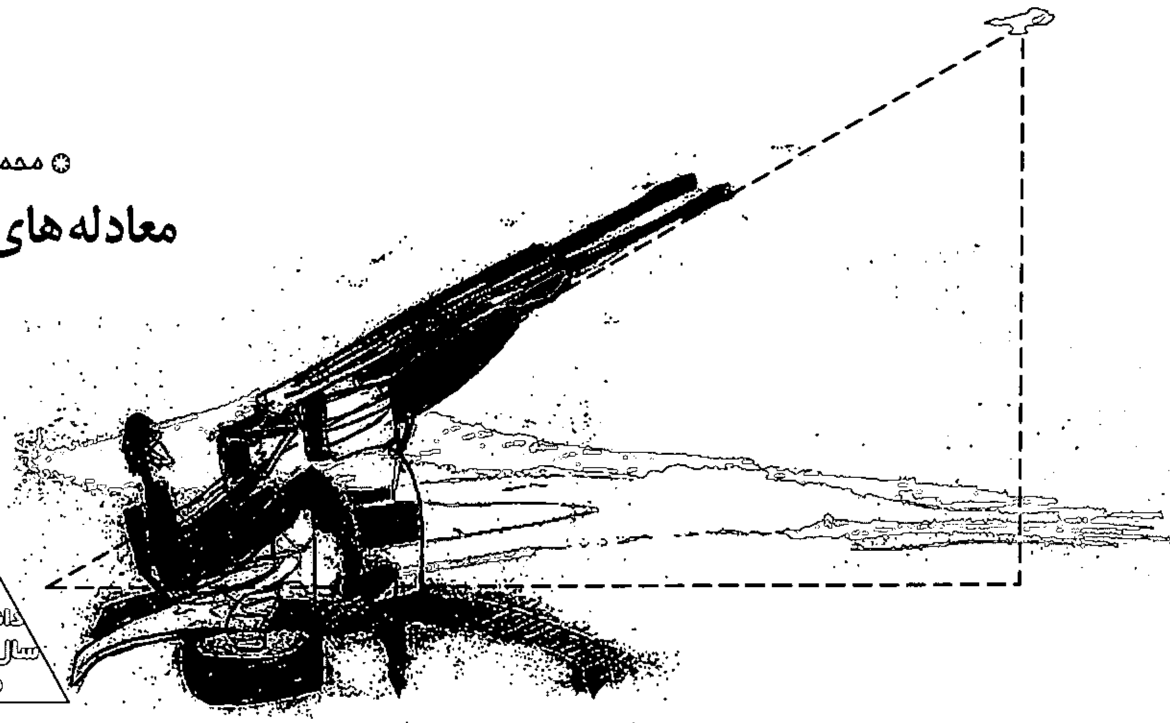
۱۰

محمدهاشم رستمی

معادله‌های مثلثاتی



برای دانش‌آموزان سال اول و دوم متوسطه

حل معادله‌های غیرساده‌ی مثلثاتی

اشاره

در شماره‌های قبل، چند روش کلی برای حل معادله‌های غیرساده‌ی مثلثاتی یک‌مجهولی را که شکل و راه‌حل مشخصی ندارند، دیدید. توجه به دسته‌بندی ارائه شده در این شماره نیز برای حل برخی از این معادله‌ها مفید است.

الف) زاویه‌ی مجهول داده شده در معادله یکی است، اما تابع‌های مثلثاتی داده شده در معادله متفاوتند؛ مانند معادله‌های زیر:

$$\sin x + 2\cos^2 x = 1 \ ، \ 2\operatorname{tg}2x - \operatorname{cotg}2x = \frac{1}{\cos 2x} \ و$$

$$\sin^4 \frac{a}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = 1 \ .$$

برای حل این‌گونه معادله‌ها، با استفاده از رابطه‌های موجود بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، تمام تابع‌های مثلثاتی داده‌شده در معادله را برحسب یک تابع مثلثاتی از آن زاویه می‌نویسیم تا معادله‌ای مثلثاتی، شامل یک تابع از یک زاویه، یعنی در واقع معادله‌ای یک‌مجهولی، به دست آید. آن‌گاه این معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۱. معادله‌ی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. بنابراین داریم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} \Rightarrow (1-\cos^2 x)^2 + \cos^4 x = \frac{5}{8} \Rightarrow$$

$$1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x + \cos^4 x - \frac{5}{8} = 0 \Rightarrow$$

$$16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 3 = 0$$

با فرض $\cos^2 x = y$ خواهیم داشت:

$$16y^2 - 16y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{16} = \frac{8 \pm 4}{16} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{4} \ و \ y = \frac{3}{4}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. بنابراین داریم:

$$y=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=-\cos\frac{\pi}{۶}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow$$

$$x=۲k\pi\pm\frac{۵\pi}{۶}$$ و

$$y=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

$$\cos x=-\frac{۱}{۲}=-\cos\frac{\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow$$

$$x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

نکته: این معادله به روش‌های دیگری نیز حل می‌شود. از آن جمله‌اند:

