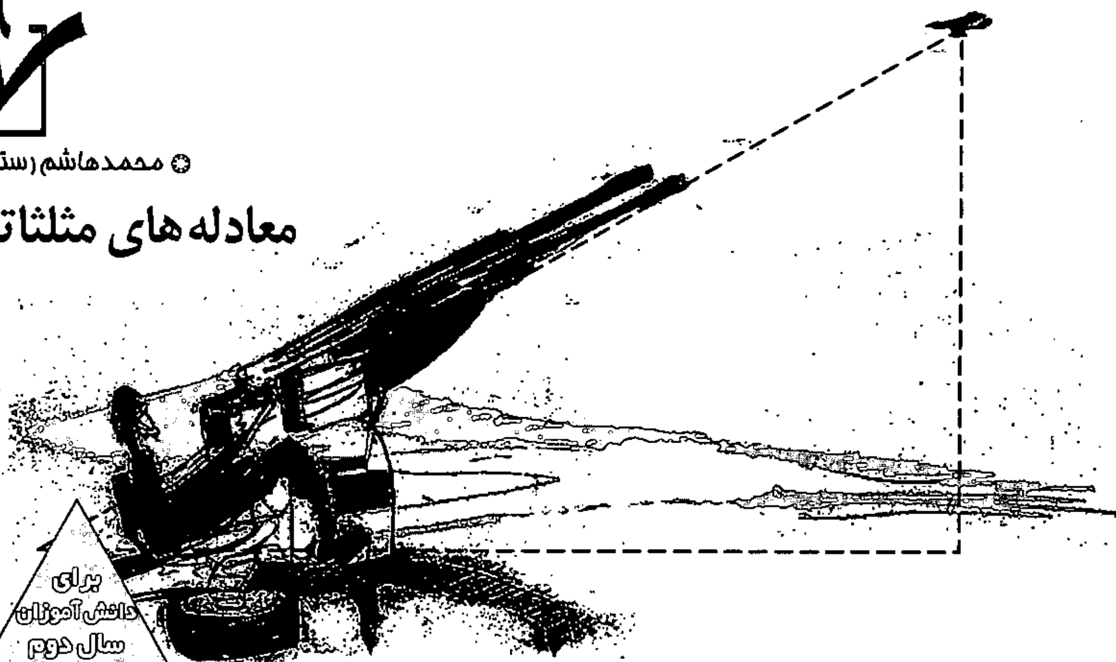
۹

محمدهاشم رستمی

معادله های مثلثاتی



برای دانش آموزان سال دوم متوسطه

# حل معادله های غیرساده ی مثلثاتی

**اشاره**

**در شماره ی قبل درباره ی حل معادله های غیر ساده ی مثلثاتی بحث شد، اینک ادامه ی مطلب را در بخش نهم پی می گیریم:**

**دستور بیوش**

یکی از روش های انتخاب مجهول کمکی برای معادله های غیر ساده ی مثلثاتی یک مجهولی، به ویژه معادله های غیر کلاسیک، یعنی معادله هایی که صورت (فرم) و راه حل مشخصی ندارند، استفاده از قاعده ی بیوش است. در این قاعده، اگر مجهول معادله ی مثلثاتی، $x$ یا مضربی از $x$ باشد، برای حل آن چند حالت خواهیم داشت. اگر در معادله های مثلثاتی داده شده:

۱. کمان $x$ را به $(-x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، $\cos x$ را مجهول کمکی قرار می دهیم.

۲. کمان $x$ را به $(\pi - x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، $\sin x$ را مجهول کمکی قرار می دهیم.

۳. کمان $x$ را به $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، $tgx$ را مجهول کمکی قرار می دهیم.

۴. کمان $x$ را به $(-x)$، $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و در هر سه حالت، معادله ی مثلثاتی تغییر نکند، هر یک از سه تابع مثلثاتی $\cos x$، $\sin x$ و یا $tgx$ را می توانیم به عنوان مجهول کمکی اختیار کنیم. همچنین، برای پائین آوردن درجه ی معادله، می توان $\cos 2x$ را که با هر سه تبدیل نام برده بدون تغییر می ماند، مجهول کمکی قرار داد.

