معادلهٔ خط

● رضا پیکر

(قسمت اوّل)

از آن جا که همگان ذهنیتی از خط دارند، خط را به عنوان یک مفهوم اوّلیه، بدون تعریف می‌پذیریم.

خط انواعی دارد که از آن جمله عبارتند از: خط راست، خط منحنی، خط شکسته و...

هر گاه صحبت از خط می‌شود، منظور خط راست است که از مجموعهٔ نقاطی که بر یک راستا قرار دارند، تشکیل می‌شود. در این مقاله سعی داریم تا مختصری به بررسی معادلهٔ خط روی صفحهٔ مختصات بپردازیم.

مجموعه‌های نامتناهی A و B را که اعضای هر کدام، مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ مختصات می‌باشند، در نظر بگیرید. آیا می‌توانید رابطه‌ای بین طول و عرض هر یک از نقاط این مجموعه‌ها حدس بزنید؟

$$A=\left\{\dots,\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۲\\-۲\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۳\\-۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۴\\-۴\end{bmatrix},\dots\right\}$$

$$B=\left\{\dots,\begin{bmatrix}-۲\\۵\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix},\dots\right\}$$

با صرف اندکی وقت و دقت، پی می‌برید که مجموع طول و عرض هر یک از نقاط مجموعهٔ A، برابر با صفر و همچنین مجموع دو برابر طول با عرض هر یک از نقاط مجموعهٔ B، برابر با یک است.

اگر به‌طور کلی x را نمایندهٔ طول و y را نمایندهٔ عرض هر نقطه در نظر بگیریم، برای اعضای مجموعه A می‌توانیم بنویسیم:

$$x+y=۰ \qquad \text{(I)}$$

و برای اعضای مجموعه B می‌توانیم بنویسیم:

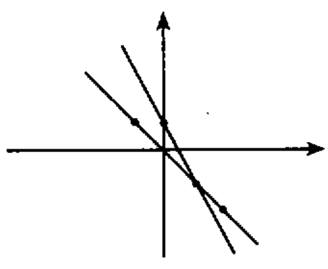
$$۲x+y=۱ \qquad \text{(II)}$$

و یا می‌توانیم مجموعه‌های A و B را به گونه زیر بنویسیم:

$$A=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\;\middle|\; x,y\in\mathbb{R},\quad x+y=۰\right\}$$

$$B=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\;\middle|\; x,y\in\mathbb{R},\quad ۲x+y=۱\right\}$$

مطابق شکل، تمامی نقاط مجموعه A روی یک خط و نیز



تمامی نقاط مجموعهٔ B هم روی یک خط راست قرار دارند. بنابراین هر یک از روابط I و II معادلهٔ خطوط راستی هستند که به ترتیب نقاط مجموعه‌های A و B برآن واقعند. بنابراین:

معادلهٔ خط راست، رابطه‌ای است بین طول و عرض نقاطی که بر یک خط راست واقعند.

به‌طور کلی برای مجموعهٔ نقاطی که بر یک خط راست واقعند، می‌توان رابطهٔ $ax + by + c = 0$ را در نظر گرفت که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و a و b توأماً صفر نیستند.
$(a^2 + b^2 \neq 0$ *$)$

الف) اگر $a = 0$ باشد، معادله به‌صورت $by + c = 0$ یا $y = \frac{-c}{b}$ در می‌آید که معادلهٔ خطی موازی محور طولها می‌باشد.

ب) اگر $b = 0$ باشد، معادله به صورت $ax + c = 0$ یا $x = \frac{-c}{a}$ درمی‌آید که معادلهٔ خطی موازی محور عرضها می‌باشد.

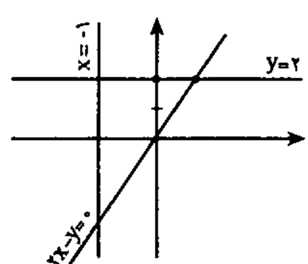
ج) اگر $a^2 + c^2 = 0$ باشد، معادله به صورت $by = 0$ یا $y = 0$ درمی‌آید که معادلهٔ محور طولها می‌باشد.

