معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم

(برای دانش‌آموزان سال اوّل دبیرستان)

$$ax^2+bx+c=0$$

هوشنگ شرقی

شکل کلی معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ می‌باشد و روشن است که $a\neq 0$ می‌باشد. (چرا؟)

از این‌رو، مشخص می‌شود که دراین نوع معادله، برخلاف معادلهٔ درجهٔ اوّل، روش ابتدایی ما این است که همهٔ مجهولها و معلومها را به‌یک طرف معادله برده و درسمت راست معادله، عددصفر را باقی گذاریم، آن‌گاه معادله را به‌ترتیب درجات نزولی مجهول معادله، مرتّب کنیم.

مثال: معادلهٔ $(x+1)(x-2)+7=(3x+1)(x-3)$ را به‌شکل استاندارد خود تبدیل کنید.

حل: پس‌از ضرب پرانتزها و بردن همهٔ عبارتها به‌سمت چپ تساوی، نتیجه می‌شود:

$$x^2-x-2+7=3x^2-9x+x-3$$
$$\Rightarrow x^2-x-2+7-3x^2+9x-x+3=0$$
$$\Rightarrow -2x^2+7x+8=0$$

که شکل استاندارد یک معادلهٔ درجهٔ دوم را دارا می‌باشد. پس از آن‌که معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌شکل استاندارد خود تبدیل نمودیم، روی روشهای حلّ آن بحث می‌کنیم. ابتدا از حالتهای خاص این نوع معادله شروع می‌کنیم. $(ax^2+bx+c=0)$:

الف) حالت خاصی که در آن $c=0$ باشد: دراین حالت، معادله به‌صورت $ax^2+bx=0$ درمی‌آید. حال با فاکتورگیری از x و تجزیهٔ عبارت‌جبری سمت‌چپ تساوی، نتیجه می‌شود: $x(ax+b)=0$ ، اکنون دوعامل داریم که حاصلضرب آنها مساوی صفر می‌باشد و ما می‌دانیم که اگر حاصلضرب دوعامل، مساوی صفر باشد، لااقل یکی از آنها مساوی صفرمی‌باشد؛ یعنی: $AB=0 \Rightarrow A=0$ یا $B=0$ ، لذا می‌توان نوشت:

$$x(ax+b)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } ax+b=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{a}$$

و از آن‌جا دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ مفروض، به صورت $x'=0$ و $x''=\frac{-b}{a}$ به‌دست می‌آید. این شیوه را برای حلّ

کلیهٔ معادله‌های درجه دومی که عدد ثابت c نداشته باشند نیز به‌کار می‌بریم. لذا یکی از ریشه‌های این معادله، همواره مساوی صفر می‌باشد.

مثال: حلّ معادلهٔ $4x^2 - 3x = 0$

حل: باهمان روش گفته شده و به‌صورت زیر، معادله را حل می‌کنیم :

$$4x^2 - 3x = 0 \;;\; x(4x-3)=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{یا}$$

$$4x-3=0 \Rightarrow x'=0 \;\text{ و }\; x''=\frac{3}{4}$$

مثال: حلّ معادلهٔ $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}=-2$.

حل: ابتدا دامنهٔ معادله را به‌دست آوریم :

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{1,-2\} \quad \text{و}$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

اکنون برای حلّ معادله، مجموع کسرهای سمت چپ تساوی را به‌دست آورده و آن را ساده می‌کنیم :

$$\frac{(x+1)(x+2)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}=-2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+3x+2+x^2-3x+2}{x^2+x-2}=-2$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+4}{x^2+x-2}=-2$$

اکنون باطرفین ـ وسطین تناسب بالا، نتیجه می‌شود :

$$2x^2+4=-2x^2-2x+4 \Rightarrow 2x^2+4+2x^2+2x-4=0$$

$$\Rightarrow 4x^2+2x=0 \Rightarrow x(4x+2)=0 \Rightarrow$$

$$x=0 \;\text{ یا }\; 4x+2=0 \Rightarrow x'=0 \;\text{ و }\; x''=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

هر دوجواب معادلهٔ $(0\,,-\frac{1}{2})$ در دامنهٔ معادله صدق می‌کنندوقابل قبول هستند.

