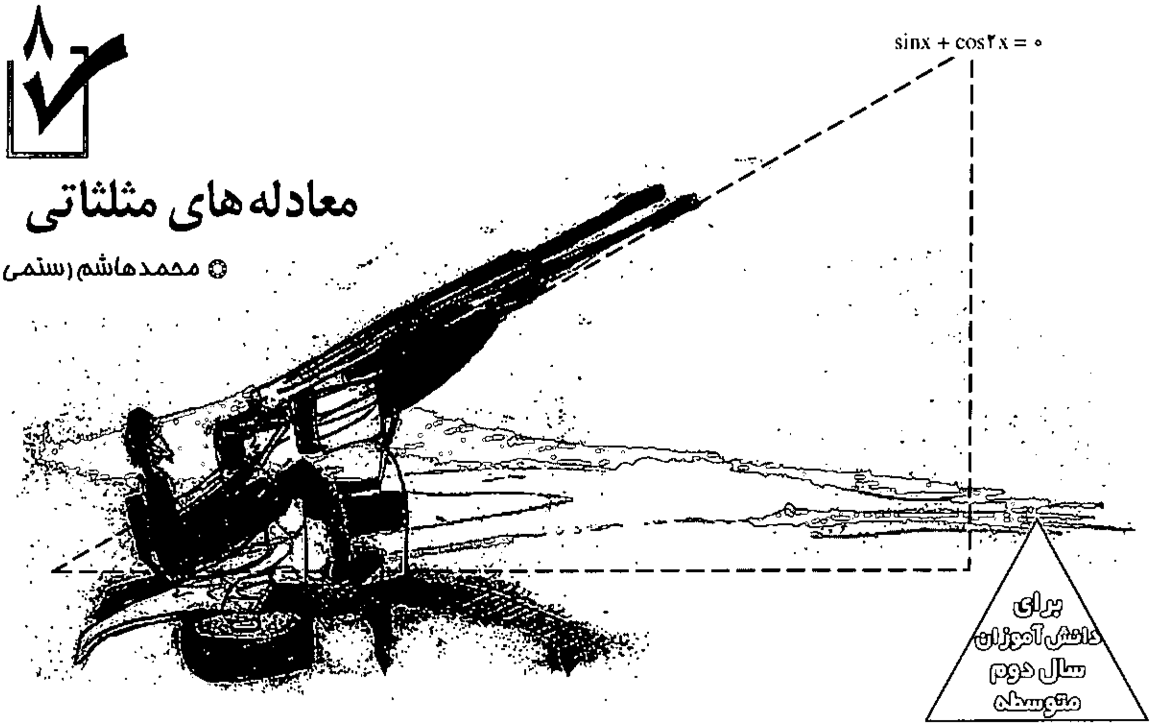
۸

معادله های مثلثاتی

محمد هاشم رستمی



حل معادله های غیرسادهٔ مثلثاتی

اشاره: در شماره قبل راجع به معادله‌های غیر ساده مثلثاتی بحث کردیم و روش حل معادله‌هایی را بررسی کردیم که به صورت $A \times B \times C \times ... = 0$ قابل تبدیل به این صورت هستند و در آن‌ها $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ و... معادله های ساده مثلثاتی‌اند، اینک در ادامه مطلب داریم:

۲. معادله های غیر سادهٔ مثلثاتی که بر حسب یک نسبت از یک زاویه به شکل معادله‌های جبری قابل حل، مانند معادلهٔ درجهٔ دوم ($ax^2 + bx + c = 0$)، معادلهٔ درجهٔ سوم ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$)، معادلهٔ دومجذوری ($ax^4 + bx^2 + c = 0$) و... هستند یا با انجام تغییرات مناسب و مجاز در معادلهٔ مثلثاتی داده شده، قابل تبدیل به معادله های جبری قابل حل هستند. برای حل این گونه معادله های مثلثاتی، پس از انتخاب مجهول کمکی مناسب و تبدیل آن‌ها به معادله های جبری قابل حل، این معادله های جبری را حل می کنیم، آن‌گاه جواب های قابل قبول به دست آمده برای این معادله‌ها را، به جای مجهول کمکی قرار می دهیم تا معادله های سادهٔ مثلثاتی به دست آیند. با حل این معادله های سادهٔ مثلثاتی، جواب های معادلهٔ داده شده مشخص می شوند. به مثال های زیر توجه کنید.

