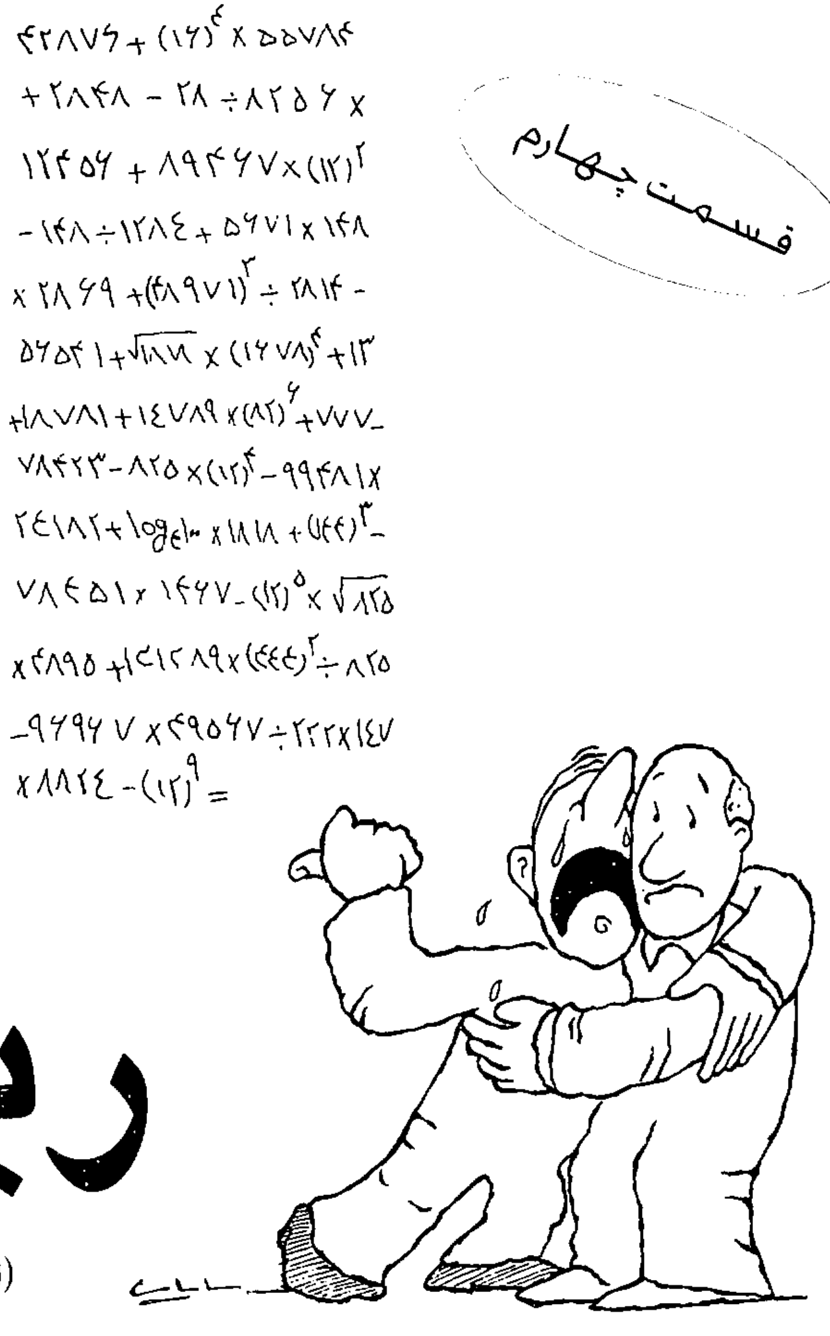
معمّاهایی با ماهیت ریاضی

قسمت چهارم

• هوشنگ شرقی



(ادامهٔ بحث معادله‌های سیّاله)

در شمارهٔ پیش، معادله‌های سیّالهٔ درجهٔ اوّل و معمّاهایی بر اساس آن بررسی شد. اینک دنبالهٔ بحث :

ب ـ سایر معادله‌های سیّاله : در بند الف این قسمت، معمّاهایی که پاسخ آنها با حلّ معادله‌های سیّالهٔ درجهٔ اوّل به دست می‌آید، بررسی شد. اینک به انواع دیگری از معادله‌های سیّاله و معمّاهایی در ارتباط با آنها می‌پردازیم.

