناسب برای ذخیره آنها ساخته شود، ولی برای این منظور، باید بتوان حجم انبارها را ارزیابی کرد و، برای ساختن آنها، مقدار مصالحی را که لازم است، فراهم آورد. در مرحله های بعدی، بازرگانی و کشتیرانی، نیازهای محاسبه ای تازه ای را مطرح کرد و، در کنار آن، ساختن معبدها، قلعه ها و کاخهای بزرگ، مهندسان و معمارانی را می طلبید که در کار محاسبه و شناخت جسمهای هندسی، آگاه تر و داناتر باشند. حتی در شرایط امروزی هم که ریاضیات بی اندازه پیش رفته است، نیاز، انگیزه پیشرفت ریاضیات و ریاضیات وسیله ای برای حل دشواریهای دانشهای دیگر است. وقتی که فدوروف برای تعیین انواع بلورهای ممکن مطالعه می کرد، ناچار شد، ابتدا بلورشناسی را کنار بگذارد و به بررسی جسمهای هندسی متقارن

«جسم از همه به احساس نزدیکتر است، سپس سطح، بعد خط و سر آخر، دورتر از همه اینها، نقطه. ولی به عقل چیزی نزدیکتر است که از بخشهای کمتری نسبت به دیگر چیزهای مشخص، تشکیل شده باشد؛ هر چیزی که ساده تر باشد، به عقل نزدیکتر است. به این ترتیب، به جایی می رسیم که درباره چیزی بیندیشیم که برای وجود آن، هیچ چیزی دخالت نکرده باشد. به این ترتیب، از لحاظ عقلی، در ردیفی که به دست می آید، نقطه در جای نخست قرار گرفته است، سپس خط، بعد سطح و در جای آخر جسم. با وجود این، وقتی که بایک دانش آموز سروکار داریم، از آن جا که در سالهای نخست یادگیری، بیشتر به جانبی که محسوس باشد تمایل دارد، ردیفی را به کار می بریم که متناظر با احساس است، ولی در تألیف یک اثر علمی، از ردیفی که عقلانی تر است، استفاده می کنیم. در نتیجه، آموزش از جسم محسوس و قابل لمس آغاز می شود، سپس این جسم از همه آن چه که آن را محسوس می کند، جدا و منتزع می شود، بعد به سطح و خط و سرانجام به نقطه پرداخته می شود. بنابراین، بهتر این است که کار خود را، از احساس و در مسیر تجزیه آغاز کنیم تا به نقطه برسیم، سپس، به ردیفی پردازیم که متناظر با عقل است، یعنی به ترکیب.»

ابونصر فارابی (۲۵۹ - ۳۳۹ ه. ق.)

## ۲. مفهومیهای اصلی و اصل موضوعهای هندسه فضایی

۱. در هندسه دبیرستانی، چهار مفهوم اساسی مورد استفاده قرار می‌گیرد که تعریفی برای آنها نیامده است: نقطه، خط راست، صفحه، فاصله بین دو نقطه. گاهی هم، مفهومیهای از مجموعه‌ها، به عنوان مبانی ریاضیات عمومی، به یاری طلبیده می‌شود. بقیه مفهومیهای هندسی، همراه با تعریف‌اند. در هندسه دبیرستانی، درباره شکل، کم و بیش، به این صورت گفته می‌شود: هر مجموعه‌ای از نقطه‌ها را شکل گویند. خط راست و صفحه، نمونه‌های از شکل هستند که، تصور آنها، برای همه ما روشن است.

مجموعه همه نقطه‌هایی که در هندسه فضایی مورد استفاده‌اند، معمولاً فضا نامیده می‌شود. هر شکلی - و مثلاً خط راست یا صفحه - زیر مجموعه‌ای است از فضا. هر صفحه‌ای در فضا جا می‌گیرد، ولی نمی‌تواند بر آن منطبق شود. هر خط راستی در صفحه جا می‌گیرد، ولی نمی‌تواند تمامی صفحه را پر کند.

۲. در هندسه دبیرستانی، بسیاری از اصل موضوعها آمده است؛ مثلاً اصل موضوع مربوط به خط راست (از هر دو نقطه، یک و تنها یک خط راست می‌گذرد) و همچنین، اصل موضوعهای مربوط به فاصله.