د) اگر $b^2 + c^2 = 0$ باشد، معادله به صورت $ax = 0$ یا $x = 0$ درمی‌آید که معادلهٔ محور عرض‌ها می‌باشد.

هـ) اگر $c = 0$ باشد، معادله به صورت $ax + by = 0$ درمی‌آید که معادلهٔ اخیر، صورت کلی معادله خطی است که از مبدأمختصات می‌گذرد، چرا که همواره مختصات $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ در آن صادق است.

مثال: هر یک از خطوط $y = 2$ ، $x = -1$ و $2x - y = 0$ را روی یک صفحه مختصات نمایش دهید.

حل:



* در ریاضیات، برای نشان دادن این‌که دوعدد a و b یا سه عدد a، b و c و یا... توأماً صفر نیستند، از روابطی نظیر $a^2 + b^2 \neq 0$ ، $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ و... استفاده می‌کنند و بعکس، برای نشان دادن اینکه دو عدد a و b یا سه عدد a، b، c و یا ... توأماً صفر هستند، از روابطی نظیر: $a^2 + b^2 = 0$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ و ... استفاده می‌کنند.

نتیجهٔ مهم بحث اخیر را می‌توان این گونه بیان داشت که هر معادلهٔ درجهٔ اوّل دو مجهولی، به صورت $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ را می‌توان روی صفحهٔ مختصات به صورت یک خط راست نشان داد و بعکس هر خط راستی که در دستگاه محورهای مختصات رسم شده باشد، معادله‌ای به صورت $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ دارد.

مثال: اگر مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با برابری زیر به هم، بستگی داشته باشند، نشان دهید مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، مختصات نقاط دو خط هستند و دو خط را روی صفحهٔ مختصات نمایش دهید.

$4x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0$

حل: چنانچه برابری بالا را تجزیه کنیم، خواهیم دید که بستگی بین x و y در این رابطه از نوع معادلهٔ خط است.

$4x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0$

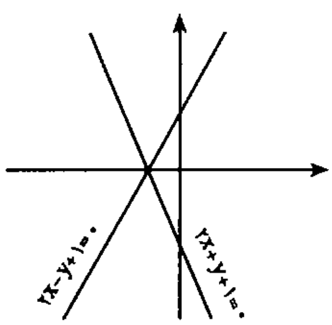
$(2x + 1)^2 - y^2 = 0$

$(2x + y + 1)(2x - y + 1) = 0$

حاصلضرب دو پرانتز، وقتی صفر است که حداقل یکی از آن پرانتزها برابر با صفر باشد. بنابراین:

$2x - y + 1 = 0$ یا $2x + y + 1 = 0$

که نمودار هر یک از روابط بالا، یک معادلهٔ خط است.



نوشتن معادلهٔ خط با معلوم بودن دو نقطه از آن

با مشخص بودن یک نقطه از خطی در صفحهٔ مختصات، نمی‌توان خط مورد نظر را رسم کرد؛ چرا که از یک نقطه، بی‌شمار خط می‌گذرد؛ ولی با مشخص بودن حداقل دو نقطه از خط، می‌توان خط مورد نظر را رسم کرد. به‌همین ترتیب، برای نوشتن معادلهٔ یک خط راست، مشخص بودن دو نقطه از آن کافی است.

همان گونه که در بحث اخیر داشتیم، هر رابطه که به‌صورت:

$$ax+by+c=0 \qquad (a^2+b^2\neq 0)$$

باشد، معادله یک خط راست است. رابطهٔ اخیر را می‌توان به صورت $y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$ نوشت که با فرض $m=\frac{-a}{b}$ و $n=-\frac{c}{b}$ خواهیم داشت:

$$y=mx+n \qquad (m\,,n\in \mathbb{R})$$

اکنون می‌خواهیم معادلهٔ خطی را بنویسیم که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