ـ معادلهٔ سیّالهٔ هموگرافیک : فرم کلی این معادله، به صورت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ می‌باشد. همان‌طورکه می‌دانید، نمودار این تابع، با دامنهٔ تعریف اعداد حقیقی یک هذلولی می‌باشد ؛ در این‌جا منظور ما به دست آوردن مختصات نقاطی از این هذلولی است که مختصات آنها با عدد صحیح (در بیشتر معمّاها با اعداد طبیعی) بیان شده باشد. با یک مثال ساده شروع کنیم.

مثال: تعداد نقاط با مختصات صحیح روی منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۳}{x-۱}$ را به دست آورید.

حل: روشن است برای آن‌که y عدد صحیح باشد، لازم است که $x-۱|۳$ ، یعنی ۳ بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد. اما تنها مقسوم‌علیه‌های ۳، عددهای ±۱ و ±۳ می‌باشند و بنابراین معادله،

چهار جواب دارد که به صورت زیر به‌دست می‌آیند :

$x-۱=۱ \quad \Rightarrow x=۲ \quad , \quad y=۳$

$x-۱=-۱ \quad \Rightarrow x=۰ \quad , \quad y=-۳$

$x-۱=۳ \quad \Rightarrow x=۴ \quad , \quad y=۱$

$x-۱=-۳ \quad \Rightarrow x=-۲ \quad , \quad y=-۱$

یعنی چهار نقطهٔ $A(۲,۳)$ ، $B(۰,-۳)$ ، $C(۴,۱)$ و $D(-۲,-۱)$ با مختصات صحیح، روی منحنی $y=\frac{۳}{x-۱}$ وجود دارد. در حالت کلی، برای حلّ معادلهٔ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ابتدا دوطرف معادله را در C ضرب نموده و آن‌گاه، صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم و به کمک خارج‌قسمت و باقیمانده، کسر را به صورت تفکیک شده می‌نویسیم و جوابهای صحیح آن را به دست می‌آوریم. به مثال زیر توجه کنید :

مثال: حلّ معادلهٔ سیّالهٔ $y=\frac{۲x-۳}{۳x-۲}$: دوطرف تساوی را در ۳ ضرب می‌کنیم :

$$۳y=\frac{۶x-۹}{۳x-۲}=\frac{۲(۳x-۲)-۵}{۳x-۲}=۲-\frac{۵}{۳x-۲}$$

(از تقسیم $۶x-۹$ بر $۳x-۲$ ، خارج قسمت ۲ و باقیمانده -۵ به‌دست می‌آید.)

از برابری $۳y=۲-\frac{۵}{۳x-۲}$ بر می‌آید که $(۳x-۲)|۵$ و تنها مقسوم‌علیه‌های عدد ۵، ±۱ و ±۵ می‌باشند و بنابراین، حالتهای زیر بررسی می‌شوند :

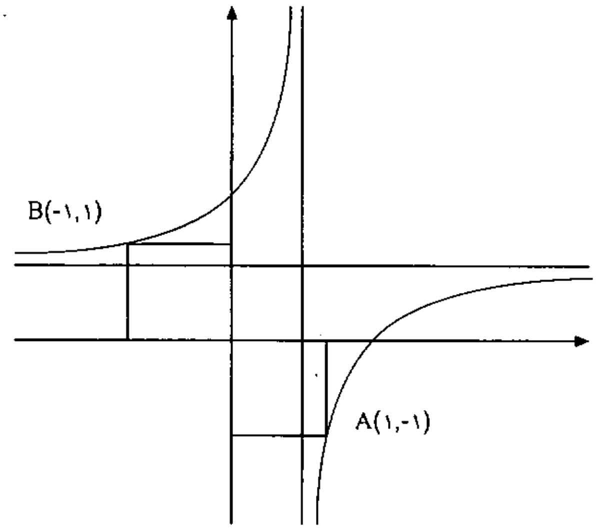
$۳x-۲=۱ \quad \Rightarrow x=۱ \quad , \quad y=-۱$

