اشاره:

در قسمت اول معادله‌ی درجه دوم، پس از بررسی حالت‌های ناقص معادله و اثبات فرمول‌های حل معادله، چند نکته‌ی مفید با ذکر مثال‌های متنوع مطرح شدند. اینک قسمت دوم معادله درجه‌ی دوم ارائه می‌شود.

پرویز قندهاری

تجزیه و تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$

فرض می‌کنیم $f(x) = ax^2 + bx + c$، ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ را صفرهای $f(x)$ می‌نامیم. همچنین، Δ یا مبیّن معادله‌ی درجه دوم را Δ یا مبیّن $f(x)$ می‌نامیم.

حالت اول: اگر Δ مثبت باشد، آن‌گاه معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز x' و x'' دارد (فرض می‌کنیم: $x' < x''$). می‌نویسیم:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a}\right]$$

داشتیم: $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ و $x'.x'' = \frac{c}{a}$. پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = a\left[x^2 - (x' + x'')x + x'x''\right]$$

یا

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

این عمل را «تجزیه به حاصل‌ضرب دو عامل درجه اول» گوییم.

مثال: حدود m را چنان بیابید که سه‌جمله‌ای $mx^2 - 2(m-3)x + (m+2)$ را بتوان به صورت حاصل‌ضرب دو عامل درجه اول نوشت.

حل: باید $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ یا $\Delta' = b'^2 - ac > 0$

$$\Delta' = b'^2 - ac > 0 \Rightarrow \Delta' = (m-3)^2 - m(m+2)^2 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m + 9 - m^2 - 2m > 0 \Rightarrow -8m + 9 > 0$$

$$\Rightarrow -8m > -9 \Rightarrow m < \frac{9}{8}$$

حالت دوم: اگر (Δ) برابر صفر باشد، می‌دانیم در این صورت معادله دو ریشه‌ی حقیقی مساوی یا یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد: $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$

در حالت اول که Δ مثبت بود، داشتیم:

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

اکنون $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ پس:

$$f(x) = a(x - x')^2 = a(x - x'')^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

اگر $a > 0$ آن‌گاه عبارت بالا را مربع کامل گویند.

مثال: به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $4x^2 - 2(m-4)x + (m-1)$ را می‌توان به صورت مربع کامل نوشت.

حل: باید Δ یا Δ' را مساوی صفر قرار داد.

$$\Delta' = b'^2 - ac = 0 \Rightarrow (m-4)^2 - 4(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m + 16 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m^2 - 12m + 20 = 0$$

$$m = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{1} = 6 \pm \sqrt{16} = 6 \pm 4$$

$\Rightarrow m = 10$ یا 2

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$، آن‌گاه معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه‌های حقیقی ندارد. در این صورت می‌نویسیم:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \quad ; (4ac - b^2 > 0)$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

عبارت داخل کروشه را مجموع مربعات دو عبارت گویند.

مثال: حدود m را چنان بیابید که بتوان سه‌جمله‌ای $2\sqrt{2}x^2 - 4x + (m-2)$ را به صورت مجموع مربعات دو عبارت نوشت.

حل: باید Δ یا Δ' منفی باشد.

$$\Delta' = b'^2 - ac < 0 \Rightarrow 4 - 2\sqrt{2}(m-2) < 0$$

$$4 - 2\sqrt{2}\, m + 4\sqrt{2} < 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}\, m > 4\sqrt{2} + 4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\, m > 4(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow \sqrt{2}\, m > 2(\sqrt{2} + 1)$$

$$\Rightarrow m > \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}} \Rightarrow m > \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow m > 2 + \sqrt{2}$$

تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$

حالت اول: اگر $\Delta > 0$، آن‌گاه:

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

فرض می‌کنیم: $x' < x''$

$$a(x - x')(x - x'') = 0 \Rightarrow (ax - ax')(x - x'') = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x' \\ x_2 = x'' \end{cases}$$

x	$-\infty$ تا x'	x' تا x''	x'' تا $+\infty$
$ax - ax'$	مخالف علامت a	موافق علامت a	موافق علامت a
$x - x''$	−	−	+
$f(x)$	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

نتیجه: اگر در سه‌جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$، $\Delta > 0$، آن‌گاه علامت آن بین دو ریشه‌ی مخالف علامت a و علامت آن در خارج دو ریشه موافق علامت a است.

تذکر: نامعادله‌ی درجه دوم در حالت کلی با تعیین علامت حل می‌شود.