۵. کمان $x$ را به $(-x)$، $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، می توانیم $tg\frac{x}{2}$ را مجهول کمکی قرار دهیم.

مثال ۱. معادله ی $\frac{4}{\sin x} + \frac{3}{\cot gx} = \cot gx$ را حل کنید.

حل: با تبدیل $x$ به $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$، معادله تغییر می کند؛ زیرا داریم:

$$x \to \pi - x \Rightarrow \frac{4}{\sin(\pi - x)} + \frac{3}{\cot g(\pi - x)} =$$

$$\cot g(\pi - x) \Rightarrow \frac{4}{\sin x} - \frac{3}{\cot gx} = -\cot gx$$

$$x \to \pi + x \Rightarrow \frac{4}{\sin(\pi + x)} + \frac{3}{\cot g(\pi + x)} =$$

$$\cot g(\pi + x) \Rightarrow \frac{-4}{\sin x} + \frac{3}{\cot gx} = \cot gx$$

اما با تبدیل x به $(-x)$، معادله تغییر نمی‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (-x) \Rightarrow \frac{4}{\sin(-x)} + \frac{3}{\cot g(-x)} = \cot g(-x)$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{\sin x} - \frac{3}{\cos x} = -\cot gx$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\sin x} + \frac{3}{\cot gx} = \cot gx$$

بنابراین برای حل این معادله، cosx را مجهول کمکی قرار می‌دهیم. یعنی در صورت امکان معادله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم و آن گاه تمام نسبت‌های مثلثاتی موجود در آن را برحسب cosx می‌نویسیم، داریم:

$$\frac{4}{\sin x} + \frac{3\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{4\cos x + 3\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos x + 3(1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$-4\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

اکنون فرض می‌کنیم $\cos x = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$4y^2 - 4y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{+2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4} \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2} \text{ و } y = \frac{3}{2} > 1$$

جواب $y = \frac{3}{2}$ قابل قبول نیست، زیرا $-1 \le y = \cos x \le 1$ است. بنابراین برای جواب قابل قبول $y = -\frac{1}{2}$ داریم:

$$\cos x = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$ جواب کلی معادله

**نکته**: دامنه‌ی تعریف معادله‌ی داده شده به صورت زیر است:

$$\left\{x \in R \middle| x \neq k\pi ,\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

بنابراین هر دو جواب $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ و $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ قابل قبول هستند. به طور کلی، برای تعیین جواب‌های یک معادله اعم از معادله‌ی جبری یا معادله‌ی مثلثاتی، باید به دامنه‌ی تعریف آن توجه داشته باشیم و در صورت وجود جواب‌های غیر قابل قبول، آن‌ها را از مجموعه جواب‌های به دست آمده حذف کنیم.

**مثال ۲**. معادله‌ی $1 + \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x$ را حل کنید.

**حل**: با تبدیل x به (-x) یا (π+x)، این معادله تغییر می‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (-x) \Rightarrow 1 + \sqrt{2}\sin(-3x) = \cos(-2x)$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x$$

$$x \to (\pi + x) \Rightarrow 1 + \sqrt{2}\sin(3\pi + 3x) = \cos(2\pi + 2x)$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x$$

اما با تبدیل x به(π-x)، معادله تغییر نمی‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (\pi - x) \Rightarrow 1 + \sqrt{2}\sin(3\pi - 3x) = \cos(2\pi - 2x)$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x$$