$۳x-۲=-۱ \quad \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$ غیر قابل قبول

$۳x-۲=۵ \quad \Rightarrow x=\frac{۷}{۳}$ غیر قابل قبول

$۳x-۲=-۵ \quad \Rightarrow x=-۱ \quad , \quad y=۱$

یعنی تنها دو نقطهٔ $A(۱,-۱)$ و $B(-۱,۱)$ با مختصات صحیح روی منحنی تابع $y=\frac{۲x-۳}{۳x-۲}$ وجود دارد که در شکل نیز مشخص شده‌اند.



مثال: تعداد نقاط با مختصات صحیح را روی منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^۲+x-۱}{x-۲}$ را بیابید.

حل:

صورت این کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم :

$$\begin{array}{l|l} x^۲+x-۱ & x-۲ \\ \cline{2-2} \underline{-x^۲\pm۲x} & x+۳ \\ ۳x-۱ & \\ \underline{-۳x\pm۶} & \\ \quad ۵ & \end{array}$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$y=\frac{x^۲+x-۱}{x-۲}=x+۳+\frac{۵}{x-۲}$$

و چون x و y اعداد صحیح می‌باشند، لازم است که $(x-۲)|۵$ و لذا تنها یکی از حالتهای زیر می‌تواند وجود داشته باشد :

$x-۲=۱ \quad \Rightarrow \quad x=۳ \quad , \quad y=۱۱$

$x-۲=-۱ \quad \Rightarrow \quad x=۱ \quad , \quad y=-۱$

$x-۲=۵ \quad \Rightarrow \quad x=۷ \quad , \quad y=۱۱$

$x-۲=-۵ \quad \Rightarrow \quad x=-۳ \quad , \quad y=۱$

و بنابراین چهار نقطهٔ $A(۳,۱۱)$ ، $B(۱,-۱)$ ، $C(۷,۱۱)$ و $D(-۳,۱)$ روی منحنی تابع $y=\frac{x^۲+x-۱}{x-۲}$ با مختصات صحیح

وجود دارند و جالب است که این چهار نقطه رئوس یک متوازی‌الاضلاع نیز هستند که AB و CD قطرهای آن هستند.

اینک به مثال کاربردی زیر توجه کنید :

مثال: چند مستطیل وجود دارد که طولهای اضلاع آنها، اعداد طبیعی بوده و عدد مساحت آن، ۲۰ واحد از عدد محیطشان بیشتر باشد؟

حل: اگر طول و عرض این مستطیلها را x و y فرض کنیم، بر اساس فرض مسأله می‌نویسیم :

$$xy = ۲۰ + ۲x + ۲y$$

و اگر از این برابری، y را برحسب x به‌دست آوریم، به تساوی زیر می‌رسیم :

$$y = \frac{۲x + ۲۰}{x - ۲}$$

که یک معادلهٔ سیّالهٔ هموگرافیک می‌باشد و با روش حلّ مسائل قبل، به صورت زیر حل می‌شود :

$$y = \frac{۲(x-۲)+۲۴}{x-۲} = ۲ + \frac{۲۴}{x-۲} \Rightarrow x-۲|۲۴$$

مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۴ عبارت است از : ۱±، ۲±، ۳±، ۴±، ۶±، ۱۲± و ۲۴± و با توجه به این که x و y اعدادی طبیعی هستند، تنها جوابهای قابل قبول، جوابهای زیر می‌باشند :

$$\begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲۶ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۴ \\ y = ۱۴ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۵ \\ y = ۱۰ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۸ \end{cases}$$

یعنی چهار جواب متمایز برای مسأله وجود دارد.

معادله‌های سیّالهٔ دو مجذوری

معادله‌های سیّاله به فرم $x^۲ \pm y^۲ = k$ را که در آن k عددی حقیقی می‌باشد، معادلهٔ سیّالهٔ دومجذوری می‌نامیم. هرگاه علامت بین $x^۲$ و $y^۲$ ، منفی باشد، حلّ این معادله بسادگی و با تجزیهٔ $x^۲ - y^۲$ به حاصلضرب $(x-y)(x+y)$ حل می‌شود. به یک مثال توجه کنید :

مثال: پاسخهای صحیح معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = ۸$ را به دست آورید.

