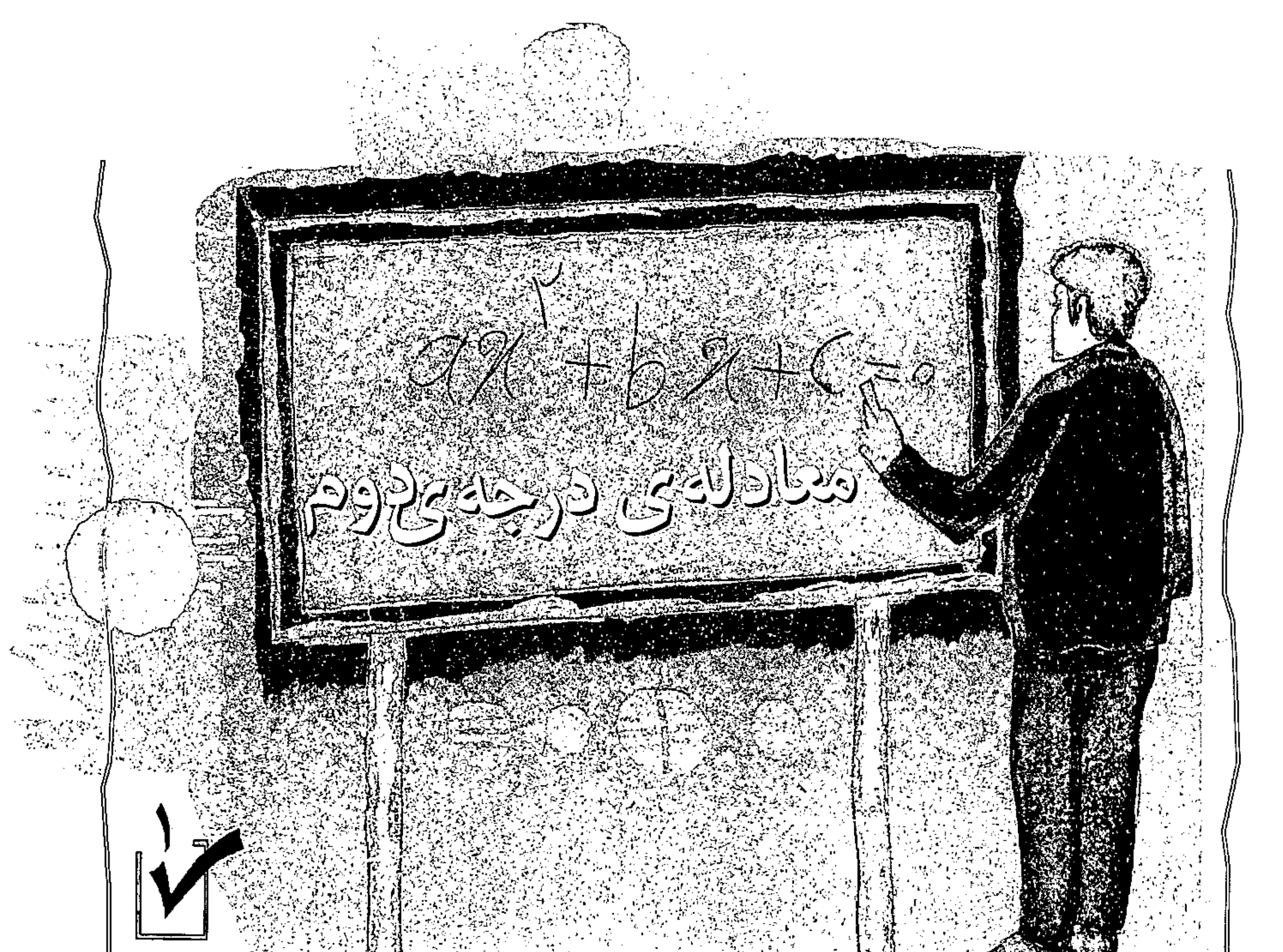


احمد قندهاری

اشاره

مبحث معادله‌ی درجه دوم از مهم‌ترین مباحث ریاضی است و کاربردهای فراوانی دارد. متأسفانه در کتاب‌های درسی به طور کافی به آن‌ها پرداخته نشده است بلکه تنها بخشی ازآن‌ها در کتاب ریاضی ۲ و بخش دیگری هم به طور ناقص در کتاب حسابان آمده است.

در این نوشته سعی شده است اطلاعات بیشتری درباره‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم پیش‌روی علاقه‌مندان قرار گیرد.