بنابراین sinx را مجهول کمکی قرار می‌دهیم. یعنی تمام تابع‌های مثلثاتی موجود در معادله را برحسب sinx می‌نویسیم. داریم:

$$1 + \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x \Rightarrow 1 + \sqrt{2}(3\sin x - 4\sin^3 x) =$$

$$1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 3\sqrt{2}\sin x - 4\sqrt{2}\sin^3 x + 2\sin^2 x = 0$$

$$\Rightarrow -\sin x(4\sqrt{2}\sin^2 x - 2\sin x - 3\sqrt{2}) = 0$$

با فرض $\sin x = y$ خواهیم داشت:

$$-y(4\sqrt{2}y^2 - 2y - 3\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0,$$
$$4\sqrt{2}\,y^2 - 2y - 3\sqrt{2} = 0 \Rightarrow$$
$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4\sqrt{2}} = \frac{1 \pm 5}{4\sqrt{2}} \Rightarrow$$
$$y = \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cong \frac{4/2}{4} > 1$$ غیرقابل قبول

$$y = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$ قابل قبول

از آن‌جا داریم:

$y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ و

$$y = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin(-\frac{\pi}{4})$$
$$\Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

و

$x = 2k\pi + \pi - (\frac{-\pi}{4})$ یا $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$

**نکته**: با توجه به این که دامنه‌ی تعریف معادله‌ی داده شده، $\mathbb{R}$ یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، هر سه جواب کلی به‌دست آمده قابل قبول هستند.

**مثال ۳**. معادله‌ی $3\cos x + \cos 3x = 2\sin 3x$ را حل کنید.

**حل**: با تبدیل x به (x-) و (π-x)، این معادله تغییر می‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (-x) \Rightarrow 3\cos(-x) + \cos(-3x) = 2\sin(-3x)$$
$$\Rightarrow 3\cos x + \cos 3x = -2\sin 3x$$
$$x \to (\pi - x) \Rightarrow 3\cos(\pi - x) + \cos(3\pi - 3x) = 2\sin(3\pi - 3x)$$
$$\Rightarrow -3\cos x - \cos 3x = 2\sin 3x$$

اما با تبدیل x به $(\pi + x)$، معادله تغییر نمی‌کند، زیرا داریم:

$$x \to \pi + x \Rightarrow 3\cos(\pi + x) + \cos(3\pi + 3x) = 2\sin(3\pi + 3x)$$
$$\Rightarrow -3\cos x - \cos 3x = -2\sin 3x \Rightarrow$$
$$3\cos x + \cos 3x = 2\sin 3x$$

بنابراین tgx را مجهول کمکی قرار می‌دهیم. یعنی پس از ساده کردن معادله، تمام تابع‌های مثلثاتی موجود در معادله را برحسب tgx می‌نویسیم. داریم:

$$3\cos x + \cos 3x = 2\sin 3x$$
$$\Rightarrow 3\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x = 2(3\sin x - 4\sin^3 x)$$
$$\Rightarrow 4\cos^3 x - 6\sin x + 8\sin^3 x = 0$$

با فرض $\cos x \neq 0$ یعنی $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$، طرفین معادله‌ی بالا را بر $\cos^3 x$ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{4\cos^3 x}{\cos^3 x} - \frac{6\sin x}{\cos^3 x} + \frac{8\sin^3 x}{\cos^3 x} = 0$$
$$\Rightarrow 4 - 6tgx(1 + tg^2x) + 8tg^3x = 0$$
$$\Rightarrow 2tg^3x - 6tgx + 4 = 0 \Rightarrow tg^3x - 3tgx + 2 = 0$$

حال فرض می‌کنیم $tgx = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$y^3 - 3y + 2 = 0; (1 - 3 + 2) = 0$$

مجموع ضریب‌های این معادله برابر صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $y = 1$ و معادله بر $y - 1$ بخش‌پذیر است. خواهیم داشت:

$$y^3 - 3y + 2 = (y-1)(y^2 + y - 2) = 0$$
$$\Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ و } y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ و } y = -2$$

بنابراین، معادله یک ریشه‌ی مضاعف $y = 1$ و یک ریشه‌ی ساده‌ی $y = -2$ دارد که هر دو قابل قبول هستند، بنابراین داریم:

$$y = 1 \Rightarrow tgx = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$
$$y = -2 \Rightarrow tgx = -2$$
$$x = k\pi + Arctg(-2)$$