حل: می‌نویسیم : $(x-y)(x+y) = ۸$

چون x و y عددهای صحیح هستند، بنابراین x+y و x − y نیز صحیح می‌باشند و تنها جفت عددهای صحیح که حاصلضرب آنها مساوی ۸ می‌باشد، عبارت است از (۲,۴)، (۴,۲) ، (۴−,۲−) ، (۲−,۴−) ، (۱,۸) ، (۸,۱) ، (۸−,۱−) و (۱−,۸−) ، از طرفی اگر $x + y = a$ و $x - y = b$ فرض شوند، واضح است که $a + b = ۲x$ ، یعنی a+b باید زوج باشد ؛ پس فقط چهار زوج اول، قابل قبول می‌باشند که به دستگاه‌های معادله‌های زیر می‌انجامند :

$$\begin{cases} x + y = ۴ \\ x - y = ۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = ۲ \\ x - y = ۴ \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -۴ \\ x - y = -۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -۲ \\ x - y = -۴ \end{cases}$$

از حلّ این دستگاه‌های به زوجهای (۳,۱) ، (۳,۱−) ، (۳−,۱−) و (۳−,۱) برای (x,y) می‌رسیم که تنها جوابهای قابل قبول برای معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح می‌باشند.

مثال: پاسخهای صحیح معادلهٔ زیر را به دست آورید :

$$x^۲ - y^۲ + ۴x - ۶y + ۲ = ۰$$

حل: به ترتیب زیر، عمل می‌کنیم :

$$(x^۲ + ۴x) - (y^۲ + ۶y) + ۲ = ۰$$

و با مربع نمودن عبارتهای داخل پرانتزها به دست می‌آید :

$$(x+۲)^۲ - ۴ - (y+۳)^۲ + ۹ + ۲ = ۰$$

$$(x+۲)^۲ - (y+۳)^۲ = -۷$$

$$(x+۲-y-۳)(x+۲+y+۳) = -۷$$

$$(x-y-۱)(x+y+۵) = -۷$$

اکنون با توجه به این که تنها جفت عددهایی که حاصلضرب آنها ۷− شود، (۱,۷−) ، (۷−,۱) ، (۷,۱−) و (۱−,۷) می‌باشند، به دستگاه‌های معادله‌های زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} x - y - ۱ = -۷ \\ x + y + ۵ = ۱ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - ۱ = ۱ \\ x + y + ۵ = -۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - ۱ = -۱ \\ x + y + ۵ = ۷ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - ۱ = ۷ \\ x + y + ۵ = -۱ \end{cases}$$

که معادل با دستگاه‌های زیر می‌باشند :

$$\begin{cases} x - y = -۶ \\ x + y = -۴ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = ۲ \\ x + y = -۱۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = ۰ \\ x + y = ۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = ۸ \\ x + y = -۶ \end{cases}$$

که از حلّ آنها جوابهای زیر برای x و y به دست می‌آیند :

$$\begin{cases} x = -۱ \\ y = -۳ \end{cases} \quad \begin{cases} x = -۵ \\ y = -۷ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۱ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۷ \end{cases}$$

اینک به حلّ یک معمّا می‌پردازیم :

معمّا: چند مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع به طول درست (طبیعی) داریم که طول یک ضلع زاویهٔ قائمهٔ آنها مساوی ۵ سانتیمتر باشد؟

حل: اگر طول وتر این مثلث را a و طولهای اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن را b و c فرض کنیم، با توجه به قضیهٔ فیثاغورس، می‌توان نوشت : $a^۲ = b^۲ + c^۲$

می‌توان فرض کرد $c = ۵$ و در نتیجه :

$$a^۲ = b^۲ + ۲۵ \Rightarrow a^۲ - b^۲ = ۲۵ \Rightarrow (a-b)(a+b) = ۲۵$$

اکنون می‌توان یکی از حالتهای زیر را درنظر گرفت :

$$\begin{cases} a+b=۵ \\ a-b=۵ \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-۵ \\ a-b=-۵ \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=۲۵ \\ a-b=۱ \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-۲۵ \\ a-b=-۱ \end{cases}$$