۱. بررسی حالت‌های ناقص معادله‌ی درجه دوم

الف) اگر در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، عدد c صفر باشد، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله صفر و ریشه‌ی دیگر آن $\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

$$c=0;\ ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ \text{یا} \\ x=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۱:

$$\begin{matrix} ax^2+bx+c=0 \\ c=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ \text{یا} \\ x''=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

ب) اگر در معادله‌ی درجه دوم، b و c هر دو با هم صفر باشند، آن‌گاه هر دو ریشه‌ی معادله صفر است.

$$b=0,\ c=0;\ ax^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow (x)(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ x''=0 \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۲:

$$\left.\begin{matrix} ax^2+bx+c=0 \\ b=c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x'=x''=0$$

ج) اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $b=0$ و a و c مختلف‌العلامه باشند، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد:

$$b=0,\ ax^2+c=0 \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$$

چون a و c مختلف‌العلامه‌اند، پس $\frac{c}{a}$ منفی و $\left(-\frac{c}{a}\right)$

عددی مثبت است .

$$x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

نتیجه‌ی ۳:

$$\left.\begin{array}{r} ax^2+bx+c=0 \\ b=0 \\ c\,,a \text{ مختلف العلامه باشد.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ معادله دو ریشه ی قرینه دارد :

مسأله : معادله‌ی $mx^2+(m-2)(m+2)x+(m-3)(m-2)=0$ مفروض است. m را چنان بیابید که :

اولاً: یک ریشه‌ی معادله صفر باشد .

ثانیاً: هر دو ریشه‌ی معادله صفر باشد .

ثالثاً: معادله دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد . در این صورت ریشه‌ها را هم بیابید .

حل: **اولاً** فقط باید $c=0$ و باید توجه داشت که b صفر نباشد . پس :

$$m-3=0 \Rightarrow m=3$$

ثانیاً باید m را طوری پیدا کرد که هم c و هم b صفر باشند ، پس :

$$m-2=0 \Rightarrow m=2$$

ثالثاً فقط باید $b=0$ و a و c مختلف العلامه باشند .

$$m+2=0 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ c=(-5)(-4)=20 \end{cases}$$

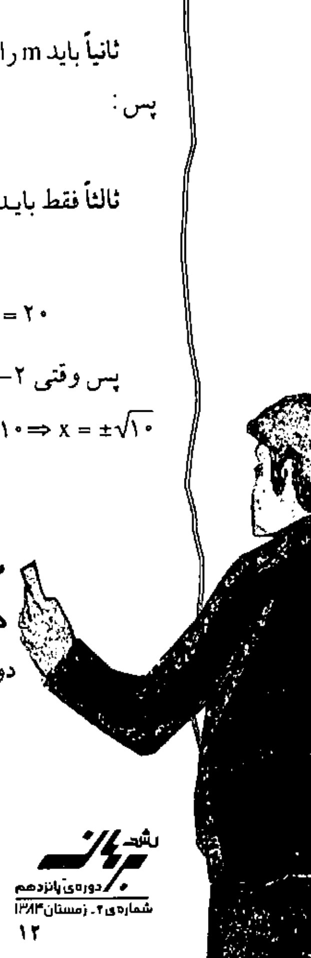
پس وقتی $m=-2$ ، آن‌گاه a و c مختلف‌العلامه‌اند .

$-2x^2+20=0 \Rightarrow x^2=10 \Rightarrow x=\pm\sqrt{10}$ ؛ معادله‌ی درجه‌ی دوم

۲. طرز پیدا کردن فرمول حل معادله‌ی درجه دوم کامل $ax^2+bx+c=0$

دو طرف معادله را بر $a \neq 0$ تقسیم می‌کنیم :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$



به دو طرف تساوی بالا عبارت $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه می‌کنیم . خواهیم داشت :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \Rightarrow$$

از دو طرف این تساوی ریشه‌ی دوم می‌گیریم .

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ **دستور (b)**

نتیجه ۴: معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ از فرمول **دستور (b)** $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ قابل حل است .

مثال ۱ . معادله‌ی $2x^2-5x+2=0$ را حل کنید .

حل : در این معادله $a=2$ و $b=-5$ و $c=2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-4(2)(2)}}{2(2)}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4} \Rightarrow x=\frac{5\pm3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=x'=\frac{5+3}{4}=2 \\ \beta=x''=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

اعداد ۲ و $\frac{1}{2}$ را ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x+2=0$ گویند و آن‌ها را با x' و x'' یا α و β نشان می‌دهند .