مثال ۱. معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: به طوری که دیده می‌شود، معادلهٔ داده شده، معادله‌ای درجهٔ ۲ بر حسب $\cos x$ است. بنابراین با فرض $\cos x = y$، خواهیم داشت:

$$\cos x = y \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow y = -1\ ,\ \ y = \frac{1}{2}$$

چون $-1 \le \cos x = y \le 1$ است، پس هر دو جواب به دست آمده، قابل قبول هستند و داریم:

$y=-1 \Rightarrow \cos x = -1 = \cos\pi \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi$ یا

یا $x = 2k\pi+\pi$

$$y=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2kn \pm \frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی داده شده، عبارتند از:

$$x=2k\pi+\pi \text{ و } x=2k\pi-\frac{\pi}{3} \text{ و } x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$$

مثال۲. معادله مثلثاتی $2\sin^2(x+\frac{5\pi}{8})-\cos(x+\frac{\pi}{8})-3=0$ را حل کنید.

حل: چون $(x+\frac{5\pi}{8})-(x+\frac{\pi}{8})=\frac{\pi}{2}$، یعنی تفاضل دو زاویه $\frac{\pi}{2}$ است، پس داریم:

$$\sin(x+\frac{5\pi}{8})=\cos(x+\frac{\pi}{8})$$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})-\cos(x+\frac{\pi}{8})-3=0$$

فرض می‌کنیم $\cos(x+\frac{\pi}{8})=y$ باشد، در این صورت داریم:

$$2y^2-y-3=0 \Rightarrow y=\frac{+1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{1\pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow y=-1 \text{ و } y=\frac{3}{2}>1$$

تنها جواب $y=-1$ قابل است؛ بنابراین داریم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{8})=-1=\cos\pi \Rightarrow x+\frac{\pi}{8}=2kn\pm\pi$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{8}=2kn+\pi \Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{7\pi}{8}}$$

پس معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=2k\pi+\frac{7\pi}{8}$ است.

مثال۳. معادله $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\cot gx=1$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\cot gx=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-1=0 \Rightarrow \frac{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1=0 \Rightarrow (\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1)^2=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}-1=0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2}=kn+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

با توجه به این که دامنهٔ تعریف تابع $x \ne k\pi$ است، جواب بالا قابل قبول است.

مثال۴. معادله   را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ است؛ بنابراین داریم:

$$3\sin x-4\sin^3 x+2\sin x-1=0 \Rightarrow$$

$$-4\sin^3 x+5\sin x-1=0$$

فرض می‌کنیم $\sin x = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$-4y^3+5y-1=0 \Rightarrow 4y^3-5y+1=0$$

چون مجموع ضریب‌های این معادله صفر است $(4-5+1=0)$، یکی از جواب‌های این معادله مساوی ۱ است، پس این معادله بر $y-1$ بخش‌پذیر است؛ از آن‌جا خواهیم داشت:

$$4y^3-5y+1=(y-1)(4y^2+4y-1)=0 \Rightarrow$$

$$y-1=0 \Rightarrow y=1 \text{ و } 4y^2+4y-1=0 \Rightarrow$$

$$y=\frac{-4\pm 4\sqrt{2}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2} & \text{ق ق} \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$y=1 \Rightarrow \sin x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$$y=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin x=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

مثال۵. معادلهٔ $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ است، بنابراین داریم:

$$\sin^4 x+(1-\sin^2 x)^2-\frac{5}{8}=0\Rightarrow 2\sin^4 x-2\sin^2 x+\frac{3}{8}=0$$

معادلهٔ بالا یک معادلهٔ دو مجذوری برحسب $\sin x$ است.

بافرض $\sin^2 x=y$ خواهیم داشت:

$$2y^2-2y+\frac{3}{8}=0\Rightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{3}{4}}}{2}=\frac{1\pm\frac{1}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{3}{4} \text{ و } y=\frac{1}{4}$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند، پس داریم:

$$y=\frac{3}{4}\Rightarrow \sin^2 x=\frac{3}{4}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{3}}$$

و $x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}$ یا $\boxed{x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}}$

$$\sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}=\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\Rightarrow \boxed{x=2k\pi-\frac{\pi}{3}}$$

و $x=2k\pi+\pi-\left(\frac{-\pi}{3}\right)\Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}}$

$$y=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{6}},\ \boxed{x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\Rightarrow \boxed{x=2k\pi-\frac{\pi}{6}},\ \boxed{x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}}$$

آزمون ۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x-\cos x-3=0$ کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $2k\pi+\pi$ ۳) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{2}$

کنکور سراسری رشتهٔ علوم تجربی ۱۳۸۱

حل: بافرض $\cos x=y$ داریم:

$$2y^2-y-3=0\Rightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{1\pm 5}{4}\Rightarrow y=\frac{3}{2} \text{ و } y=-1$$

جواب $y=\frac{3}{2}$ قابل قبول نیست؛ امّا $y=-1$ قابل قبول است و داریم:

$$y=-1\Rightarrow \cos x=-1=\cos\pi\Rightarrow x=2k\pi\pm\pi \text{ یا } \boxed{x=2k\pi+\pi}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