فرض می‌کنیم معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ مذکور می‌گذرد، به شکل کلّی $y=mx+n$ باشد. از آن‌جا که نقاط A و B متعلق به خط مورد نظر می‌باشد، پس مختصات آنها در معادلهٔ خط صادق است و خواهیم داشت:

$$x=x_1\ ,\quad y=y_1 \ \Rightarrow\ y_1=mx_1+n$$
$$x=x_2\ ,\quad y=y_2 \ \Rightarrow\ y_2=mx_2+n$$

با حذف n از معادلهٔ بالا، m بر حسب مقادیر معلوم x_1، x_2، y_1 و y_2 به‌دست خواهد آمد، داریم:

$$y_1-y_2=mx_1-mx_2 \ \Rightarrow\ m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

از جایگذاری مقدار m در یکی از دو معادلهٔ اخیر، مقدار n نیز بر حسب مقادیر x_1, x_2, y_1, y_2 محاسبه می‌شود. داریم:

$$n=y_1-\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)x_1$$

یا

$$n=y_2-\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)x_2$$

از قرار دادن مقادیر m و n در معادلهٔ $y=mx+n$ داریم:

$$y=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right]x+y_1-\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right]x_1$$

$$\Rightarrow \boxed{(y-y_1)=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right](x-x_1)} \qquad (I)'$$

یا

$$y=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right]x+y_2-\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right]x_2$$

$$\Rightarrow \boxed{(y-y_2)=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right](x-x_2)} \qquad (II)'$$

هر یک از معادله‌های $(I)'$ و $(II)'$، معادلهٔ خطی است که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ می‌گذرد. لازم به ذکر است که هر دو رابطه، صورت یک معادله‌اند.

مثال: معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}-1\\-12\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

حل: مطابق بحث اخیر داریم:

$$(y-3)=\left(\frac{3-(-12)}{4-(-1)}\right)(x-4)$$

یا

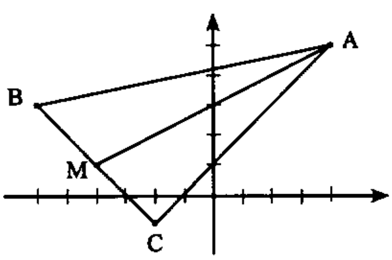
$$(y+12)=\left(\frac{3-(-12)}{4-(-1)}\right)(x+1)$$

پس از ساده کردن هر یک از روابط بالا، به معادلهٔ $y=3x-9$ خواهیم رسید.

مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-6\\3\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$ مختصات سه رأس یک مثلثند. معادلهٔ خطی را بنویسید که میانهٔ ضلع BC برآن واقع است.

حل: میانهٔ ضلع BC از رأس A و از نقطهٔ M وسط ضلع BC می‌گذرد، مختصات نقطهٔ M برابر است با:

$$M=\begin{bmatrix}\frac{x_B+x_C}{2}\\[4pt]\frac{y_B+y_C}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-6-2}{2}\\[4pt]\frac{3-1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}$$



بنابراین باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}$ می‌گذرد. داریم:

$$(y-5)=\left(\frac{5-(+1)}{4-(-4)}\right)(x-4)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+3$$

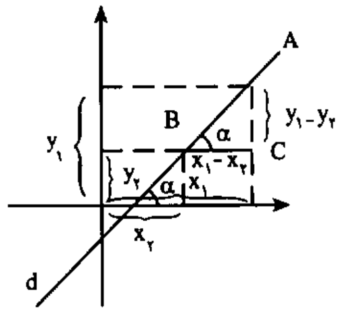
ضریب زاویه یا شیب خط

نشان دادیم رابطهٔ $(y-y_1)=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right](x-x_1)$ معادلهٔ خطی است که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

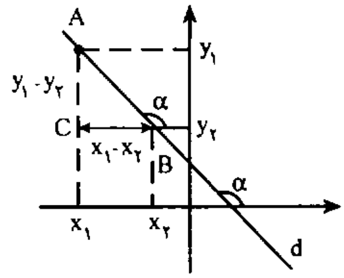
رابطهٔ اخیر از فرض معادلهٔ خط به صورت $y=mx+n$ و سپس محاسبهٔ مقادیر m و n بر حسب مقادیر معلوم x_1، x_2، y_1 و y_2 به دست آمد که در آن داشتیم:

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

اکنون به شکلهای زیر توجه کنید. خط d، خطی است که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ می‌گذرد و ضمن قطع کردن محور طولها با جهت مثبت محور طولها زاویهٔ α را تشکیل می‌دهد.