روش اول: برای کاستن از درجه‌ی معادله، از $\sin^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}$ و $\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۵}{۸}\Rightarrow (\frac{۱-\cos ۲x}{۲})^۲+(\frac{۱+\cos ۲x}{۲})^۲=\frac{۵}{۸}\Rightarrow$$

$$\frac{۲(۱+\cos^۲ ۲x)}{۴}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۱+\cos^۲ ۲x=\frac{۵}{۴}\Rightarrow \cos^۲ ۲x=\frac{۱}{۴}$$

اما $\cos^۲ ۲x=\frac{۱+\cos ۴x}{۲}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۱+\cos ۴x}{۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۱+\cos ۴x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos ۴x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos ۴x=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow ۴x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۶}$$

روش دوم: می‌دانیم که $\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$ و $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$ است. بنابراین داریم:

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۵}{۸}\Rightarrow$$

$$۱-۲(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲=\frac{۵}{۸}$$

$$\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=\frac{۵}{۸}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=-\frac{۳}{۸}\Rightarrow \sin^۲ ۲x=\frac{۳}{۴}$$

اما $\sin^۲ ۲x=\frac{۱-\cos ۴x}{۲}$ است. بنابراین:

$$\frac{۱-\cos ۴x}{۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \cos ۴x=-\frac{۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow ۴x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۶}$$

مثال ۲: معادله‌ی $۳-۷\cos^۲ x\sin x-۳\sin^۳ x=۰$ را حل کنید.

حل: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x$ داریم:

$$۳-۷(۱-\sin^۲ x)\sin x-۳\sin^۳ x=۰\Rightarrow$$

$$۳-۷\sin x+۷\sin^۳ x-۳\sin^۳ x=۰$$

$$\Rightarrow ۴\sin^۳ x-۷\sin x+۳=۰$$

با فرض $\sin x=y$ خواهیم داشت:

$$۴y^۳-۷y+۳=۰ \text{ و } ۴-۷+۳=۰\Rightarrow y=۱\Rightarrow$$

$$۴y^۳-۷y+۳=(y-۱)(۴y^۲+۴y-۳)=۰\Rightarrow$$

$$y=۱ \text{ و } ۴y^۲+۴y-۳=۰\Rightarrow y=\frac{-۲\pm\sqrt{۴+۱۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۲\pm ۴}{۴}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲} \text{ و } y=-\frac{۳}{۲}<-۱$$

جواب‌های $y=۱$ و $y=\frac{۱}{۲}$ قابل قبول هستند، زیرا $\sin x=y$ فرض شده است. پس داریم:

$$y=۱\Rightarrow \sin x=۱=\sin\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$y=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}, x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$$

ب) تابع‌های مثلثاتی داده شده در معادله یکی هستند، اما زاویه‌های مجهول داده شده متفاوتند (زاویه‌های داده شده در معادله، مضرب‌هایی از یک زاویه‌ی مجهولند). مانند معادله‌های:

$۱+\cos ۲x+\cos ۴x=۰$ ، $\cot g ۲x+۲\cot g\frac{x}{۲}=۰$ و

$\sin x+۲\sin ۲x+\sin ۳x=۰$

برای حل این گونه معادله‌ها، با استفاده از رابطه‌های موجود بین نسبت‌های مثلثاتی α و $n\alpha$، زاویه‌های موجود در معادله را به یک زاویه تبدیل می‌کنیم. آن‌گاه با توجه به شکل معادله‌ی به‌دست آمده، راه‌حل آن را انتخاب می‌کنیم.

مثال ۱. معادله‌ی $tgx + 2tg\frac{x}{2} = 0$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}} + 2tg\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2tg\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} - 2tg^3\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

با فرض $1 - tg^2\frac{x}{2} \neq 0$ داریم:

$$4tg\frac{x}{2} - 2tg^3\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2tg\frac{x}{2} - tg^3\frac{x}{2} = 0$$

با فرض $tg\frac{x}{2} = y$ نیز خواهیم داشت:

$$2y - y^3 = 0 \Rightarrow y(2 - y^2) = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

جواب‌ها قابل قبول هستند. پس:

$$y = 0 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$y = \sqrt{2} \Rightarrow tg\frac{x}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + Arctg\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x = 2k\pi + 2Arctg\sqrt{2}$$

$$y = -\sqrt{2} \Rightarrow tg\frac{x}{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + Arctg(\sqrt{-2})$$
$$\Rightarrow x = 2k\pi + 2Arctg(\sqrt{-2})$$

مثال ۲: معادله‌ی $1 + \cos 3x + \cos 6x = 0$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ است.