اکنون فرض می‌کنیم، همه اصل موضوعهای هندسه مسطحه، برای هر صفحه‌ای از فضا برقرار باشد. این توافق به ما امکان می‌دهد، همه قضیه‌های هندسه مسطحه را تنظیم کنیم و آنها را، برای هر صفحه‌ای از فضا به کار ببریم. ولی بجز اصل موضوعهای هندسه مسطحه، به اصل موضوعهای تازه‌ای، برای بنیان ویژگیهای اصلی صفحه، نیاز داریم.

اصل موضوع ۱. از هر سه نقطه‌ای که روی یک خط راست نباشند، می‌توان یک صفحه، و تنها یک صفحه، عبور داد (اصل موضوع صفحه). این اصل موضوع را می‌توان به کمک سه میله نوک تیز قائم و یک مقوا مجسم کرد. صفحه‌ای را که از سه نقطه A، B و C گذشته باشد  $[C \notin (AB)]$ ، با نماد (ABC) نشان می‌دهند.

پیردازد. او در هندسه، و بدون رابطه یا بلورشناسی، همه گونه‌های جسمهای متقارن را پیدا کرد. مسأله فدوروف ۲۳۰ جواب داشت و اینها همان گونه‌های ممکن بلورها بودند.

با همه اینها باید اعتراف کنیم که، اغلب ما، نخستین درسهای هندسه فضایی را در دبیرستان (جایی که به قول فارابی، باید هندسه را به شیوه عقلانی یاد گرفت)، با دشواری آغاز می‌کنیم، و این، ناشی از دو علت است: اول بفرنجی خود هندسه فضایی که نیاز به تجسم دارد، باید شکل‌های فضایی را روی صفحه رسم کرد، باید بتوان در روی شکلی که رسم شده است، بخش قابل دیدن را که روبروی ماست، از بخش پنهانی که در «پشت» جسم قرار دارد، تشخیص داد، باید خط‌های راستی را که بازایه حاده یا منفرجه به هم رسیده‌اند، قائمه به حساب آورد و بسیاری چیزهای دیگر. ولی اشکال دوم، به نحوه برخورد ما با هندسه فضایی مربوط می‌شود. در کتابهای درسی، برای درک مفهومیهای اصل هندسه فضایی و اصل موضوعهای آن، تلاش اندکی شده است که، در مقایسه با هندسه روی صفحه، بسیار ناقص است. البته، این وضع، کاملاً طبیعی است، چرا که صفحه‌های محدود کتابهای درسی و ساعت‌های محدودی که برای تدریس آنها در نظر گرفته شده‌است، فرصتی برای طرح این موضوعها، به نحوی که شایسته باشد، به دست نمی‌دهد.

این مقاله، برای دانش‌آموزان علاقه‌مندی تهیه شده‌است که می‌خواهند، این کمبود را، جبران کنند و در تصورهای فضایی و در رسم شکل‌های فضایی مهارت بیشتری به دست آورند. متن را با دقت بخوانید، به پرسشها، با دقت پاسخ دهید و مسأله‌ها را به طور کامل و تا آخر حل کنید. شکلها را روشن و دقیق رسم کنید؛ خط‌های راستی را که در میدان دید شما قرار دارند، از خط‌های راستی که در پشت شکل پنهان شده‌اند، جدا کنید (بهتر است، خط‌های راست پنهان را، نقطه چین رسم کنید)؛ مسأله‌های نمونه حل شده‌اند، هم به حل و هم به شکلها توجه کنید؛ به یاد داشته باشید که رسم درست شکل، کار شما را در استدلال و در حل مسأله ساده می‌کند. در ضمن، این مقاله می‌تواند به دبیران هندسه هم کمک کند تا درس خود را بر بنیای مستحکمتر و علمیتتری قرار دهند.

اصل موضوع ۲. خط راستی که از دو نقطه واقع بر صفحه بگذرد،  
براین صفحه قرار دارد (اصل موضوع خط راست و صفحه).

اگر خط راست  $a$  بر صفحه  $\alpha$  منطبق باشد، بانماد  $a \subset \alpha$  نشان  
داده می‌شود.