مثال ۲ . معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر را حل کنید؟

$$(m,n>0)\; m^2x^2-2m^2x+(m^2-n^2)=0$$

حل : در این معادله $a=m^2$ و $b=-2m^2$ و $c=m^2-n^2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^4-4(m^2)(m^2-n^2)}}{2m^2}$$

$$x=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^4-4m^4+4m^2n^2}}{2m^2}=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^2n^2}}{2m^2}$$

$$x=\frac{2m^2\pm 2mn}{2m^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x'=\dfrac{2m^2+2mn}{2m^2}=\dfrac{2m(m+n)}{2m^2}=\dfrac{m+n}{m}\\[2ex]\beta=x''=\dfrac{2m^2-2mn}{2m^2}=\dfrac{2m(m-n)}{2m^2}=\dfrac{m-n}{m}\end{cases}$$

تذکر مهم: اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، عدد b مضرب ۲ باشد، آن‌گاه نصف آن را b' می‌نامیم؛ یعنی: $b'=\frac{b}{2}$ یا $b=2b'$. حال اگر در فرمول حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، به جای b، $2b'$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$ و $b=2b'$ و

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}=\frac{-2b'\pm 2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}\Rightarrow$$

$$x=\frac{2(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})}{2a}\Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

دستور b'

نتیجه (۵):

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، $b=2b'$، آن‌گاه بهتر است معادله را از دستور (b') $x=\frac{(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})}{2a}$ حل کنیم.

مثال ۳. معادله‌ی $x^2-2\sqrt{3}x-(2\sqrt{3}+1)=0$ را حل کنید.

حل: $a=1$، $b'=-\sqrt{3}$ و $c=-(2\sqrt{3}+1)$.

معادله را از دستور b' حل می‌کنیم:

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}{1}$$
$$=\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$$

$$x=\sqrt{3}\pm(\sqrt{3}+1)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x'=\sqrt{3}+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}+1\\ \beta=x''=\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)=-1\end{cases}$$

توجه: عبارت b^2-4ac را Δ، و عبارت b'^2-ac را Δ'، و هر دو را مبیّن معادله گویند. اگرچه $\Delta=4\Delta'$، ولی ارزش آن‌ها از لحاظ بیان تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم یکی است؛ یعنی:

۱) Δ یا $\Delta'>0\Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۲) Δ یا $\Delta'=0\Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی مساوی یا یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد.

۳) Δ یا $\Delta'<0\Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی غیرحقیقی دارد.

سؤال. اگر شخصی بگوید، معادله‌ی درجه‌ی دوم همواره دو ریشه دارد، درست است یا خیر؟ چرا؟

مثال ۴: به ازای چه مقادیر m، معادله‌ی $mx^2-2(m-2)x+(m+1)=0$، دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

حل: باید Δ یا Δ' مثبت باشد.

$$\begin{cases}a=m\\ b'=-(m-2)\\ c=(m+1)\end{cases}$$

$$\Delta'>0\Rightarrow b'^2-ac>0\Rightarrow(m-2)^2-m(m+1)>0$$
$$\Rightarrow m^2-4m+4-m^2-m>0$$

$$\Rightarrow -5m+4>0\Rightarrow -5m>-4\Rightarrow m<\frac{4}{5}$$

مثال ۵: به ازای چه مقادیر m، خط به معادله‌ی $y=2x+m$، منحنی به معادله‌ی $y=x^2-2x+1$ را قطع نمی‌کند؟

حل: معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و منحنی نباید

ریشه‌های حقیقی داشته باشد.

$$\begin{cases} y = 2x + m \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + m \Rightarrow x^2 - 4x + (1 - m) = 0$$

معادله‌ی $x^2 - 4x + (1 - m) = 0$ ، معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و منحنی است و نباید ریشه‌های حقیقی داشته باشد پس باید $\Delta' < 0$.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b' = -2 \\ c = (1 - m) \end{cases}$$

$$\Delta' < 0 \Rightarrow b'^2 - ac < 0 \Rightarrow 4 - (1 - m) < 0 \Rightarrow 4 - 1 + m < 0$$
$$\Rightarrow m < -3$$

نکته‌ی ۱: اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، داشته باشیم: $a + b + c = 0$ ، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله عدد ۱ و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است.