بنابراین داریم:

$$1 + \cos 3x + \cos 6x = 0 \Rightarrow 1 + \cos 3x + 2\cos^2 3x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\cos 3x + 2\cos^2 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x(1 + 2\cos 3x) = 0 \Rightarrow$$
$$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$
$$1 + 2\cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$
$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

مثال ۳: معادله‌ی $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$ را حل کنید.

حل: با استفاده از دستور $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ داریم:

$$2\sin\frac{x - 3x}{2}\cos\frac{x + 3x}{2} + 2\sin\frac{5x - 7x}{2}\cos\frac{5x + 7x}{2} = 0$$
$$\Rightarrow 2\sin(-x)\cos 2x + 2\sin(-x)\cos 6x = 0$$
$$\Rightarrow -2\sin x\cos 2x - 2\sin x\cos 6x = 0$$

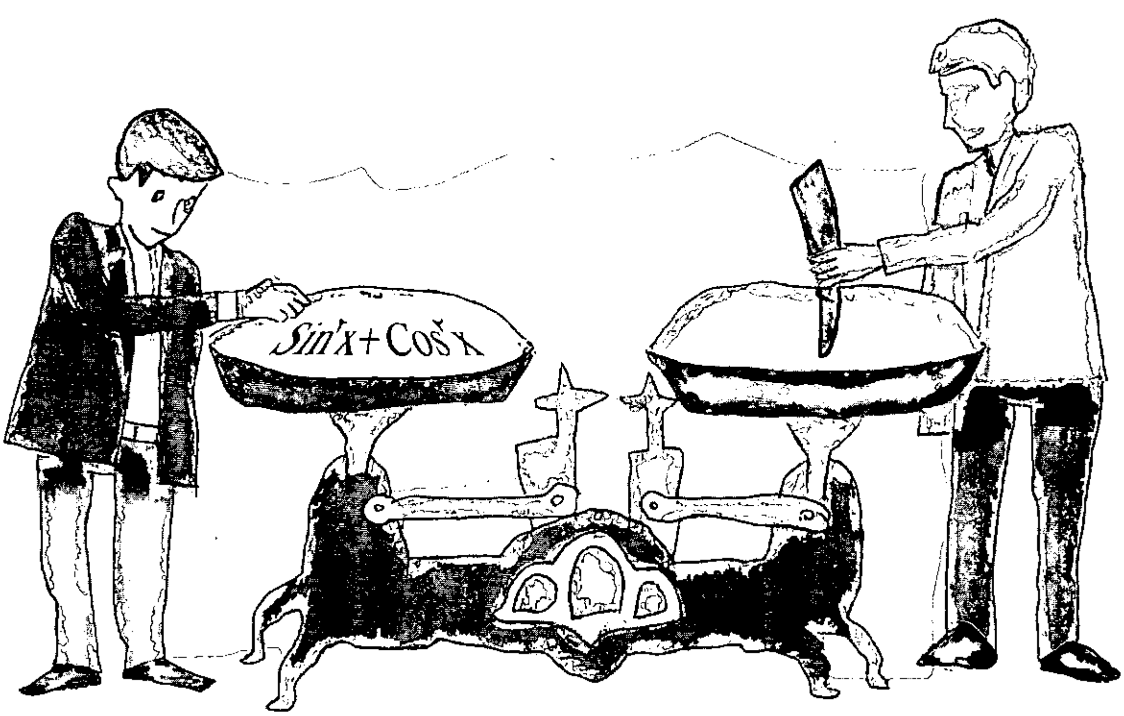
زاویه‌ها در این معادله یکی نیستند، اما در معادله، عامل مشترک $\sin x$ ایجاد شده است. بنابراین داریم:

$$-2\sin x(\cos 2x + \cos 6x) = 0 \Rightarrow -2\sin x = 0$$
$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \text{ و } \cos 2x + \cos 6x = 0$$

با استفاده از دستور $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ داریم:

$$2\cos\frac{2x + 6x}{2}\cos\frac{2x - 6x}{2} = 0 \Rightarrow 2\cos 4x\cos(-2x) = 0 \Rightarrow$$
$$2\cos 4x\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$
$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

نکته: در این معادله، اگر تمام زاویه‌ها را به یک زاویه تبدیل کنیم، درجه‌ی معادله افزایش می‌یابد.