اصل موضوع خط راست و صفحه، به ما امکان می‌دهد تا، در  
عمل، بتوانیم سطح بودن سطح هر فراورده‌ای را مورد تحقیق قرار  
دهیم. لبه خط کش دقیقی را، درجه‌های مختلف، روی سطح فراورده  
مورد نظر قرار می‌دهیم و تحقیق می‌کنیم، آیا موردی پیدا می‌شود که  
بین لبه خط کش و سطح، روزه‌ای وجود داشته باشد!

خط راست می‌تواند تنها یک نقطه مشترک با صفحه داشته باشد.  
وضع، برای هر خط راستی که شامل نقطه‌ای از صفحه و نقطه‌ای در  
بیرون صفحه باشد، چنین است. در این حالت گویند، خط راست  
صفحه را قطع کرده است.

اصل موضوع ۳. اگر دو صفحه مختلف در نقطه‌ای مشترک باشند،  
آن وقت در یک خط راست مشترک خواهند بود (اصل موضوع برخورد  
دو صفحه).

دو صفحه‌ای را که در یک خط راست مشترک باشند، صفحه‌های  
مقاطع گویند. به عنوان نمونه‌ای از دو صفحه متقاطع، می‌توان دو  
دیوار مجاور اطاق را در نظر گرفت.

اصل موضوعها، ویژگیهای اصلی فضای فیزیکی را منعکس  
می‌کنند. این ویژگیها را، بشر، در طول هزاران سال مشاهده کرده است.  
بنابراین، هندسه فضایی دبیرستانی، بر پایه تجربه زندگی انسانها قرار  
دارد و به همین مناسبت، نتیجه گیریهای هندسه فضایی کاربرد  
گسترده‌ای در عمل پیدا می‌کنند.

### پریشها و مسأله‌ها

۱. کدام یک از این شکلها، صفحه یا بخشی از یک صفحه‌اند: (۱)
- دایره، (۲) مربع، (۳) مکعب، (۴) کره، (۵) متوازی‌الاضلاع، (۶)
- متوازی‌السطوح، (۷) مکعب مستطیل، (۸) خط شکسته، (۹) زاویه،

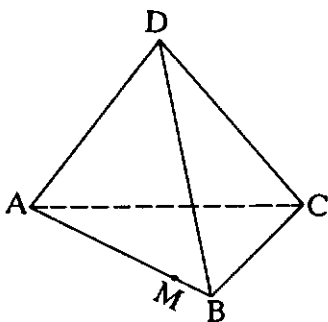
۱۰. اجتماعی از سه نیم خط راست با مبدا مشترک.  
۲. مفهومهای تازه‌ای از هندسه را نام ببرید که بتوان آنها را  
تعریف کرد. این تعریفها را تنظیم کنید.

۳. برای تعریف (۱) دایره، (۲) خط شکسته، (۳) نیم خط راست و  
(۴) خطهای راست موازی، از کدام مفهومهای اصلی هندسه استفاده  
می‌شود؟

۴. این گزاره‌ها را با استفاده از نمادهای  $\in$  و  $\notin$  بنویسید: (۱) نقطه  
 $M$  به صفحه  $\alpha$  تعلق دارد؛ (۲) نقطه  $B$  به صفحه  $\alpha$  تعلق ندارد؛ (۳)  
صفحه  $\beta$  از نقطه  $P$  می‌گذرد؛ (۴) صفحه  $\beta$  از نقطه  $Q$  نمی‌گذرد؛ (۵)  
خط راست  $a$  از نقطه  $A$  می‌گذرد؛ (۶) خطهای راست  $a$  و  $b$ ، از نقطه  
 $C$  می‌گذرند.