از حلّ این دستگاه‌ها، جوابهای صحیح زیر برای a و b به دست می‌آیند :

$$\begin{cases} a=۵ \\ b=۰ \end{cases} \quad \begin{cases} a=-۵ \\ b=۰ \end{cases} \quad \begin{cases} a=۱۳ \\ b=۱۲ \end{cases} \quad \begin{cases} a=-۱۳ \\ b=-۱۲ \end{cases}$$

و چون a و b اعداد طبیعی هستند، تنها جواب قابل قبول $a = ۱۳$ و $b = ۱۲$ است ؛ یعنی تنها یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۱۳ و اضلاع زاویهٔ قائمهٔ ۵ و ۱۲ وجود دارد.

ـ معادلهٔ سیّالهٔ $x^۲ + y^۲ = k$: برای حلّ این معادلهٔ سیّاله، ملاحظات زیر الزامی است :

الف ـ در ریاضیات عالی، ثابت می‌کنند که این معادله به ازای مقادیری از k که دارای مقسوم‌علیه‌های اوّل به فرم $۴m + ۳$ (یعنی اعدادی که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۴ مساوی ۳ باشد) باشند، جواب ندارد.

ب ـ همچنین ثابت می‌شود که اگر دو عامل اوّل $p_۱$ و $p_۲$ از k بتوانند به صورت مجموع دو مربع کامل نوشته شوند، حاصلضرب آنها نیز می‌تواند به صورت مجموع دو مربع کامل نوشته شود. برای این منظور، به اتحاد جبری زیر مراجعه می‌کنیم :

$$(a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) = (ac + bd)^۲ + (ad - bc)^۲$$

که در مورد درستی آن، می‌توانید بسادگی تحقیق کنید.

اکنون به کمک ملاحظات بالا می‌توانیم به سادگی جوابهای معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = k$ را با تجزیهٔ k به حاصلضرب عوامل اوّل به‌دست آوریم.

اگر k دارای عامل اوّلی به صورت $۴m + ۳$ باشد، مسأله جواب ندارد و اگر دارای چنین عاملی نباشد، مسأله جواب دارد و پاسخ آن را با تبدیل یک‌یک عوامل اوّل به صورت مجموع دو مربع کامل و سپس ضرب آنها به کمک اتحاد جبری گفته شده، به‌دست می‌آوریم.

با یک مثال ساده، مسأله روشن می‌شود.

مثال: پاسخهای صحیح معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۳۷۷$ را به دست آورید.

حل: از تجزیهٔ ۳۷۷ به حاصلضرب عوامل اوّل، نتیجه می‌شود :

$$۳۷۷ = ۲۹ \times ۱۳$$

چون ۱۳ و ۲۹ هیچ یک به فرم $۴m + ۳$ نمی‌باشند (چرا؟)، پس مسأله جواب دارد. در واقع، با کمی دقت می‌توان نوشت :

$$۲۹ = ۲^۲ + ۵^۲ \;,\; ۱۳ = ۳^۲ + ۲^۲$$

و اکنون به کمک اتحاد جبری گفته شده، نتیجه می‌گیریم :

$$\begin{aligned} ۳۷۷ = ۲۹ \times ۱۳ &= (۲^۲ + ۵^۲)(۳^۲ + ۲^۲) \\ &= (۲\times۳ + ۵\times۲)^۲ + (۲\times۲ - ۵\times۳)^۲ \\ &= (۱۶)^۲ + (-۱۱)^۲ = (-۱۶)^۲ + (۱۱)^۲ \\ &= ۱۶^۲ + ۱۱^۲ = (-۱۶)^۲ + (-۱۱)^۲ \end{aligned}$$

و اگر عددها را جابه‌جا کنیم، نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned} ۳۷۷ &= (۲^۲ + ۵^۲)(۲^۲ + ۳^۲) \\ &= (۲\times۲ + ۵\times۳)^۲ + (۲\times۳ - ۵\times۲)^۲ = \\ &= ۱۹^۲ + (-۴)^۲ = (-۱۹)^۲ + ۴^۲ \\ &= (-۱۹)^۲ + (-۴)^۲ = ۱۹^۲ + ۴^۲ \end{aligned}$$