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $4x^2+6x=0$

۲) $5x^2-2x=0$

۳) $6x^2+4x=0$

۴) $x^2-3x=0$

۵) $x(x+1)-2x(x-2)=0$

۶) $\frac{4x+1}{x-1}=\frac{x+1}{2x-1}$

۷) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x}{x+1}=-1$

ب) حالت خاصی که در آن $b=0$ باشد: یعنی معادله به‌صورت خاص $ax^2+c=0$ درآید.

دراین حالت، برای حلّ معادله مانند معادله‌های درجهٔ اول، می‌توان از این تساوی، x^2 را به‌دست آورد :

$$ax^2+c=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$$

و باجذر گرفتن از دو طرف این تساوی، x را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

و شرط وجود جواب دراین حالت، آن است که $-\frac{c}{a}\geq 0$ ، یعنی $\frac{c}{a}\leq 0$ ، لذا باید a و c مختلف‌العلامه باشند (چرا؟)

مثال: حلّ معادلهٔ $3x^2-12=0$

حل: به‌ترتیبی که گفته شد، می‌نویسیم :

$$3x^2-12=0 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=\frac{12}{3}=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

مثال: حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم $x(x+3)+(x-1)^2=x+5$

حل: باساده کردن دوطرف تساوی و بردن عبارتها به سمت چپ آن، نتیجه می‌شود :

$$x^2+3x+x^2-2x+1-x-5=0$$
$$\Rightarrow 2x^2-4=0 \Rightarrow 2x^2=4 \Rightarrow$$
$$x^2=\frac{4}{2} \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

مثال: حلّ معادلهٔ

$$(x+2)^2-(3-x)(3+x)+6=4x$$

حل: با ساده کردن عبارتهای سمت‌چپ و بردن همهٔ عبارتها به‌همان سمت، به‌دست می‌آید:

$$x^2+4x+4-(9-x^2)+6-4x=0$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4-9+x^2+6-4x=0$$
$$\Rightarrow 2x^2+1=0 \Rightarrow 2x^2=-1 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{2}$$

و چون $x^2 \geq 0$ می‌باشد، لذا معادله دارای ریشهٔ حقیقی نمی‌باشد.

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید:

1) $3x^2-9=0$

2) $-4x^2+5=0$

3) $6x(x+1)-(3x+1)(x+2)+x=0$

4) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-1}{x+1}=-6$

5) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+2}{x+1}=-3$

6) $(4x+1)^2-(x+1)^2=6x-4$

ج) حالت خاصی که در آن $a=1$ باشد: یعنی معادله به‌صورت $x^2+bx+c=0$ باشد. در این حالت، ممکن است به‌کمک اتحاد جملهٔ مشترک و جملهٔ غیرمشترک، عبارت $x^2+bx+c=0$ را به‌حاصلضرب دو پرانتز از درجهٔ اوّل تجزیه نمود و باصفر قرار دادن هریک از این پرانتزها ریشه‌های معادله را به‌دست آورد.

مثال: معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-7x+12=0$ را حل کنید.

حل: باکمی دقت، می‌توان دریافت دوعددی که مجموع آنها -7 و حاصلضرب آنها 12 می‌باشد، عددهای -4 و -3 می‌باشند و بنابراین، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $x^2-7x+12$، به‌صورت $(x-4)(x-3)$ قابل تجزیه می‌باشد، لذا معادلهٔ مزبور، به‌صورت زیرقابل حل است:

$$x^2-7x+12=(x-4)(x-3)=0$$

اکنون حاصلضرب دوعامل $(x-4)(x-3)$ مساوی صفر شده است، لذا یکی از آن‌دو، باید مساوی صفر باشد؛ یعنی $x-3=0$ یا $x-4=0$ و درنتیجه $x=3$ یا $x=4$؛ یعنی معادله، دوریشهٔ حقیقی مساوی ۴،۳ دارد.

مثال: حلّ معادلهٔ درجهٔ‌دوم $x^2+5x+6=0$.

حل: باتجزیهٔ عبارت x^2+5x+6 می‌توان معادلهٔ فوق را به‌صورت زیر حل نمود:

$$x^2+5x+6=0 \Rightarrow (x+2)(x+3)=0 \Rightarrow$$
$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad \text{و} \quad x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $\frac{2x+1}{x-1}=1+\frac{8}{x}$ را به‌دست آورید.