۵. (۱) صفحه  $\alpha$  و متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  مفروض‌اند. آیا  
ممکن است صفحه  $\alpha$ ، تنها از سه رأس متوازی‌الاضلاع بگذرد؟ (۲)  
دو نقطه از محیط دایره و مرکز آن، بر صفحه‌ای قرار دارند، آیا  
درست است بگویم: هر نقطه‌ای از محیط دایره بر صفحه واقع است؟  
۶. (۱) آیا از چهار نقطه دلخواه فضا، می‌توان صفحه‌ای گذراند؟  
(۲) چرا تکیه گاه دوربین عکاسی را، سه پایه می‌سازند، نه دو پایه یا  
چهار پایه؟

۷. در شکل ۱، هر می با قاعده مثلثی داده شده است (یک چهار  
وجهی) با استفاده از نام رأسها، وجه‌های آن را چگونه نشان دهیم؟



شکل ۱

۸. با در اختیار داشتن یک صفحه واقعی، چگونه می‌توان کیفیت  
یک خط کش را تحقیق کرد؟ این تحقیق بر چه اساسی است؟

از نقطه‌های  $M$ ،  $B$  و  $C$  صفحه‌ای می‌گذرانیم (اصل موضوع صفحه)؛ در ضمن، خط راست  $a$ ، روی این صفحه است (اصل موضوع خط راست و صفحه). به این ترتیب، وجود صفحه‌ای که از  $a$  و  $M$  می‌گذرد، روشن شد. این صفحه را  $\alpha$  می‌نامیم و ثابت می‌کنیم، منحصر به فرد است. در واقع، هر صفحه‌ای که از خط راست  $a$  و نقطه  $M$  بگذرد، باید شامل نقطه‌های  $B$  و  $C$  و  $M$  باشد. ولی از این سه نقطه، بیش از یک صفحه عبور نمی‌کند (اصل موضوع صفحه).

**نتیجه ۲.** از دو خط راست متقاطع، می‌توان یک صفحه، و تنها یک صفحه، عبور داد.

**اثبات.** این نتیجه، کاملاً شبیه اثبات نتیجه ۱ است. خودتان این اثبات را توضیح دهید.

پیش از آن که به نتیجه دیگری پردازیم، آنچه را درباره خطهای راست موازی، در هندسه مسطحه خوانده‌ایم، به یاد بیاورید، چرا که، برای مطالعه درس «توازی در فضا» اهمیت دارد. تعریفی که برای خطهای راست موازی در هندسه مسطحه دیده‌ایم، در هندسه فضایی هم به قوت خود باقی است: دو خط راست  $a$  و  $b$  موازی گوئیم، وقتی که در یک صفحه باشند، نقطه مشترکی نداشته باشند و برهم منطبق نباشند. در هندسه مسطحه، با اصل موضوع توازی آشنا شده‌ایم: از هر نقطه صفحه، نمی‌توان بیش از یک خط راست، موازی با خط راست مفروض رسم کرد. اصل موضوع توازی، برای هر صفحه‌ای از فضا درست است.

**نتیجه ۳.** از دو خط راست موازی، می‌توان یک صفحه منحصر به فرد عبور داد.

**اثبات.** وجود صفحه، نتیجه‌ای است از تعریف خطهای راست موازی. اکنون فرض می‌کنیم، از این دو خط راست، صفحه دیگری هم گذشته باشد. روی یکی از آنها، نقطه‌های  $A$  و  $B$ ، و روی دیگری نقطه  $C$  را در نظر می‌گیریم؛ معلوم می‌شود که از سه نقطه  $A$

۹. نقطه  $M$  روی پاره خط راست  $AB$  از چهار وجهی  $ABCD$  (شکل ۱) داده شده است. با استفاده از نمادهای  $C$  و  $\angle$  نشان دهید: (۱) خط راست  $AB$  متعلق به صفحه  $ABC$  است، (۲) خط راست  $CM$  بر صفحه  $ABC$  است، (۳) خط راست  $DM$  روی صفحه  $ABC$  نیست.

۱۰. فصل مشترک صفحه‌هایی را نام ببرید که از وجه‌های چهاروجهی  $ABCD$  (شکل ۱) می‌گذرند. صفحه‌ای که از نقطه‌های  $C$ ،  $D$  و  $M$  می‌گذرد، از کدام وجه چهاروجهی می‌گذرد؟ آن را چگونه نشان می‌دهند؟ فصل مشترک این صفحه‌ها، با وجه‌های دیگر چهاروجهی مشخص کنید.

۱۱. دو صفحه  $\alpha$  و  $\beta$  که برهم منطبق نیستند، از نقطه‌های  $A$  و  $B$  می‌گذرند. ثابت کنید:  $\alpha \cap \beta = (AB)$ .