مثال ۱. اگر $n \in N$، آن‌گاه نامعادله‌ی $2n^2 - 27n + 25 < 0$ چند جواب دارد؟

حل:

$$f(n) = 2n^2 - 27n + 25 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 200}}{4} = \frac{27 \pm 23}{4} = 1 \ , \ \frac{25}{2}$$

n	$-\infty$ تا 1	1 تا $\frac{25}{2}$	$\frac{25}{2}$ تا $+\infty$
$f(n)$	+	−	+

$f(x) < 0 \Rightarrow 1 < n < \frac{25}{2}$ و $n \in N \Rightarrow n = 2, 3, 4, \ldots 12$

تعداد جواب‌ها $= (12 - 2) + 1 = 11$

مثال ۲. نامعادله‌ی $\frac{2x^2+7x+5}{4-x^2}<0$ را حل کنید.

حل: باید صورت و مخرج کسر را تعیین علامت کرد:

$$2x^2+7x+5=0 \Rightarrow x=-1\,,\,-\frac{5}{2}$$

$$4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	2	$+\infty$
$2x^2+7x+5$	+	−	−	+	+	
$4-x^2$	−	−	+	+	−	
$P(x)$	−	+	−	+	−	

$-\frac{5}{2}<x<-2$ $\qquad$ $-1<x<2$

جواب این نامعادله $(-\frac{5}{2},-2)\cup(-1,2)$ است. در ضمن، کسر $P(x)$ به ازای ریشه‌های مخرج یعنی $x=2$ و $x=-2$ تعریف نشده است.

حالت دوم: اگر $\Delta=0$، آن‌گاه: $f(x)=a(x-x')^2$

عبارت $(x-x')^2$، به ازای $x=x'$ صفر است و در بقیه‌ی موارد مثبت است. پس $a(x-x')^2$ به ازای $x=x'$ صفر است و در بقیه موارد موافق علامت a است.

x	$-\infty$	$x'=x''$	$+\infty$
$f(x)$	موافق علامت a	0	موافق علامت a

برای مثال، اگر $f(x)=2(x-7)^2$، آن‌گاه $f(x)$ به ازای $x=7$، صفر است و به ازای بقیه مقادیر حقیقی، $f(x)$ مثبت است. همچنین، اگر $g(x)=-4(x-1)^2$، آن‌گاه $g(x)$ به ازای $x=1$ صفر است و به ازای بقیه مقادیر حقیقی، $g(x)$ منفی است.

حالت سوم: اگر $\Delta<0$ آن‌گاه داریم:

$$f(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a})^2\right]$$

عبارت داخل کروشه همواره مثبت است. پس علامت $f(x)$ همواره موافق علامت a است.

تذکر مهم: سه‌جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c وقتی همواره مثبت است که $\Delta<0$ و $a>0$. و این سه‌جمله‌ای وقتی همواره منفی است که $\Delta<0$ و $a<0$.

مثال۱. به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $(m-1)x^2-2mx+(m-2)$ همواره منفی است؟

حل: باید Δ یا Δ' منفی و a هم منفی باشد.

$$\begin{cases}\Delta'=b'^2-ac<0\\ a<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m^2-(m-1)(m-2)<0\\ m-1<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m^2-m^2+3m-2<0\\ m-1<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3m-2<0\\ m-1<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m<\frac{2}{3}\\ m<1\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} m<\frac{2}{3}$$

مثال۲. به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $(m+2)x^2-2mx+(m+4)$ همواره مثبت است؟

حل: باید Δ یا Δ' منفی و a مثبت باشد.

$$\begin{cases}\Delta'=b'^2-ac<0\\ a>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m^2-(m+2)(m+4)<0\\ m+2>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m^2-m^2-6m-8<0\\ m+2>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-6m-8<0\\ m+2>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6m+8>0\\ m+2>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m>-\frac{4}{3}\\ m>-2\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} m>-\frac{4}{3}$$

بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

حالت اول: اگر (Δ) مثبت باشد، در این صورت معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۱) حاصل‌ضرب دو ریشه $=x'.x''=\frac{c}{a}>0 \Rightarrow$

هر دو ریشه‌ی معادله هم‌علامت هستند.

۲) حاصل‌ضرب دو ریشه $=x'.x''=\frac{c}{a}<0 \Rightarrow$

دو ریشه مختلف‌العلامه‌اند.

۳) حاصل ضرب دو ریشه $= x'.x'' = \frac{c}{a} = ۰ \Rightarrow$ یک ریشه صفر و ریشه‌ی دیگر $(-\frac{b}{a})$ است.