حل: دامنهٔ معادله، عبارت‌است از $D=\mathbb{R}-\{0,1\}$، حال پس‌از ساده کردن کسر سمت راست تساوی و طرفین ـ وسطین کردن تناسب حاصل، به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{2x+1}{x-1}=\frac{x+8}{x} \Rightarrow x(2x+1)=(x-1)(x+8)$$
$$\Rightarrow 2x^2+x=x^2+7x-8$$

اکنون بابردن عبارتهای جبری به‌سمت چپ تساوی و صفر قرار دادن آن، به‌یک معادلهٔ درجهٔ‌دوم می‌رسیم و باتجزیهٔ آن به‌حاصلضرب دوپرانتز، ریشه‌های معادلهٔ مزبور را به‌دست می‌آوریم:

$$2x^2+x-x^2-7x+8=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x-2)=0 \Rightarrow$$
$$x-4=0 \text{ یا } x-2=0 \Rightarrow x=4 \text{ یا } x=2$$

هر دو ریشهٔ معادله قابل قبول می‌باشند.

تمرین: معادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $x^2-5x+4=0$

۲) $x^2-4x+4=0$

۳) $x^2-8x+12=0$

۴) $x^2-9x+21=0$

۵) $x^2+2x-80=0$

۶) $(x+1)^2+(x-1)^2-(x+1)(x-1)=2x$

۷) $1+\frac{10}{x-4}=x$

■ **حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ درحالت کلی**

روش اوّل (تبدیل به‌مربع کامل نمودن سه‌جمله‌ای):

مراحل حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم کامل را بااین روش، بایک مثال نشان می‌دهیم.

مثال: معادلهٔ $3x^2-4x+1=0$ را حل کنید.

مراحل حلّ معادله بااین روش، به‌شرح زیر می‌باشد :

۱) دوطرف معادله را برضریب x^2 (دراین‌جا ۳) تقسیم می‌کنیم و عدد ثابت را به‌طرف دیگر معادله می‌بریم :

$$3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x^2-\frac{4}{3}x=-\frac{1}{3}$$

۲) نصف ضریب x (دراین‌جا $-\frac{4}{3}$) را به‌دست آورده و به‌توان دو می‌رسانیم :

$$-\frac{4}{3}\div 2=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=-\frac{2}{3} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

۳) عدد حاصل (دراین‌جا $\frac{4}{9}$) را به‌دو طرف معادله اضافه می‌کنیم : $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=-\frac{1}{3}+\frac{4}{9}$

۴) سمت چپ معادله، همیشه مربع کامل است. [به‌کمک اتحادهای $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ و $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$] آن را به‌صورت مربع دوجمله‌ای می‌نویسیم و سمت راست معادله را نیز ساده می‌کنیم :

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

۵) از دوطرف تساوی آخر، جذر می‌گیریم (به شرطی که عدد سمت راست، مثبت یا صفر باشد) و جوابهای معادله را به‌دست می‌آوریم :

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9} \Rightarrow x-\frac{2}{3}=\pm\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_1=1 \quad \text{یا} \quad x_2=\frac{1}{3}$$

و به‌این ترتیب، دوریشهٔ حقیقی معادله به‌دست می‌آید. به‌مثالی دیگر توجه کنید.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+x-10=0$ را به‌دست آورید.

حل: همان مراحل رابترتیب طی می‌کنیم. درستی عمل را در هر مرحله تحقیق کنید :

۱) $x^2+\frac{1}{2}x-5=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x=5$

(این مرحله را درحلّ مسأله نمی نویسیم، دراین‌جا برای آشنایی خواننده آمده است.)

۲) $\frac{1}{2}\div 2=\frac{1}{4} \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

۳) $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=5+\frac{1}{16}$

۴) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$

۵) $x+\frac{1}{4}=\pm\frac{9}{4} \Rightarrow x=-\frac{1}{4}\pm\frac{9}{4} \qquad x_1=-\frac{5}{2}\ ,\ x_2=2$

یعنی ریشه‌های معادله، ۲ و $-\frac{5}{2}$ می‌باشند.

مثال: معادلهٔ $2x^2+x+3=0$ را حل کنید.

حل: می‌نویسیم :

$$x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x=-\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}-\frac{3}{2} \Rightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{-23}{16}<0$$

چون سمت راستِ، عددی منفی است و جذر ندارد، لذا

معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد.