۱۲. در چهاروجهی  $ABCD$ ، نقطه‌های  $M \in [AB]$  و  $N \in [AD]$  را در نظر می‌گیریم. مطلوب است فصل مشترک صفحه‌های: (۱)  $ABD$  و  $CMN$ ، (۲)  $CMN$  و  $ABC$ ، (۳)  $ADC$  و  $CMN$ .

۱۳. مکعب  $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$  را روی یک صفحه نشان دهید و دو نقطه دلخواه  $M$  و  $N$  را، در درون وجه  $ABCD$  انتخاب کنید. فصل مشترک این صفحه‌ها را مشخص کنید: (۱)  $ABC$  و  $A_1MN$ ، (۲)  $B_1MN$  و  $BCC_1$ ، (۳)  $CC_1D$  و  $C_1MN$ .

۱۴. (۱) با چه شرطی، دو صفحه  $MAB$  و  $MDC$  متقاطع اند؟ (۲) فصلی مشترک صفحه‌های  $ABD$  و  $ACD$  کدام است؟

### ۳. نتیجه‌های حاصل از اصل موضوعها

برخی نتیجه‌های حاصل از این اصل موضوعها را ثابت می‌کنیم. این نتیجه‌ها، برای اثبات قضیه‌ها و حل مسأله‌ها، اهمیت زیادی دارند.

**نتیجه ۱.** از یک خط راست و نقطه‌ای که متعلق به آن نیست، همیشه می‌توان یک صفحه، و تنها یک صفحه، عبور داد.

**اثبات.** خط راست  $a$  و نقطه  $M$ ، واقع در بیرون آن را در نظر می‌گیریم. دو نقطه  $B$  و  $C$  را روی خط راست  $a$  انتخاب می‌کنیم.

و B و C، دو صفحه گذشته است؛ ولی این، اصل موضوع صفحه را نقض می‌کند.

مسأله ثابت کنید، از هر نقطه فضا، می‌توان تنها یک خط راست، موازی با خط راست مفروض رسم کرد.

حل. خط راست  $a$  و نقطه  $M$  را در نظر می‌گیریم. دو حالت پیش می‌آید: الف)  $M \notin a$ . خط راست مجهول باید روی صفحه  $\alpha$ ، شامل خط راست  $a$  و نقطه  $M$ ، باشد. با توجه به نتیجه ۱، صفحه  $\alpha$  وجود دارد و منحصر به فرد است. از هندسه مسطحه می‌دانیم، در این صفحه، تنها یک خط راست  $b$  وجود دارد که از  $M$  می‌گذرد و با خط راست  $a$  موازی است. ب)  $M \in a$ . در این حالت، تنها خط راستی که از  $M$  بگذرد و با  $a$  موازی باشد، خود خط راست  $a$  است.

### پرسشها و مسأله‌ها

۱۵. نقطه  $M$  روی  $[AB]$  از چهار وجهی  $ABCD$  قرار دارد. چند صفحه می‌توان عبور داد: ۱) از  $(DC)$  و  $M$ ؛ ۲) از  $(AB)$  و  $M$ ؟

۱۶. چهار وجهی  $ABCD$  را رسم کنید و خط راست  $a$  را طوری در نظر بگیرید که یالهای  $AD$  و  $CD$  را قطع کند. فصل مشترک صفحه‌ای را که از خط راست  $a$  و نقطه  $B$  گذشته است: ۱) با  $(ABD)$ ؛ ۲) با  $(BCD)$  پیدا کنید.

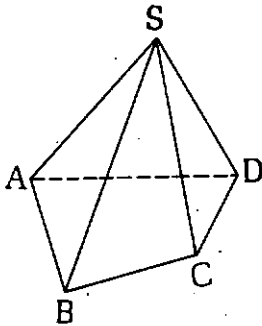
۱۷. خط راست  $a$  و نقطه  $M$  مفروض‌اند. چند صفحه می‌توان از این خط راست و نقطه گذراند؟

۱۸. ۱) چهار نقطه داده شده‌اند که بر صفحه واقع نیستند. ثابت کنید، نمی‌توان بین این چهار نقطه، سه نقطه پیدا کرد که بر یک خط راست واقع باشند؛ ۲) آیا عکس این حکم درست است؟