**نکته**: جواب‌های معادله با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ سازگارند.

**مثال ۴**. معادله‌ی $2\sin x \sin 3x = 1$ را حل کنید.

**حل**: با تبدیل x به (x-)، (π-x) و (π+x)، این معادله تغییر نمی‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (-x) \Rightarrow 2\sin(-x)\sin(-3x) = 1$$
$$\Rightarrow 2(-\sin x)(-\sin 3x) = 1 \Rightarrow 2\sin x \sin 3x = 1$$
$$x \to (\pi - x) \Rightarrow 2\sin(\pi - x)\sin(3\pi - 3x) = 1$$
$$\Rightarrow 2\sin x \sin 3x = 1$$
$$x \to (\pi + x) \Rightarrow 2\sin(\pi + x)\sin(3\pi + 3x) = 1$$
$$\Rightarrow 2(-\sin x)(-\sin 3x) = 1 \Rightarrow 2\sin x \sin 3x = 1$$

بنابراین هر یک از تابع‌های cosx یا sinx یا tgx را می‌توان مجهول کمکی قرار داد. اما بهتر است cos۲x را مجهول کمکی بگیریم. برای این کار چنین عمل می‌کنیم:

$$2\sin x\cos 3x = 1 \Rightarrow \cos(x-3x) - \cos(x+3x) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(-2x) - \cos 4x = 1 \Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 1$$

$$\Rightarrow \cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 1 \Rightarrow -2\cos^2 2x + \cos 2x = 0$$

با فرض $\cos 2x = y$ داریم:

$$-2y^2 + y = 0 \Rightarrow y(-2y+1) = 0 \Rightarrow y = 0\ ,\ \ y = \frac{1}{2}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند، زیرا y به بازه‌ی $[-1,+1]$ تعلق دارد. بنابراین داریم:

$$y = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

**نکته:**

۱. می‌دانیم که $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ است. بنابراین:

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}\left[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(-2x) - \cos 4x\right]$$

اما $\cos(-2x) = \cos 2x$ بنابراین:

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

۲. چون $\cos 2x = y$ فرض شده است، پس دامنه‌ی تغییرات y بازه‌ی $[-1,+1]$ است.

۳. با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$، داریم:

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$$

**مثال ۵.** معادله‌ی $\sin x - 2\cos x = 1$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (-x)، (π-x) و (π+x)، این معادله تغییر می‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (-x) \Rightarrow \sin(-x) - 2\cos(-x) = 1 \Rightarrow -\sin x - 2\cos x = 1$$

$$x \to (\pi - x) \Rightarrow \sin(\pi - x) - 2\cos(\pi - x) = 1 \Rightarrow \sin x + 2\cos x = 1$$

$$x \to (\pi + x) \Rightarrow \sin(\pi + x) - 2\cos(\pi + x) = 1 \Rightarrow -\sin x + 2\cos x = 1$$

بنابراین، $tg\frac{x}{2}$ را مجهول کمکی قرار می‌دهیم. یعنی تابع‌های مثلثاتی موجود در معادله را بر حسب $tg\frac{x}{2}$ می‌نویسیم. داریم:

$$\sin x - 2\cos x = 1 \Rightarrow \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{2(1-tg^2\frac{x}{2})}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow 2tg\frac{x}{2} - 2 + 2tg^2\frac{x}{2} = 1 + tg^2\frac{x}{2} \Rightarrow tg^2\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} - 3 = 0$$

حال فرض می‌کنیم $tg\frac{x}{2} = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1\ ,\ \ y = -3$$

هر دو جواب قابل قبولند، بنابراین داریم:

$$y = 1 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$y = -3 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = -3 \Rightarrow x = 2k\pi + 2\mathrm{Arctg}(-3)$$