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را به‌روش گفته شده حل کنید:

۱) $2x^2 - x - 6 = 0$

۲) $3x^2 - x - 2 = 0$

۳) $5x^2 + 3x - 2 = 0$

۴) $6x^2 - 13x + 6 = 0$

■ **روش دوم (دستور b یا دستور Δ):**

برای حلّ معادله از این روش، در واقع باید معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را در حالت کلی، به روش تبدیل به‌مربع کامل حل نمود. برای این منظور، مراحل پیش‌گفته را بترتیب می‌نویسیم:

$$1)\ ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$2)\ \frac{b}{a} \div 2 = \frac{b}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{b}{2a} \quad ; \quad \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$3)\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$4)\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$5)\ x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(b^2 - 4ac \geq 0) \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

نتیجه: درحالتی که $b^2 - 4ac$ مثبت باشد، این معادله دارای ریشهٔ حقیقی است که از دستور $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ به دست می‌آیند. درحالتی که $b^2 - 4ac = 0$ باشد، دو ریشهٔ معادله باهم مساوی شده و معادله دارای دوریشهٔ مساوی (به‌اصطلاح ریشهٔ مضاعف) به‌صورت $x = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد و درحالتی که $b^2 - 4ac < 0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. $b^2 - 4ac$ را که درحلّ معادله و تعیین تعداد ریشه‌های آن، نقش اساسی دارد، **مبیّن معادله** نامیده و آن را با نماد Δ نمایش می‌دهیم. خلاصهٔ بحث بااین نمادگذاری، به‌صورت زیر می‌باشد:

برای حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ابتدا مبیّن معادلهٔ $\Delta = b^2 - 4ac$ را تشکیل می دهیم و سپس:

معادله، دوریشهٔ حقیقی به‌صورت زیر دارد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

معادله دارای دوریشهٔ مضاعف به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال: معادلهٔ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ را به‌روش گفته شده حل کنید:

حل: مبیّن معادله (Δ) را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1$$

چون $\Delta > 0$ است، پس معادله دوریشهٔ حقیقی دارد که از فرمول گفته شده، به‌صورت زیر به دست می آیند:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

یعنی ریشه‌های معادله، ۱ و $\frac{2}{3}$ هستند.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $3x^2 - 10x + 3 = 0$ را به‌دست آورید.

حل: به‌کمک همان روش، می‌توان نوشت:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 100 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{10 + 8}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

یعنی ریشه‌های معادله، ۳ و $\frac{1}{2}$ هستند.

مثال: حلّ معادلهٔ $4x^2-4x+1=0$

حل: $\Delta=(-4)^2-4\times4\times1=16-16=0$

چون $\Delta=0$ می‌باشد، پس معادله دارای ریشهٔ مضاعف به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

یعنی معادله دارای یک ریشهٔ (یا دو ریشهٔ برابر) مساوی $\frac{1}{2}$ است.

مثال: حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2-x+1=0$.

حل: $\Delta=(-1)^2-4\times3\times1=1-12=-11<0$

چون $\Delta<0$ می باشد، پس معادله دارای ریشهٔ حقیقی نمی‌باشد.

مثال: حلّ معادله $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$

حل: دامنهٔ معادله، مساوی $D=\mathbb{R}-\{2,-2\}$ می‌باشد. (چرا؟) اکنون با مخرج‌مشترک‌گیری از سمت چپ معادله، نتیجه می‌شود:

$$\frac{(x-2)^2+x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{8}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-4x+4+x^2+2x}{x^2-4}=\frac{8}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x+4=8 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0$$

$$\Rightarrow x^2-x-2=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(1)(-2)=1+8=9$$

$$x=\frac{1\pm3}{2} \Rightarrow x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

جوابهای معادله ۲ و ۱- هستند؛ اما جواب $x=2$ جزء دامنهٔ تعریف معادله نمی‌باشد، لذا تنها جواب قابل قبول معادله $x=-1$ است. اکنون شما نیز در تمرین زیر، هریک از معادله‌های داده شده را حل کنید. توجه داشته باشید که انواع معادله‌های داده شده، متنوّع بوده و حالتهای خاص نیز که پیش از این گفته شد، درنمونه‌های داده شده وجود دارند.