یعنی برای x و y هشت دسته جواب به صورت زوجهای زیر وجود دارد :

$$(۱۶,-۱۱) \;,\; (-۱۶,۱۱) \;,\; (۱۶,۱۱) \;,\; (-۱۶,-۱۱)$$

$$(۱۹,-۴) \;,\; (-۱۹,۴) \;,\; (-۱۹,-۴) \;,\; (۱۹,۴)$$

و چون عبارت ما نسبت به x و y متقارن می‌باشد، لذا معکوس این زوجها نیز جواب می‌باشد و معادلهٔ سیّاله، جمعاً ۱۶ دسته جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح دارد و به عبارت دیگر، روی دایره به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\sqrt{۳۷۷}$ که معادلهٔ آن $x^۲ + y^۲ = ۳۷۷$ می‌باشد، ۱۶ نقطه با مختصات صحیح وجود دارد. اینک به حلّ یک معمّای تاریخی

می‌پردازیم :

معمّای اعداد فیثاغورسی

یافتن سه‌تایی‌هایی که در رابطهٔ معروف $x^2 + y^2 = z^2$ صدق کنند، از معمّاهای قدیمی ریاضی می‌باشد. یکی از معروفترین این سه‌تایی‌ها که در ذهن اکثر دانش‌آموزان نقش بسته است، (۳،۴،۵) می‌باشد. یعنی ۳، ۴ و ۵ می‌توانند طولهای اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که بدیهی است طول وتر آن ۵ می‌باشد. ($5^2 = 4^2 + 3^2$) یکی از حالتهای خاص حلّ این معادله، آن است که با معلوم بودن طول وتر مثلث قائم الزاویه، طولهای اضلاع زاویهٔ قائمه را به شرط طبیعی بودن آنها، بیابیم. طول وتر می‌تواند عددی طبیعی یا جذر یک عدد طبیعی باشد.

مثال: چند مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد که طول وتر آن مساوی $\sqrt{26}$ باشد؟

حل: در واقع، منظور مسأله، یافتن جوابهای طبیعی معادلهٔ سیّالهٔ $x^2 + y^2 = 26$ می‌باشد و چون عدد ۲۶ به فرم $4m + 3$ نمی‌باشد، بنابراین قابل تبدیل به صورت مجموع دو مربع کامل می‌باشد که با کمی دقت، نتیجه می‌شود $1^2 + 5^2 = 26$ ؛ یعنی یک مثلث قائم‌الزاویه (و تنها یکی) با اضلاع زاویهٔ قائمهٔ ۵ و ۱ وجود دارد که طول وتر آن $\sqrt{26}$ باشد. اگر در مثال قبل، طول وتر $\sqrt{27}$ می‌بود، با توجه به این که $27 = 4m + 3$ $(m = 6)$ لذا مطابق قضیهٔ گفته شده، معادلهٔ سیّالهٔ $x^2 + y^2 = 27$ جواب صحیح (طبیعی) ندارد و لذا هیچ مثلث قائم‌الزاویه با وتر $\sqrt{27}$ وجود ندارد که طولهای اضلاع آن اعدادی طبیعی باشند.

تمرین: طولهای اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را به دست آورید که طولهای اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آنها عددهایی طبیعی بوده و طول وتر آنها مساوی ۱۳ یا ۱۵ یا ۱۷ یا $\sqrt{47}$ باشد.