۱۹. دو خط راست داده شده‌اند که در نقطه  $O$  یکدیگر را قطع کرده‌اند. ۱) ثابت کنید، هر خط راستی که این دو خط راست را قطع کند و از نقطه  $O$  نگذرد، با این دو خط راست در یک صفحه قرار دارد؛ ۲) آیا اگر جمله «از نقطه  $O$  نگذرد» را حذف کنیم، باز هم به گزاره درستی می‌رسیم؟

۲۰. مجموعه‌ای از نیم خطهای راست، که آغازی مشترک دارند، در اختیار داریم و می‌دانیم هیچ سه نیم خطی روی یک صفحه نیستند. چند صفحه می‌توان رسم کرد، به نحوی که هر کدام از آنها، شامل دو نیم خط راست باشند. به شرطی که تعداد نیم خطهای راست ۱) ۳، ۲) ۴، ۳)  $n$  باشد؟

۲۱. هرم  $SABCD$  را، با قاعده چهارضلعی رسم کنید (شکل ۲). ۱) فصل مشترک قاعده  $ABCD$  را با صفحه‌هایی پیدا کنید که از  $SA$  و  $SC$ ، یا از  $SB$  و  $SD$  می‌گذرند، ۲) فصل مشترک دو صفحه اخیر را پیدا کنید.



شکل ۲

۲۲. ۱) خط شکسته  $ABCD$  داده شده است؛ در ضمن  $M = (AC) \cap (BD)$ . ثابت کنید، این خط شکسته، شکلی مسطحه است؛ ۲) تجاری می‌خواهد به کمک دو نخ تحقیق کند، آیا میز چهار پایه‌ای را که ساخته است، روی کف اطاق، استوار می‌ایستد یا نه؟ چگونه؟

۲۳. دو خط راست موازی و مختلف داده شده‌اند. ثابت کنید، همه خطهای راستی که هر دو خط راست مفروض را قطع کرده‌اند، روی یک صفحه قرار دارند.

### ۴. ساختن مقطع چندوجهیها و حل مسأله‌های مربوط به آنها

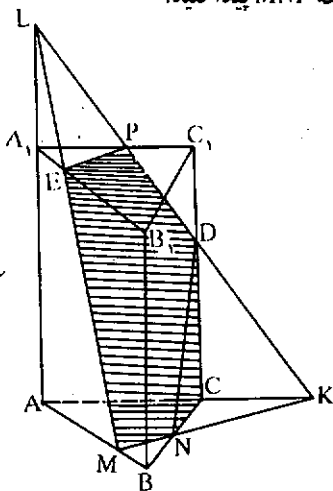
تصور چندوجهی را در هندسه دیرستانی، به عنوان یک جسم هندسی که سطح آن به وسیله چند ضلعیها پوشیده شده باشد، به دست آورده‌اید. فصل مشترک یک چندوجهی، و مثلاً چهار وجهی  $ABCD$  (شکل ۱) را، با صفحه  $\alpha$  در نظر می‌گیریم؛ این فصل

راست NP و AC قرار دارد؛ از این دو خط راست، NP روی صفحه « و AC روی صفحه ABC است (هر دو خط راست، متعلق به صفحه ABC هستند و بنا به شرط مسأله، باهم موازی نیستند). بارسم خط راست MK، نقطه Q، برخورد آن را با یال BC پیدا می‌کنیم. به این ترتیب، رأس چهارم مقطع مجهول MNPQ است.

صورت مسأله و حل آن را به صورت نمادی تنظیم می‌کنیم. می‌دانیم:  $\Phi = ABCD$  یک چهار وجهی است و  $M \in [AB]$ ،  $N \in [AD]$ ،  $P \in [CD]$  و  $(NP) \parallel (AC)$ . مطلوب است:  $\Phi \cap (MNP)$ :

حل. (۱)  $[NP]$ ، (۲)  $[MN]$ ، (۳)  $(NP) \cap (AC) = K$ ، (۴)  $(MK) \cap (BC) = Q$ ، (۵)  $[PQ]$  چهار ضلعی MNPQ مقطع مجهول است.