الف)



ب)

از نقاط A و B، مطابق شکل، خطوطی به موازات دو محور رسم می‌کنیم. مثلث ABC را در هر یک از شکلها در نظر بگیرید. با توجه به شکل، واضح است که داریم:

$\angle ABC=\alpha$, $AC=y_1-y_2$, $BC=x_1-x_2$

بنابراین داریم:

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{AC}{BC}=tg\,\alpha$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، نسبت $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط d با جهت مثبت محور طولها می‌سازد.

به اصطلاح، نسبت $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ را در معادلهٔ $(y-y_1)=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right](x-x_1)$ یا $y=mx+n$ ضریب زاویه یا شیب خط مورد نظر می‌نامند که مقدار آن برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط مورد نظر با جهت مثبت محور طولها می‌سازد.

مثال: ضریب زاویهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$ می‌گذرد، چند است؟

حل:

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{5-(-2)}{4-(-3)}=\frac{7}{7}=1$$

مثال: خطی که از نقاط $\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ می‌گذرد، با جهت مثبت محور طولها چه زاویه‌ای می‌سازد.

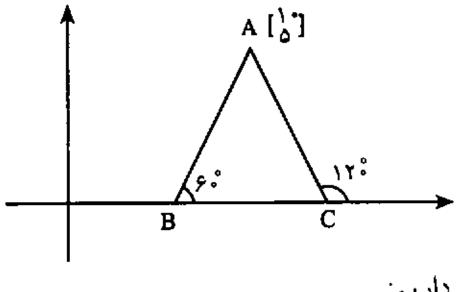
حل: اگر زاویه‌ای را که این خط با جهت مثبت محور طولها می‌سازد، α فرض کنیم، داریم:

$$tg\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2-1}{\sqrt{3}-0}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \alpha=\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}^{*}=\frac{\pi}{6}$$

مثال: مثلث متساوی‌الاضلاعی را که یکی از اضلاع آن بر محور طولها واقع است، در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ $A\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ یکی از رئوس این مثلث باشد، معادلهٔ دو ضلع غیرواقع بر محور طولها را بنویسید.

حل: با توجه به شکل، واضح است که دو ضلع مثلث با محور طولها زاویه‌های ۱۲۰° و ۶۰° می‌سازند.



بنابراین داریم:

$$AB\ \text{معادلهٔ}: (y-5)=tg60^\circ(x-10)$$
$$\Rightarrow (y-5)=\sqrt{3}(x-10)$$

* $\mathrm{Arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ (آرک تانژانت $\frac{\sqrt{3}}{3}$) برابر زاویه‌ای است که در فاصلهٔ $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ باشد و مقدار تانژانت آن برابر با $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، که بدیهی است تانژانت $\frac{\pi}{6}$ یا ۳۰° برابر با $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

معادلهٔ AC: $(y-5) = tg120^\circ(x-10)$

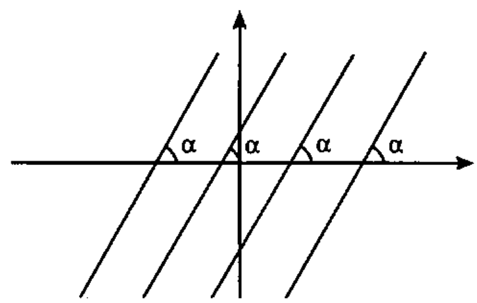
$$\Rightarrow (y-5) = -\sqrt{3}(x-10)$$

$$(tg120^\circ = -tg60^\circ = -\sqrt{3})$$

نتیجه بحث: مقدار m در خطی که معادلهٔ آن به یکی از دو صورت $y = mx + n$ یا $y - y_1 = m(x - x_1)$ است، ضریب زاویه یا شیب آن خط می‌باشد.