اکنون حالت عام معادلهٔ سیّالهٔ $x^2 + y^2 = z^2$ را بررسی می‌کنیم و می‌خواهیم سه‌تایی‌های صحیح (یا طبیعی) را به دست آوریم که در رابطهٔ فوق صدق می‌کنند. طی قرنها این معادله و شکل تعمیم‌یافتهٔ آن، ذهن ریاضیدانان بسیاری از ملل مختلف را به خود مشغول داشته است. برای حلّ این معادله، راه حلهای بسیاری ارائه شده است. یکی از این راه حلها چنین است :

می‌نویسیم : $y^2 = z^2 - x^2$ و در نتیجه :

$$y^2 = (z-x)(z+x)$$

اکنون اگر فرض کنیم $z + x = ty$ ، به دست می‌آید :

$$z - x = \frac{y}{t}$$

و از حلّ دستگاه دو مجهولی زیر، z و x به دست می‌آیند :

$$\begin{cases} z + x = ty \\ z - x = \dfrac{y}{t} \Rightarrow 2z = ty + \dfrac{y}{t} \Rightarrow z = \dfrac{(t^2+1)y}{2t} \end{cases}$$

$$2x = ty - \frac{y}{t} \Rightarrow x = \frac{(t^2-1)y}{2t}$$

اما برای آن که x و z عددهای طبیعی باشند، لازم است که y مضرب 2t باشد ؛ یعنی $y = 2kt$ و از آن‌جا به دست می‌آید : $x = k(t^2-1)$ و $z = k(t^2+1)$ ، به ازای جمیع مقادیر k و مقادیر مختلف t، سه‌تایی‌های مختلف x، y و z به دست می‌آیند. یکی از این سه‌تایی‌ها که به ازای $k = 1$ حاصل می‌شود، سه تایی معروف، $x = t^2 - 1$ ، $z = t^2 + 1$ و $y = 2t$ می‌باشد که تساوی معروف زیر را به دست می‌دهد :

$$(t^2+1)^2 = (t^2-1)^2 + (2t)^2$$

که به ازای $t = 2$ سه‌تایی معروف‌تر(۳،۴،۵) را به ما می‌دهد. کشف سه‌تایی اخیر را به شاگردان فیثاغورس نسبت داده‌اند. با کمی محاسبه، می‌توان فرمولهای پیش گفته را کلیت بیشتری بخشید و به سه‌تایی $z = m^2 + n^2$ ، $x = m^2 - n^2$ و $y = 2mn$ رسید که به ازای اعداد صحیح m و n ، اعداد صحیح مختلفی برای x، y و z به ما می‌دهند و در واقع، **حالت کلی‌تر به شکل $z = k(m^2 + n^2)$ ، $x = k(m^2 - n^2)$ و $y = 2kmn$** می‌باشد.

از دستورهای بالا، بلافاصله نتیجه می‌شود که هیچ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع به طول اعداد طبیعی وجود ندارد که طول وتر آن، به فرم $4m + 3$ باشد ؛ مثلاً هیچ مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود ندارد که طولهای اضلاع آن، اعدادی طبیعی بوده و وتر آن به طول ۳۹ باشد.

تعمیم معادلهٔ سیّالهٔ فیثاغورسی به صورت حلّ معادلهٔ سیّالهٔ $x^n + y^n = z^n$ در حالت کلی می‌باشد، و این، مسأله‌ای بسیار جالبتر و تاریخی‌تر از مسألهٔ قبل می‌باشد. پی‌یر دو فرما، ریاضیدان بنام فرانسوی که در سالهای ۱۶۰۱ تا ۱۶۶۵ میلادی می‌زیسته است و آثار و قضایای بسیاری منسوب به او می‌باشد، در حاشیهٔ نسخه‌ای از کتاب دیوفانتوس، در کنار یکی از مسائل، نوشته‌ای

چنین به جای گذاشت : «تجزیهٔ یک مربع مفروض به مجموع دو مربع» حاشیه‌ای که فرما بر آن نوشت، این بود : «تجزیهٔ یک مکعب به مجموع دو مکعب یک توان چهارم به مجموع دو توان چهارم، یا به‌طور کلی هر توان دلخواه به مجموع دو توان با قوّه‌های همانند، ولی بزرگتر از دو غیرممکن است، و من یقیناً برهان تحسین‌آمیزی برای آن یافته‌ام ؛ اما این حاشیه، تنگتر از آن است که گنجایش درج آن را داشته باشد.» به زبان ساده‌تر و با بیان ریاضی، معادلهٔ سیّالهٔ $x^n + y^n = z^n$ به شرط $n > ۲$ هیچ جواب غیرصفر صحیح برای z ، y و x ندارد. این که آیا فرما به راستی، اثبات درستی از این قضیه در اختیار داشته است یا خیر، معمّایی لاینحل می‌باشد ؛ ولی تنگی حاشیهٔ کتاب (!) باعث گردید که در طی بیش از سه قرن متمادی، ریاضیدانان و ریاضی‌خوانان بسیاری، به اثبات این قضیه ترغیب شوند که تلاشهای همهٔ آنها اگر به حلّ کامل این قضیه منجر نشد ؛ اما باعث کشف یافته‌های بسیاری در نظریهٔ اعداد شد.