مسأله ۲. روی یالهای AB، BC،  $A_1C_1$  از منشور قائم  $ABC A_1 B_1 C_1$  (شکل ۲)، به ترتیب، نقطه‌های M، N، P داده شده است؛ در ضمن، خط راست MN با خط راست AC موازی نیست. مقطع منشور را با صفحه MNP پیدا کنید.



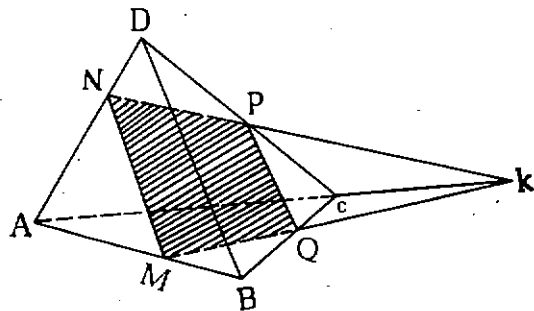
شکل ۲

بخشی از راه حل مسأله را نمی‌آوریم، زیرا هیچ اختلافی با حل

مشترک، ممکن است مجموعه‌ای تهی، یک نقطه، یک خط راست و یا یک چند ضلعی باشد. اگر فصل مشترک چند وجهی با صفحه، یک چند ضلعی باشد، این چند ضلعی را، مقطع چندوجهی گویند. در این جا، دو مسأله‌ای را که به ساختن مقطع یک چندوجهی با یک صفحه مربوط می‌شوند، حل کرده‌ایم. اصطلاح «ساختن»، در این جا هم، به همان معنایی است که در هندسه مسطحه به کار می‌رود. «ساختن» یا «رسم» باید تنها به کمک خط کش و پرگار انجام گیرد.

مسأله ۱. روی یالهای AB، AD و CD از چهاروجهی ABCD (شکل ۳)، به ترتیب، نقطه‌های M، N، P را انتخاب کرده‌ایم، به نحوی که خطهای راست NP و AC باهم موازی نباشند. مقطع چهار وجهی را با صفحه‌ای پیدا کنید که از این نقطه‌ها می‌گذرد.

حل. صفحه‌ای را که از نقطه‌های M، N و P می‌گذرد، « می‌نامیم. برای ساختن مقطع، کافی است فصل مشترک صفحه « را با وجه‌های چهاروجهی پیدا کنیم. از اصل موضوع برخورد دو صفحه و اصل موضوع خط راست و صفحه استفاده می‌کنیم، در این صورت، پیدا کردن فصل مشترک یک وجه با صفحه «، منجر به پیدا کردن دو نقطه‌ای می‌شود که هم به صفحه « و هم به صفحه این وجه تعلق داشته باشند. با توجه به این نکته، پاره خط راست NP، فصل مشترک وجه DAC با صفحه « و، همچنین، پاره خط راست MN، فصل مشترک صفحه « با وجه ABD را رسم می‌کنیم. ولی در صفحه ABC، تنها نقطه M را می‌شناسیم که به صفحه « تعلق دارد. نقطه دوم، عبارت است از نقطه K که در محل برخورد خطهای



شکل ۳

مسأله ۱ ندارد.  $\alpha = (MNP)$  می‌گیریم. فصل مشترک  $\alpha$  باوجه  $ABC$  عبارت است از پاره خط راست  $MN$ . نقطه  $P$  روی صفحه  $\alpha$  و روی صفحه وجه  $ACC_1A_1$  است. همین دو صفحه، در نقطه  $K$ ، محل برخورد خطهای راست  $MN$  و  $AC$ ، به هم می‌رسند. با رسم خط راست  $KP$ ، نقطه‌های

$$D = (KP) \cap (CC_1), L = (KP) \cap (AA_1)$$

به دست می‌آید. نقطه  $E$ ، محل برخورد خط راست  $LM$  و یال  $A_1B_1$  است. پنج ضلعی  $MNDPE$ ، مقطع مجهول است.