تمرین: ریشه‌های هریک از معادله‌های زیر را به‌دست آورید:

1) $2x^2-5x+3=0$

2) $4x^2+x+1=0$

3) $3x^2-5x-8=0$

4) $2x^2-7x+6=0$

5) $6x^2-31x+5=0$

6) $\frac{4x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=-\frac{11}{2}$

7) $2x^2+4x-1=0$

8) $x^2+3x+5=0$

9) $9x^2-6x+1=0$

10) $\frac{x+2}{x}-\frac{x-1}{x+1}=4$

11) $12x^2-5x=9x^2+7x$

12) $\frac{4}{x^2-10x+25}+\frac{1}{25-x^2}=\frac{1}{x+5}$

13) $\frac{x^2}{a}-\frac{x}{b}=0$

14) $x^2-2ax-3a^2=0$

15) $4x^2-4ax+4a^2=b^2$

16) $\frac{x^2}{6}-\frac{2x}{3}=\frac{3x-10}{4}$

17) $(x+1)^2+(x-1)^2+(x+1)(x-1)=13$

چند مثال دیگر: مثال: m را طوری تعیین کنید که معادلهٔ $x^2-2mx+6-m=0$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد.

حل: برای آن‌که معادلهٔ بالا دارای ریشهٔ مضاعف (مساوی) باشد، لازم است $\Delta=0$ باشد، بنابراین داریم:

$$\Delta=(2m)^2-4(6-m)=0$$

$$\Rightarrow 4m^2-24+4m=0 \Rightarrow m^2+m-6=0$$

اکنون مقدار m را از حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم بالا به‌کمک تجزیهٔ آن به‌حاصلضرب، به‌دست می‌آوریم:

$$(m+3)(m-2)=0 \Rightarrow m+3=0 \Rightarrow m-3$$

یا

$$m-2=0 \;\Rightarrow\; m=2$$

یعنی به‌ازای $m=2$ یا $m=-3$ معادلهٔ فوق دارای ریشهٔ مضاعف خواهد بود.

تمرین: به‌ازای این دومقدار، m معادله را حل کنید و ریشهٔ مضاعف آن را به‌دست آورید.

مثال: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، x_1+x_2 و $x_1.x_2$ را برحسب a، b و c به‌دست آورید.

حل: بترتیب می‌نویسیم:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Delta=b^2-4ac$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1.x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x_1.x_2=\frac{c}{a}$$

یعنی مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ از دستورهای $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ و $x_1x_2=\frac{c}{a}$ به‌دست می‌آیند.

مثلاً درمعادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2-x-4=0$ اگر ریشه‌های معادله x_1 و x_2 باشند، داریم:

$$x_1x_2=-\frac{4}{3}\ ,\ x_1+x_2=\frac{1}{3}$$

مثال: ثابت کنید درمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر مجموع ضرایب صفر باشد، $(a+b+c=0)$، آن‌گاه یکی از ریشه‌های مساوی ۱ و دیگری مساوی $\frac{c}{a}$ معادله است.

حل: بافرض $a+b+c=0$ نتیجه می‌شود $b=-(a+c)$ و بااین فرض و از دستور Δ معادله را بترتیب زیر حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=a^2+c^2+2ac-4ac$$
$$=a^2+c^2-2ac=(a-c)^2$$

بنابراین داریم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2}}{2a}=\frac{a+c\pm(a-c)}{2a}$$

$$\Rightarrow\ x_1=\frac{a+c+a-c}{2a}=\frac{2a}{2a}=1$$

$$x_2=\frac{a+c-a+c}{2a}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

و این، معادل باحکم مسأله می‌باشد.

از این موضوع، درحلّ سریعتر معادله‌هایی که مجموع ضرایب آنها مساوی صفر است، استفاده می‌کنیم. مثلاً ریشه‌های معادلهٔ $8x^2+11x-19=0$ برابرند با $x_1=1\ ,\ x_2=-\frac{19}{8}$.

تمرین:

۱ـ ثابت کنید درمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، هرگاه $a+c=b$ باشد، آن‌گاه یکی از دوریشه مساوی ۱- و دیگری مساوی $-\frac{c}{a}$ می‌باشد.

۲ـ هرگاه درمعادلهٔ $x^2+2mx+m^2+n=0$ ریشه‌ها بایکدیگر مساوی باشند، ثابت کنید: $n=0$

۳ـ m را طوری به‌دست آورید که ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5x+m=0$ عکس یکدیگر باشند.

۴ـ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ: $x^2-(4a+4)x+(3a^2+6a+3)=0$ مساوی ۲ باشد، a، و ریشهٔ دیگر را به‌دست آورید.

۵ـ a را طوری به‌دست آورید که ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(3a+1)x+2a^2+2=0$ باهم مساوی باشند.