**نکته:** معادله‌ی $\sin x - 2\cos x = 1$، کلاسیک نوع اول است که روش بالا یکی از روش‌های حل آن است.

**مثال ۶.** معادله‌ی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (-x)، (π-x) و (π+x)، این معادله تغییر می‌کند. چرا؟ بنابراین می‌توانیم $tg\frac{x}{2}$ را مجهول کمکی قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$\left(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right)^3 + \left(\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right)^3 = 1 \Rightarrow$$

پس از ساده کردن این معادله خواهیم داشت:

$$8tg^3\frac{x}{2} - 2tg^6\frac{x}{2} - 6tg^2\frac{x}{2} = 0$$ یا

$$4tg^3\frac{x}{2} - tg^6\frac{x}{2} - 3tg^2\frac{x}{2} = 0$$

حال با فرض $tg\frac{x}{2} = y$ داریم:

$$4y^3 - y^6 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2(4y - y^4 - 3) = 0$$

$$y^2 = 0 \Rightarrow y = 0\ ,\ \ 4y - y^4 - 3 = 0 \Rightarrow y^4 - 4y + 3 = 0$$

مجموع ضریب‌های این معادله مساوی صفر است. بنابراین یک جواب آن $y = 1$ و معادله بر $y - 1$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$y^4 - 4y + 3 = (y-1)(y^3 + y^2 + y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1\,,\ \ y^3 + y^2 + y - 3 = 0\,,\ 1+1+1-3 = 0$$

مجموع ضریب‌های این معادله نیز صفر است. پس یکی از جواب‌های آن $y = 1$ و معادله بر $y - 1$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$y^3 + y^2 + y - 3 = (y-1)(y^2 + 2y + 3) = 0$$

$$\Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1\,,\ \ y^2 + 2y + 3 = 0\,,$$

$\Delta' = 1 - 3 = -2 < 0$ ریشه ندارد

بنابراین، جواب‌های به‌دست آمده برای $y$ که همه قابل قبول هستند، عبارتند از: $y = 0$ و $y = 1$. از آن‌جا خواهیم داشت:

$$y = 0 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$y = 1 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

**نکته‌ی مهم:** علاوه بر قاعده‌ی بیوش که یک روش کلی برای حل معادله‌های غیرساده‌ی مثلثاتی است، در بسیاری از موارد، روش‌های دیگری برای حل آن‌ها وجود دارد که راه‌حل‌های بسیار جالب و سریع‌تری به دست می‌دهند. برخی از این روش‌ها و مثال‌هایشان را قبلاً دیدید. اینک به چند مثال دیگر توجه کنید:

**مثال ۱.** معادله‌ی $\sin^2 x + 2\cos 2x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

حل: با استفاده از اتحاد $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ داریم:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + 2\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \cos 2x + 4\cos 2x = 1$$

$$\Rightarrow 3\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

**مثال ۲.** معادله‌ی $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ را حل کنید.

حل: با استفاده از دستور

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

و $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ داریم:

$$1 + \cos 2x + \cos x + \cos 3x = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + 2\cos\frac{x + 3x}{2}\cos\frac{x - 3x}{2} = 0$$

$$2\cos^2 x + 2\cos 2x\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x(\cos x + \cos 2x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos x \times 2\cos\frac{x + 2x}{2}\cos\frac{x - 2x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos x\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\cos\frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

**مثال ۳.** معادله‌ی $\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = 0$ را حل کنید.

حل: این معادله را به یک معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2x = 2k\pi \pm (\pi - \frac{x}{2}) \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi - \frac{x}{2}, 2x = 2k\pi - \pi + \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4k\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}, x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

**مثال ۴.** معادله‌ی $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$ و $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ است. بنابراین داریم:

$$1 - 3\sin^2 x\cos^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 3\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{4}\sin^2 2x = \frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow 1 - \cos 4x = 2 \Rightarrow$$

$$\cos 4x = -1 = \cos\pi \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$