خطوط موازی

به شکل زیر توجه کنید. دو یا چند خط موازی، زاویه‌های برابر با جهت مثبت محور طولها می‌سازند.



بنابراین تانژانت زاویه‌هایی که این خطوط با محور طولها می‌سازند، مقداری برابر است. در نتیجه می‌توان گفت، ضریب زاویه یا شیب خطوط موازی با هم برابرند.

مثال: به ازای کدام مقدار a خط $L: 2y - ax = 3$ موازی نیمساز ربع اوّل و سوم است.

حل: از آن‌جا که معادلهٔ نیمساز ربع اول و سوم به صورت $y=x$ می‌باشد، پس ضریب زاویهٔ آن برابر با ۱ است. و چون خط L با نیمساز ربع اول و سوم موازی است، باید ضریب زاویه‌ای برابر داشته باشند.

$$L: 2y - ax = 3 \Rightarrow y = \frac{a}{2}x + \frac{3}{2}$$

بنابراین:

$$\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

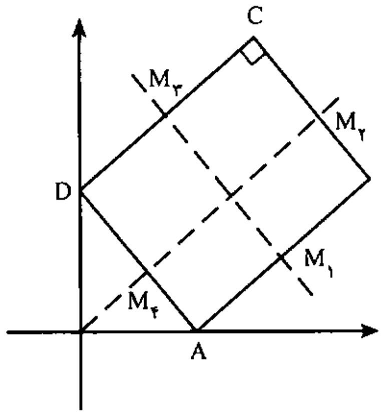
مثال: اگر یک ضلع متوازی الاضلاع بر خط $d: y + 2x = 4$ منطبق باشد، معادلهٔ ضلع روبه‌رو به آن را در صورتی که بدانیم از نقطهٔ $\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix}$ می‌گذرد، بنویسید.

حل: از آن‌جا که ضلع روبه‌رو به ضلع یاد شده، موازی آن است، پس هر دو خط، ضریب زاویه‌ای برابر دارند. شیب خط d برابر با ۲- است. پس شیب خط مورد نظر نیز برابر با ۲- است، و داریم:

$$y - 1 = -2(x - 10) \Rightarrow y = 2x + 21$$

مثال: چهارنقطهٔ $A\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}10\\6\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix}$ و $D\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$ چهار رأس مستطیل ABCD می‌باشند. ضمن نمایش مستطیل روی صفحهٔ مختصات، معادله‌های خطوطی را که محورهای تقارن این مستطیل بر آن واقعند، بنویسید.

حل:



مطابق شکل، محورهای تقارن مستطیل، خطوطی هستند که از اوساط دو ضلع مقابل به موازات دو ضلع مجاور رسم شوند. اگر اوساط اضلاع AB، BC، CD و DA را به ترتیب M_1، M_2، M_3 و M_4 بنامیم، مختصات این نقاط عبارتند از:

$$M_1 = \begin{bmatrix}\frac{4+10}{2}\\[4pt]\frac{0+6}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix}\frac{10+6}{2}\\[4pt]\frac{6+10}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\8\end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix}\frac{0+6}{2}\\[4pt]\frac{4+10}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} \qquad M_4 = \begin{bmatrix}\frac{0+4}{2}\\[4pt]\frac{4+0}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

بنابراین معادله‌های محورهای تقارن این مستطیل عبارتند از:

الف) $(y-2) = (\frac{8-2}{8-2})(x-2)$ یا $y = x$

ب) $(y-3) = (\frac{7-3}{3-7})(x-7)$ یا $y = -x + 10$

راه حل دیگر: با توجه به این‌که M_1M_3 موازی AD می‌باشد و با معلوم بودن مختصات نقطهٔ M_1 داریم:

الف) $(y-3) = (\frac{0-4}{4-0})(x-7) \Rightarrow y = -x + 10$

و با توجه به موازی بودن M_2M_4 با AB و معلوم بودن مختصات M_2 داریم:

ب) $(y-8) = (\frac{4-10}{0-6})(x-8) \Rightarrow y = x$