در حالتهای خاص n=۳،۴،۵،۷ برهانهای مختلفی در همان سالهای نخست (تا سال ۱۸۳۹) ارائه گردید ؛ ولی اثبات قضیه در حالت کلی، مشتاقان دانش ریاضی و نظریهٔ اعداد را تا سال ۱۹۹۳ میلادی (۱۳۷۲ شمسی) چشم‌انتظار باقی گذاشت. طی این سالها از ریاضیدانان نامی تا ریاضی‌خوانان مبتدی، بسیاری در چهار گوشهٔ عالم، برای اثبات قضیه تلاش نمودند، تا این که در این سال، آندرو وایلز راه حلّی برای آن ارائه نمود که در همان زمان رخنه‌ای در آن پیدا شد و این رخنه نیز در سال ۱۹۹۴ (شهریور ۱۳۷۳) توسط وایلز و یکی از شاگردان او به نام تیلر، برطرف شده و اثبات قضیه کامل شد و به این ترتیب، به افسانهٔ نفوذناپذیری آخرین قضیهٔ فرما پایان داده شد. در پایان، این بخش و با هدف کار بیشتر روی مباحث ارائه شده، چند تمرین ارائه می‌شود :

تمرین

۱ـ تعداد نقاط با مختصات صحیح را روی منحنی هریک از روابط زیر به دست آورید :

۱) $y = \dfrac{۲x - ۱}{۳x + ۴}$

۲) $y = \dfrac{x^۲ + ۴x + ۱}{x + ۱}$

۳) $۲xy + ۳x + ۴y - ۱ = ۰$

۴) $۴x^۲ - ۹y^۲ = -۵$

۵) $x^۲ - y^۲ + ۴x - ۲y - ۲ = ۰$

۶) $x^۲ + y^۲ = ۲۵۰$

۷) $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۴y - ۶۷ = ۰$

۲ـ چند مستطیل با اضلاع به طولهای عدد طبیعی وجود دارد که عدد مساحت آنها ۲۰ واحد از عدد محیط آنها بیشتر باشد؟

۳ـ ثابت کنید در دایره‌ای به شعاع ۱۳۷۹ نمی‌توان هیچ مستطیلی با اضلاع به طولهای عدد طبیعی، محاط کرد.

۴ـ با کنار هم قرار دادن تعدادی مربع کوچک به ضلع واحد، یک مربع بزرگ ساخته‌ایم. اکنون با چیدن ۱۳۷۵ مربع دیگر به دور این مربع بزرگ (به طریق مناسب) مربع دیگری حاصل شده است. مربع اولّیه، شامل چند مربع کوچک بوده است؟ آیا ممکن است با چیدن ۱۳۷۸ مربع کوچک به دور یک مربع، مربع دیگری ایجاد شود؟

۵ـ چند مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد که طولهای اضلاع آنها اعدادی طبیعی بوده و طول یک ضلع زاویهٔ قائمهٔ آنها مساوی ۲۴ باشد؟

۶ـ در یک میهمانی، صاحبخانه اعلام می‌کند که با چند نوع نوشیدنی و چند نوع بستنی از میهمانان پذیرایی می‌کند ؛ به‌طوری که تعداد انتخابهای کسی که می‌خواهد یک نوشابه و یک بستنی صرف کند، ۷ انتخاب بیش از تعداد انتخابهای کسی است که می‌خواهد تنها یک نوشابه یا یک بستنی صرف کند. تعداد نوع بستنی و نوشابه‌ای که در این میهمانی سرو می‌شود، چند تا است؟