آزمون ۲. معادلهٔ $tg^2x-2\cot g^2x=1$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۸

کنکور دانشگاه آزاد، ۱۳۸۲

حل: با جایگزینی $\cot gx=\frac{1}{tgx}$ داریم:

$$tg^2x-\frac{2}{tg^2x}=1\Rightarrow tg^4x-tg^2x-2=0$$

(معادلهٔ دو مجذوری)

فرض می‌کنیم $tg^2x=y$ باشد، خواهیم داشت:

$$y^2-y-2=0\Rightarrow y=-1 \text{ و } y=2$$

جواب $y=-1$ قابل قبول نیست؛ (زیرا $tg^2x\neq -1$)

امّا $y=2$ قابل قبول است و داریم:

$$y=2\Rightarrow tg^2x=2\Rightarrow tgx=\sqrt{2} \text{ و } tgx=-\sqrt{2}$$

هریک از معادله‌های $tgx=\sqrt{2}$ و $tgx=-\sqrt{2}$ دربازهٔ $[0,2\pi]$ دارای دو جواب‌اند، پس معادلهٔ داده شده دارای ۴ جواب متعلق به این بازه است. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

آزمون ۳. معادله $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=3+\sin^2 x$ در بازه $[\pi,5\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

کنکور دانشگاه آزاد ۱۳۸۱

حل: راه اول. طرف دوم این معادله، حداقل مساوی ۳ است و این در صورتی است که $\sin x=0$ یا $x=k\pi$ باشد؛ امّا در این صورت لازم است $\cos x=\cos 2x=\cos 3x=1$ باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\\ \cos x=1\Rightarrow x=2k\pi\\ \cos 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi\Rightarrow x=k\pi\\ \cos 3x=1\Rightarrow 3x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

جواب‌های خصوصی مشترک دستگاه بالا در بازهٔ $[\pi\ ,\ 5\pi]$ تنها $x=2\pi$ و $x=4\pi$ است.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

راه دوم. می‌دانیم که $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ ، $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ و $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ است، بنابراین داریم:

$$\cos x+2\cos^2 x-1+4\cos^3 x-3\cos x=3+1-\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 4\cos^3 x+3\cos^2 x-2\cos x-5=0$$

با فرض $\cos x=y$ داریم:

$$4y^3+3y^2-2y-5=0$$

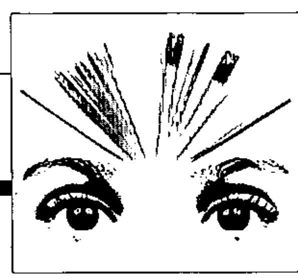
مجموع ضریب‌های این معادله برابر صفر است $(4+3-2-5=0)$؛ بنابراین، معادله بر $y-1$ قابل تقسیم است، از آن‌جا خواهیم داشت:

$$4y^3+3y^2-2y-5=(y-1)(4y^2+7y+5)=0$$

$$\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1\Rightarrow\cos x=1=\cos 0\Rightarrow\boxed{x=2k\pi}$$

و $4y^2+7y+5=0$ ، $\Delta=49-80=-31<0$ ریشه ندارد.

پس تنها جواب کلی قابل قبول $x=2k\pi$ است که جواب‌های خصوصی آن در بازهٔ $[\pi,5\pi]$ عبارتند از $2\pi,4\pi$؛ بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

معماهای فــکری و منطقی

در یک قضیهٔ جنایی، شش نفر C، F، G، H، M و W درگیرند. شش نفر مزبور، نه لزوماً به همین ترتیب، عبارت‌اند از قربانی، قاتل، شاهد، پلیس، قاضی و جلاّد. حقایق مربوط به قضیه ساده‌اند. قربانی بلافاصله از زخم تیری که از فاصلهٔ نزدیک شلیک شده، مُرده است. شاهد، صحنهٔ ارتکاب جنایت را ندیده، اما قسم می‌خورد که صدای مشاجره و سپس تیراندازی را شنیده است.

پس از محاکمه‌ای طولانی، قاتل محکوم به مرگ و به دار آویخته شد.

M هم قربانی، قاتل را می‌شناخته است.

در دادگاه، قاضی از M می‌خواهد ماجرای تیراندازی را تعریف کند.

W آخرین نفری بود که F را زنده دیده است.

پلیس گواهی داد که G را در نزدیکی محلی دستگیر کرده که جسد در آن‌جا پیدا شده است.

H و W هیچ‌گاه ملاقات نکرده‌اند.

نقش هریک در این ملودرام ناخوشایند چه بوده است؟