بنابراین داریم:

$$۱)\ \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow ۰ < x' < x'' & \text{هر دو ریشه مثبت هستند.} \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow x' < x'' < ۰ & \text{هر دو ریشه منفی هستند.} \end{cases}$$

$$۲)\ \frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x' < ۰ < x'' \\ |x''| > |x'| \end{cases} \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow \begin{cases} x' < ۰ < x'' \\ |x'| > |x''| \end{cases} \\ -\frac{b}{a} = ۰ \Rightarrow x'' = -x' \end{cases}$$

$$۳)\ \frac{c}{a} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow x' = ۰ < x'' \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow x' < ۰ = x'' \end{cases}$$

حالت دوم: $\Delta' = ۰$ یا Δ درنتیجه $x' = x'' = -\frac{b}{۲a}$ که می‌گوییم، معادله‌ی دو ریشه‌ی حقیقی مساوی یا یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد. مقدار ریشه‌ی مضاعف برابر با $-\frac{b}{۲a}$ است.

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} > ۰ \Rightarrow ۰ < x' = x'' & \text{ریشه‌ی مضاعف مثبت است.} \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} < ۰ \Rightarrow x' = x'' < ۰ & \text{ریشه مضاعف منفی است.} \\ -\frac{b}{a} = ۰ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} = ۰ \Rightarrow x' = x'' = ۰ & \text{ریشه مضاعف صفر است.} \end{cases}$$

مسأله‌ی ۱. حدود m را چنان بیابید که هر دو ریشه‌ی معادله‌ی $۲x^۲ - ۲mx + (m - ۴) = ۰$ مثبت باشند.

حل: براساس درس، برای این‌که هر دو ریشه‌ی این معادله مثبت باشند باید داشته باشیم:

$$-\frac{b}{a} > ۰ \text{ و } \frac{c}{a} > ۰ \text{ ، } \Delta' > ۰$$

$\Delta' = b'^۲ - ac = m^۲ - ۲(m - ۴) > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۲m + ۸ > ۰$

$\Delta' = m^۲ - ۲m + ۱ + ۷ = (m - ۱)^۲ + ۷ > ۰$. Δ' همواره مثبت است.

$\frac{c}{a} = \frac{m - ۴}{۲} > ۰ \Rightarrow m - ۴ > ۰ \Rightarrow m > ۴$

$-\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{۲m}{۲} > ۰ \Rightarrow m > ۰$

$$\begin{cases} m > ۴ \\ m > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} m > ۴$$

مسأله‌ی ۲. حدود m را چنان بیابید که هر دو ریشه‌ی معادله‌ی $mx^۲ - ۲(m + ۱)x + (m - ۱) = ۰$ منفی باشند.

حل: باید $\Delta' > ۰$ و $\frac{c}{a} > ۰$ و $\frac{-b}{a} < ۰$

$\Delta' = b'^۲ - ac > ۰ \Rightarrow (m + ۱)^۲ - m(m - ۱) > ۰ \Rightarrow$

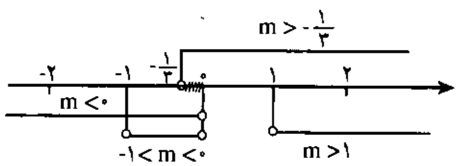
$m^۲ + ۲m + ۱ - m^۲ + m > ۰ \Rightarrow ۳m + ۱ > ۰ \Rightarrow m > -\frac{۱}{۳}$

$\frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{m - ۱}{m} > ۰ \Rightarrow m < ۰$ یا $m > ۱$

$-\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۲(m + ۱)}{m} < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۰$

$$\begin{cases} m > -\frac{۱}{۳} \\ m < ۰ \text{ یا } m > ۱ \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} -\frac{۱}{۳} < m < ۰ \\ -۱ < m < ۰ \end{cases}$$

در شکل زیر هم اشتراک جواب‌ها نشان داده شده است.



مسأله‌ی ۳. به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $۲x^۲ - ۲mx + (m + ۱)$ را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عبارت نوشت.

حل: باید $\Delta' < ۰$

$\Delta' = b'^۲ - ac < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۲(m + ۱) < ۰$

$\Rightarrow m^۲ - ۲m - ۲ < ۰$

این نامعادله با تعیین علامت حل می‌شود:

$$m^۲ - ۲m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a}$$

$$= \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۲}}{۱} = ۱ \pm \sqrt{۳}$$

چون a در معادله‌ی $m^۲ - ۲m - ۲ = ۰$ مثبت است، پس بین دو ریشه علامت منفی خواهد شد؛ یعنی:

$۱ - \sqrt{۳} < m < ۱ + \sqrt{۳}$