کاربرد معادله‌ها در حلّ مسائل مختلف

این بحث را باچند مثال توضیح می‌دهیم :

مثال: محیط یک مستطیل ۱۶ سانتیمتر است. ابعاد آن را طوری بیابید که مساحت آن ۱۲ سانتیمتر مربع باشد.

حل: می‌دانیم که مساحت مستطیل، حاصلضرب طول در عرض آن است. اگر طول مستطیل را x فرض کنیم، عرض آن $\frac{12}{x}$ می‌باشد. (چرا؟) و باتوجه به‌اندازهٔ محیط مستطیل، که مساوی دوبرابر مجموع طول و عرض آن است، می‌توان نوشت :

$$2\left(x+\frac{12}{x}\right)=16 \Rightarrow x+\frac{12}{x}=8$$

و از حلّ این معادله بافرض $x \neq 0$ می‌توان طول مستطیل و از آن‌جا عرض آن را به دست آوریم :

$$\frac{x^2+12}{x}=8 \Rightarrow x^2+12=8x$$
$$\Rightarrow x^2-8x+12=0 \Rightarrow (x-6)(x-2)=0$$
$$\Rightarrow x=6 \text{ یا } x=2$$

طول مستطیل را مساوی ۶ درنظر بگیریم، عرض آن مساوی ۲ می‌شود.

مثال: سنّ علی دوبرابر سنّ برادرش می‌باشد. ۱۰ سال دیگر سنّ علی ۱/۵ برابر سنّ برادرش می‌شود. علی و برادرش چند سال دارند؟

حل: اگر سنّ برادر علی را x درنظر بگیریم، سنّ علی مساوی 2x می‌باشد. اما ۱۰ سال دیگر سنّ علی $2x+10$ و سنّ برادرش $x+10$ است. باتوجه به‌فرض مسأله، برابری زیر مسلّم است :

$$2x+10=1/5(x+10)$$

از حلّ این معادلهٔ درجهٔ اوّل، x به‌دست می‌آید :

$$2x+10=1/5x+15 \Rightarrow 2x-1/5x=15-10$$
$$\Rightarrow 0/5x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{0/5} \Rightarrow x=10$$

یعنی برادر علی ۱۰ سال و علی ۲۰ سال دارد. ۱۰ سال دیگر علی ۳۰ساله و برادرش ۲۰ سال خواهد داشت و سنّ علی ۱/۵ برابر سنّ برادرش خواهد بود.

مثال: دریک میهمانی، عده‌ای حاضر بودند و همگی باهم دست دادند و معلوم شد جمعاً ۵۵بار دستها فشرده شده است، چند نفر دراین میهمانی حاضر بوده‌اند؟

حل: اگر تعداد افراد حاضر دراین میهمانی را مساوی x بگیریم، بدیهی است که، چون هرکس باسایر افراد دست داده است، پس هر کس با $x-1$ نفر دست داده است، لذا مجموع تعداد دست دادنها برابر است با $x(x-1)$، اما دراین شمارش، چون هربار دست دادنها، برای هر دو نفری که باهم دست داده‌اند، یک‌بار شمرده شده است، لذا تعداد فشرده شدن دستهادوبرابر مقدارواقعی آن است. بنابراین، تعداد فشرده شدن دستها دقیقاً برابر است با $\frac{x(x-1)}{2}$ و باتوجه به‌فرض مسأله، می‌توان نوشت : $\frac{x(x-1)}{2}=55$ و از حلّ این معادلهٔ درجهٔ دوم، x به دست می‌آید :

$$\frac{x^2-x}{2}=55 \Rightarrow x^2-x=110 \Rightarrow x^2-x-110=0$$
$$\Rightarrow (x-11)(x+10)=0 \Rightarrow x_1=11 , x_2=-10$$

روشن است که جواب $x_2=-10$، قابل قبول نمی‌باشد و تنها پاسخ صحیح $x_1=11$ است و یعنی ۱۱ نفر دراین میهمانی حاضر بوده‌اند.

مثال: محیط یک مثلث قائم‌الزاویه برابر ۲۴ و اندازهٔ وتر آن ۱۰ می‌باشد. اندازه‌های دو ضلع دیگر مثلث را به‌دست آورید.