پ) زاویه‌های مجهول داده شده در معادله یکی نیستند (مضرب‌هایی از یک زاویه‌ی مجهول‌اند) **و تابع‌های مثلثاتی داده شده نیز یکی نیستند.** مانند معادله‌ی $\sin 2x + 2\cos x = 0$.

برای حل این گونه‌ها معادله‌ها، از حالت‌های الف و ب، یا ترکیبی از آن دو و یا یکی از روش‌های کلی گفته شده برای حل معادله‌های غیر ساده‌ی مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

مثال ۱: معادله‌ی $\sin x \sin 3x = \cos 2x$ را حل کنید.

حل: با استفاده از دستور

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ داریم:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)\right] = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\cos(-2x) - \cos 4x\right] = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 2\cos 2x \Rightarrow \cos 4x = -\cos 2x$$

$\Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 2x)$ معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi \pm (\pi - 2x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ و } x = k\pi - \frac{\pi}{2}$$

مثال ۲: معادله‌ی

$$4\sin 2x - 2(\sqrt{5}-1)\cos x - 4\sin x + \sqrt{5} - 1 = 0$$

را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. بنابراین داریم:

$$8\sin x \cos x - 4\sin x - 2(\sqrt{5}-1)\cos x + \sqrt{5} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4\sin x(2\cos x - 1) - (\sqrt{5}-1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(4\sin x - (\sqrt{5}-1)) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$4\sin x - (\sqrt{5}-1) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$x = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) + 2k\pi$$

مثال ۳ : معادله‌ی $2\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{2} = 2$ را حل کنید.

حل : فرض می‌کنیم $x = 6t$ باشد. در این صورت داریم :

$$2\cos 2t - \sin 3t = 2$$

اما $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ و $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$ هستند. بنابراین خواهیم داشت :

$$2(1-2\sin^2 t) - (3\sin t - 4\sin^3 t) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4\sin^3 t - 4\sin^2 t - 3\sin t = 0$$

با فرض $\sin t = y$ داریم :

$$4y^3 - 4y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(4y^2 - 4y - 3) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$4y^2 - 4y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4}$$ و

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \text{ و } y = \frac{3}{2} > 0$$

جواب‌های $y = 0$ و $y = -\frac{1}{2}$ قابل قبولند، زیرا $-1 \le \sin t = y \le 1$ است. بنابراین داریم :

$$y = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi$$

$$y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin t = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow t = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ و } t = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$$

اما $x = 6t$ و یا $t = \frac{x}{6}$ اختیار شده است. بنابراین داریم.

$$\frac{x}{6} = k\pi \Rightarrow x = 6k\pi$$

$$\frac{x}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 12k\pi - \pi$$

$$\frac{x}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = 12k\pi + k\pi$$

مثال ۴ : معادله‌ی $tgx + \cot gx = 2\sin 2x$ در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

حل : با تبدیل x به $-x$، معادله تغییر نمی‌کند. بنابراین با استفاده از دستور بیوش، می‌توان $\cos x$ را مجهول کمکی اختیار و معادله را حل کرد. اما این معادله راه‌حل‌های ساده‌تری نیز دارد. از آن جمله :

می‌دانیم که $tgx + \cot gx = \frac{2}{\sin 2x}$ است. بنابراین داریم :

$$\frac{2}{\sin 2x} = 2\sin 2x \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow$$

اما $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$ است. پس خواهیم داشت :

$$\frac{1-\cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow 1 - \cos 4x = 2 \Rightarrow \cos 4x = -1 = \cos\pi$$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

و

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

بنابراین معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$، چهار ریشه دارد.

نکته : برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$، می‌توان به این روش نیز عمل کرد :

$$x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow 0 \le x \le 2\pi \Rightarrow 0 \le \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \le 2\pi$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{k}{2} + \frac{1}{4} \le 2 \Rightarrow 0 \le k + \frac{1}{2} \le 4 \Rightarrow -0/5 \le k \le 3/5$$

با توجه به اینکه k عدد صحیح است، بنابراین می‌تواند یکی از چهار مقدار ۰، ۱، ۲ و ۳ را اختیار کند. یعنی معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد. از این روش می‌توان برای تعیین تعداد ریشه‌های هریک از جواب‌های کلی یک معادله، در یک بازه‌ی داده شده استفاده کرد.