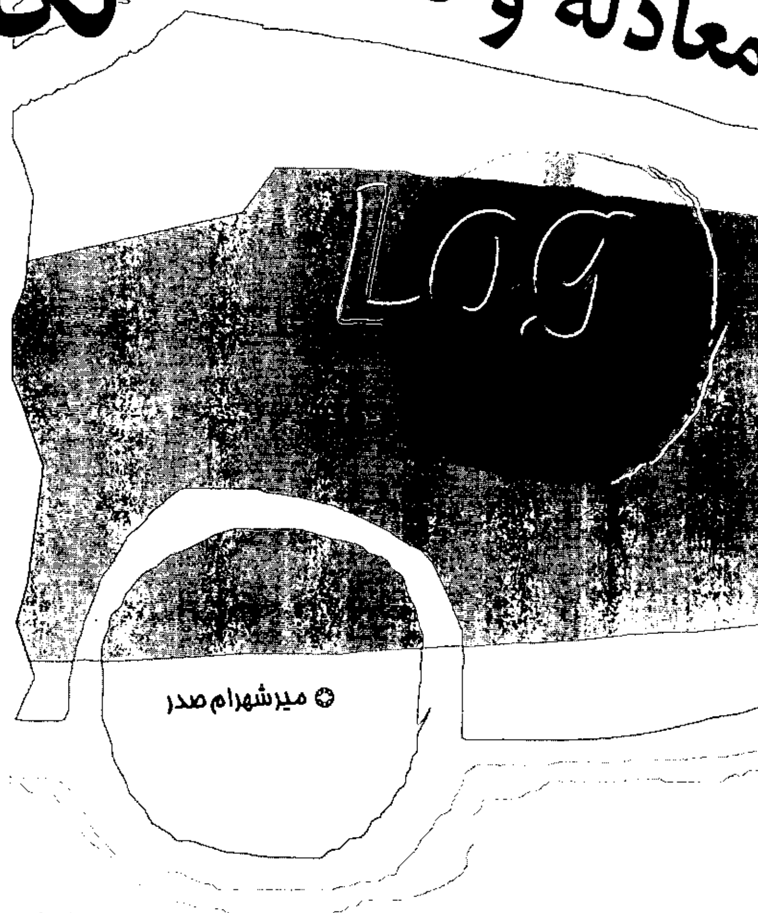
معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی

اشاره:

با تعریف تابع لگاریتمی در سال دوم آشنا شده‌اید. برای مثال، می‌دانید که برای پیدا کردن دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\log_{2}^{(x+1)}-3}$ باید نامعادله‌ی $\log_{2}^{(x+1)}-3\geq 0$ را حل کنید. اکنون هدف این مقاله کامل‌تر کردن اطلاعات شما درباره‌ی معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی است تا بتوانید این گونه مسائل را بهتر حل کنید.



میرشهرام صدر

الف. معادله‌های لگاریتمی

چنان‌که می‌دانید، عمل جمع، عمل معکوسِ تفریق و عمل ضرب، عمل معکوسِ تقسیم است. اکنون عمل لگاریتم را عمل معکوسِ توان درنظر می‌گیریم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف: فرض کنیم $0<a\neq 1$ یک عدد حقیقی مثبت و ثابت باشد. تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ را تابع معکوسِ تابع نمایی $y=a^x$ می‌نامیم.

معادله‌ای را که در آن، مجهول در عبارتی لگاریتمی آمده باشد، معادله‌ی لگاریتمی می‌نامیم. برای حل این گونه معادله‌ها، از روش‌های ذیل استفاده می‌کنیم:

۱. به کمک تعریف لگاریتم

این روش برای حل معادله‌ای به کار می‌رود که در یک طرف آن یک عبارت لگاریتمی و در طرف دیگر، یک عدد وجود داشته باشد:

$$\log_a p(x)=b \Leftrightarrow p(x)=a^b$$

در معادله‌ی بالا، $p(x)$ عبارتی جبری بر حسب متغیر x است.

نکته مهم

قبل از حل معادله‌ی لگاریتمی، ابتدا دامنه‌ی تعریف آن را به‌دست می‌آوریم و بعد از حل معادله، جواب‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی تعریف صدق کنند.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\log_{۲}(x+۱)=۳$ **ب)** $\log_{۳}(۳\log_{۳}^{(x-۱)})=۲$

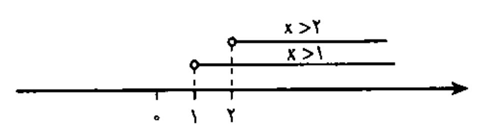
حل: الف) ابتدا دامنه را می‌یابیم، سپس معادله را حل می‌کنیم:

$x+۱>۰ \Rightarrow x>-۱ \Rightarrow D=(-۱,+\infty)$

$\log_{۲}^{x+۱}=۳ \Rightarrow x+۱=۲^{۳} \Rightarrow x=۷\in D$ قابل قبول

ب) ابتدا دامنه‌ی تعریف را پیدا کرده، و سپس معادله را حل می‌کنیم. می‌دانیم که $\log_{۳}^{۱}=۰$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\log_{۳}^{(x-۱)}>۰ \Rightarrow \log_{۳}^{(x-۱)}>\log_{۳}^{۱} \Rightarrow x-۱>۱ \Rightarrow x>۲\\ x-۱>۰ \Rightarrow x>۱\end{cases}$$