حل: اگر طول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلث را x بگیریم، باتوجه به‌اندازهٔ محیط آن و طول وتر، طول ضلع دیگر زاویهٔ قائمه، مساوی $14-x$ می‌باشد (چرا؟). حال به‌کمک قضیهٔ فیثاغورث درمثلثهای قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت :

$$10^2=x^2+(14-x)^2$$

و از حلّ این معادلهٔ درجهٔ دوم بترتیب زیر، می‌توان x را به‌دست آورد :

$$100=x^2+196+x^2-28x \Rightarrow 2x^2-28x+96=0$$
$$\Rightarrow x^2-14x+48=0$$
$$\Rightarrow (x-6)(x-8)=0 \Rightarrow x-6=0 \text{ یا } x-8=0$$
$$\Rightarrow x=6 \text{ یا } x=8$$

و از آن‌جا طول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه مساوی ۶ و دیگری مساوی ۸ می‌باشد. (اگر $x=8$ درنظر گرفته شود، $14-x=6$ و اگر $x=6$ باشد، $14-x=8$ می‌شود.)

مثال: پنج عدد صحیح متوالی به‌دست آورید که مجموع مربعات سه‌تای اوّل، برابر مجموع مربعات دوتای آخر باشد.

حل: اگر این پنج عدد متوالی را $n+2$ و $n+1$ و n و $n-1$ و $n-2$ بنامیم، باتوجه به‌فرض مسأله، خواهیم داشت:

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+(n+2)^2$$

باساده کردن این عبارتها و بردن همهٔ عبارتها به‌سمت چپ تساوی، به‌یک معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$n^2-4n+4+n^2-2n+1+n^2$$
$$=n^2+2n+1+n^2+4n+4$$
$$3n^2-6n+5=2n^2+6n+5$$
$$\Rightarrow 3n^2-2n^2-6n-6n+5-5=0$$
$$n^2-12n=0 \Rightarrow n(n-12)=0 \Rightarrow n=0 \text{ یا } n=12$$

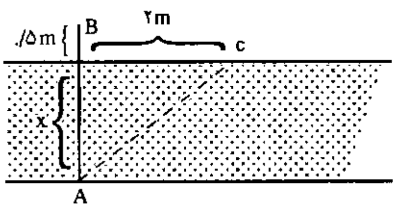
اگر $n=0$ درنظر گرفته شود، این پنج عدد به‌صورت: ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- و اگر $n=12$ در نظر گرفته شود، این پنج عدد به‌صورت: ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۱و ۱۰ به دست می‌آیند، که هر دو سری اعداد، باشرط گفته شده، وفق می‌کنند.

آخرین مثال این بخش را از یک مسألهٔ تاریخی هندوستان برگرفته‌ایم:

گلی که دریک دریاچه روییده است، به‌اندازهٔ ۰/۵ متر از آب بیرون آمده است. دراثر وزش باد، از ریشه خم شده و درمحلّی که درفاصلهٔ ۲ متری محل اوّل آن است، درآب فرو می‌رود. عمق دریاچه چه‌قدر است؟

حل: اگر به‌شکل دقت کنیم و عمق دریاچه را x فرض کنیم، ارتفاع گل $x+0/5$ می‌باشد.

اکنون بانوشتن قضیهٔ فیثاغورث درمثلث ABC، به‌معادله‌ای می‌رسیم که باحلّ آن، x که همان عمق دریاچه است، به‌دست می‌آید:



$$AC^2=AB^2+BC^2 \Rightarrow (x+0/5)^2=x^2+4$$
$$\Rightarrow x^2+0/25+x=x^2+4 \Rightarrow x^2+x-x^2=4-0/25$$
$$\Rightarrow x=3/75m$$

یعنی عمق دریاچه ۳/۷۵ بوده و ارتفاع گل ۴/۲۵m می‌باشد.

تمرین:

۱ـ دو عدد طبیعی متوالی به‌دست آورید که مجموع مربعات آنها مساوی ۱۱۳ باشد.

۲ـ طولهای اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، سه عدد زوج متوالی‌اند، آنها را بیابید.

۳ـ مجموع مربعات سه عدد فرد متوالی، ۳۷۱ است، آن سه عدد را بیابید.

۴ـ عددی را پیدا کنید که مجموع آن، بامعکوس خودش، مساوی $\frac{34}{15}$ باشد.

۵ـ عددی را به‌دست آورید که حاصلضرب آن در ۱۴، به‌اندازهٔ ۸۴ واحد از حاصلضرب آن در ۱۷ کمتر باشد.

■