اثبات:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx - a - b = 0$$
$$\Rightarrow ax^2 - a + bx - b = 0 \Rightarrow a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0$$
$$\Rightarrow a(x - 1)(x + 1) + b(x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 1)(ax + a + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ ax + a + b = 0 \Rightarrow ax = -a - b \\ \Rightarrow ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{a} \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۶:

$$\begin{matrix} ax^2 + bx + c = 0 \\ a + b + c = 0 \text{ مجموع ضرایب صفر باشد} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x' = 1 \\ \beta = x'' = \frac{c}{a} \end{cases}$$

مثال ۶: معادله‌ی $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 1) = 0$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a + b + c = 0$ ، زیرا:

$$\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 0$$

پس:

$$\begin{cases} \alpha = x' = 1 \\ \beta = x'' = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \end{cases}$$

نکته‌ی ۲: اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، داشته باشیم $a+c=b$ ، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله عدد ۱- و ریشه‌ی دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

اثبات:

$$a + c = b \Rightarrow c = b - a$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + b - a = 0$$
$$\Rightarrow ax^2 - a + bx + b = 0 \Rightarrow a(x^2 - 1) + b(x + 1) = 0$$
$$\Rightarrow a(x - 1)(x + 1) + b(x + 1) = 0 \Rightarrow (x + 1)(ax - a + b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ ax - a + b = 0 \Rightarrow ax = a - b \Rightarrow ax = -c \Rightarrow x = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۷:

$$\begin{matrix} ax^2 + bx + c = 0 \\ a + c = b \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x' = -1 \\ \beta = x'' = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

مثال ۷: معادله‌ی $x^2 \sin^2 \alpha + x.\tan^3 \alpha.\cot^3 \alpha + \cos^2 \alpha = 0$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} a = \sin^2 \alpha \\ b = \tan^3 \alpha.\cot^3 \alpha = 1 \\ c = \cos^2 \alpha \end{cases}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x' = -1 \\ \beta = x'' = -\dfrac{c}{a} = \dfrac{-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ \quad = -\cot^2\alpha \end{cases}$$

نکته‌ی ۳: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = S \\ \alpha.\beta = \dfrac{c}{a} = P \end{cases}$$

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$، $\frac{c}{a} < 0$، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی حقیقی مختلف العلامه دارد؛ زیرا:

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow a,c < 0\ ,\ \Delta = b^2 = 4ac$$

$$\Delta = b^2 - 4(\underbrace{ac}_{\text{منفی}}) \Rightarrow \Delta = b^2 + (\underbrace{-4ac}_{\text{مثبت}}) > 0$$

پس $\Delta > 0$. بنابراین، معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. از طرف دیگر، حاصل ضرب این دو ریشه، یعنی $\frac{c}{a}$ منفی است، پس دو ریشه مختلف‌العلامه‌اند.

نتیجه‌ی ۸:

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \alpha < 0 < \beta$$

α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم هستند.

مثال ۸: m را چنان بیابید که معادله‌ی $(2\sqrt{3}+1)x^2 + 2(m+1)x + xm^2 - 18 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامه داشته باشد.

حل:

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m^2 - 18}{2\sqrt{3}+1} < 0 \Rightarrow 2m^2 - 18 < 0 \Rightarrow m^2 < 9 \Rightarrow -3 < m < 3$$

نکته‌ی ۴: اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، α و β ریشه‌های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم $\beta = k\alpha\ (k \neq 0,1)$، آن‌گاه داریم: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$

اثبات:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + k\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha(k+1) = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-b}{a(k+1)}$$

$$\beta = k\alpha \Rightarrow \beta = \frac{-bk}{a(k+1)}$$

$$\alpha.\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{-b}{a(k+1)} \times \frac{-bk}{a(k+1)} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{kb^2}{a^2(k+1)^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$kb^2 = ac(k+1)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

نتیجه‌ی ۹:

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ \beta = k\alpha \Rightarrow \frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

α و β ریشه‌های حقیقی معادله باشد.

مثال ۹: اگر در معادله‌ی $(2\sqrt{3}-3)x^2 - 4(m-1)x + (2\sqrt{3}+3) = 0$، یک ریشه ۳ برابر ریشه دیگر باشد، یعنی $\beta = 3\alpha$، آن‌گاه m را بیابید.

حل:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{16(m-1)^2}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{16(m-1)^2}{12-9} = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{(m-1)^2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow (m-1)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$m - 1 = \pm 1 \Rightarrow m = 1 \pm 1 \Rightarrow m = 2 \text{ یا } m = 0$$

ادامه دارد