### پرسشها و مسأله‌ها

۲۴. تعداد ضلعهای مقطع (۱) چهار وجهی، (۲) منشور با قاعده مثلثی، چه عددی می‌تواند باشد؟

۲۵. چهار وجهی  $ABCD$  داده شده است. می‌خواهیم مقطع آن را با صفحه‌ای پیدا کنیم که از نقطه‌های (۱)  $N \in [AB]$ ،  $M \in [BC]$ ،  $R \in [BD]$ ،  $P \in [AC]$ ،  $D, B$  (۲)  $Q \in [AC]$ ،  $N \in [BC]$ ،  $[DC]$  گذشته است.

۲۶. (۱) مقطع چهار وجهی  $ABCD$  را با صفحه‌ای که از نقطه‌های  $B$ ،  $M \in [AD]$  و  $N \in [DC]$  می‌گذرد، پیدا کنید؛ (۲) مساحت این مقطع را به دست آورید، به شرطی که طول هر یک از یالهای چند وجهی برابر  $a$  و نقطه‌های  $M$  و  $N$  در وسط یالهای متناظر باشند.

۲۷. (۱) مقطع چهار وجهی  $ABCD$  را با صفحه‌ای که از یال  $DC$  و نقطه  $M$  واقع در درون وجه  $ABC$  می‌گذرد، پیدا کنید؛ (۲)

برابر  $a$  باشد و  $(CM)$  از وسط  $[AB]$  بگذرد.

۲۸. چهار وجهی  $ABCD$  مفروض است. مقطع آن را با صفحه‌ای پیدا کنید که از خط راست  $DD_1$  و نقطه  $M$  واقع در درون وجه  $ADC$  گذشته است ( $D_1$ ، نقطه‌ای از یال  $DC$  است).

۲۹. صفحه  $\alpha$  به وسیله سه نقطه‌ای که، به ترتیب، روی یالهای  $DA$ ،  $DB$  و  $DC$  از چهار وجهی  $ABCD$  قرار دارند، مشخص شده است. اگر  $M$  نقطه‌ای در درون وجه  $ABC$  باشد، نقطه برخورد صفحه  $\alpha$  را با خط راست  $DM$  پیدا کنید.

۳۰. منشور قائم  $ABCA_1B_1C_1$  مفروض است. مقطع این منشور را با صفحه‌ای که از رأس  $B$  و نقطه‌های  $M$  و  $N$ ، به ترتیب، متعلق به یالهای  $A_1B_1$  و  $CC_1$  می‌گذرد، پیدا کنید.

۳۱. مطلوب است مقطع منشور قائم  $ABCA_1B_1C_1$ ، با صفحه  $MNP$ ، به شرطی که  $M \in [AA_1]$ ،  $N \in [BB_1]$ ،  $P \in [A_1C_1]$ .

۳۲. (۱) مقطع منشور قائم  $ABCA_1B_1C_1$  را با صفحه‌ای پیدا کنید که از خط راست  $AB$  و نقطه  $K$  واقع در درون پاره خط راست  $AC$  گذشته است؛ (۲) محیط و مساحت این مقطع را پیدا کنید، به شرطی که طول هر یال منشور برابر  $a$  باشد.

۳۳. صفحه  $\alpha$  به وسیله نقطه‌های  $M$ ،  $N$  و  $P$ ، به ترتیب، متعلق به یالهای  $AA_1$ ،  $BB_1$  و  $CC_1$  از منشور قائم  $ABCA_1B_1C_1$  مشخص شده است. نقطه  $L$ ، در درون وجه  $A_1B_1C_1$  است. نقطه برخورد صفحه  $\alpha$  را با خط راست  $CL$  پیدا کنید.

ادامه دارد...

رویا و فاطمی

بیرون نتوانند آمد؟ من همیشه این گفته را پسندیده‌ام که چنین شیاری در حکم گوری است، اما دراز تر؛ آماده بودن برای تبعیت از دگرگونیها خیلی اهمیت دارد.

فرض و اسطوره در فیزیک نظری. هرمان باندی

رضا منصوری، احمد بیرشک

ما در عصری زندگی می‌کنیم که سرعت تغییر چنان است که شاید هرگز به این بزرگی نبوده است. ما چگونه جوانان را برای این سرعت تغییر آماده کنیم؟ چگونه مراقبت کنیم که بیش از حد «متخصص» نشوند، و در مسیر خود، در شیاری نیفتند که از آن