$D=(۲\ ,\ +\infty)$

بنابر تعریف لگاریتم:

$$\log_{۳}(۳\log_{۳}^{(x-۱)})=۲ \Rightarrow ۳\log_{۳}(x-۱)=۳^{۲}$$
$$\Rightarrow \log_{۳}(x-۱)=۳$$
$$\Rightarrow x-۱=۳^{۳} \Rightarrow x=۲۸\in D$$ قابل قبول

۲. به کمک خواص لگاریتم

از این روش برای حل معادله‌هایی استفاده می‌کنیم که در آن‌ها چند عبارت لگاریتمی وجود دارد. ابتدا عبارت‌های لگاریتمی را ساده می‌کنیم و سپس به معادله‌هایی مانند $\log_a p(x)=\log_a q(x)$ (۱) یا $\log_a p(x)=b$ (۲) می‌رسیم که برای حل هر کدام، به صورت‌های زیر عمل می‌کنیم ($p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌هایی جبری برحسب متغیر x هستند):

$\log_a p(x)=\log_a q(x) \Rightarrow p(x)=q(x)$ (۱)

$\log_a p(x)=b \Rightarrow p(x)=a^{b}$ (۲)

قبل از حل چند مثال، خواص لگاریتم را جهت یادآوری در ذیل می‌آوریم.

۱. $(a>۰, a\neq ۱)\ \log_a^{۱}=۰$

۲. $(a>۰)\ \log_a^{a}=۱$

۳. $(a>۰, a\neq ۱)\ a^{\log_a^{x}}=x$

۴. $\log_a^{xy}=\log_a^{x}+\log_a^{y}$
$(x>۰, y>۰, a>۰, a\neq ۱)$

۵. $\log_a^{\frac{x}{y}}=\log_a^{x}-\log_a^{y}$
$(x>۰, y>۰, a>۰, a\neq ۱)$

۶. $\log_{a^{n}}^{x^{m}}=\frac{m}{n}\log_a^{x}$
$(x^{m}>۰, a^{n}>۰, a^{n}\neq ۱)$

۷. $\log_b^{a}=\frac{۱}{\log_a^{b}}$
$(a>۰, b>۰, a\neq ۱, b\neq ۱)$

۸. $\log_b^{a}=\frac{\log_x^{a}}{\log_x^{b}}$
$(a>۰, b>۰, b\neq ۱, x>۰, x\neq ۱)$

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\log(x+۲)+\log(x-۲)=\log x+\log ۳$

ب) $\log_{۲}(x+۱۴)+\log_{۲}(x+۲)=۶$

ج) $\log(x+۱)-\frac{۱}{۲}\log(x-۱)=\log ۳$

د) $\log_{۲}(۹-۲^{x})=۱۰^{\log(۳-x)}$

حل:الف)

$$\begin{cases}x+۲>۰ \Rightarrow x>-۲\\ x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \Rightarrow D=(۲,+\infty)\\ x>۰ \Rightarrow x>۰\end{cases}$$

$$\log(x+2)+\log(x-2)=\log x+\log 3$$
$$\Rightarrow \log(x+2)(x-2)=\log x\times 3$$
$$\Rightarrow x^2-4=3x \Rightarrow x^2-3x-4=0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4\in D & \text{قابل قبول} \\ x=-1\notin D & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} x+14>0 \Rightarrow x>-14 \\ x+2>0 \Rightarrow x>-2 \end{cases} \Rightarrow x>-2 \Rightarrow D=(-2,\infty)$$
$$\log_2^{(x+14)}+\log_2^{(x+2)}=6 \Rightarrow \log_2(x+14)(x+2)=6$$
بنابه تعریف لگاریتم: $\Rightarrow (x+14)(x+2)=2^6$
$$\Rightarrow x^2+16x-36=0 \Rightarrow (x+18)(x-2)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=-18\notin D & \text{قابل قبول} \\ x=2\in D & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

ج)

$$\begin{cases} x+1>0 \Rightarrow x>-1 \\ x-1>0 \Rightarrow x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1 \Rightarrow D=(1,+\infty)$$
$$\log(x+1)-\frac{1}{2}\log(x-1)=\log 3$$
$$\Rightarrow \log(x+1)-\log(x-1)^{\frac{1}{2}}=\log 3$$
$$\Rightarrow \log\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}=\log 3$$
$$\Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}=3$$

معادله‌ی به‌دست آمده، معادله‌ای گنگ است که برای حل آن ابتدا دامنه‌اش را پیدا می‌کنیم:

$$x-1>0 \Rightarrow x>1$$
$$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right)^2=3^2 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x-1}=9 \Rightarrow x^2+2x+1=9x-9$$
$$\Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow (x-2)(x-5)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=2\in D & \text{قابل قبول} \\ x=5\in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

د)

$$\begin{cases} 9-2^x>0 \Rightarrow 2^x<9 \Rightarrow \log 2^x<\log 9 \Rightarrow x\log 2<\log 9 \\ \Rightarrow x<\dfrac{\log 9}{\log 2} \Rightarrow x<3/17 \\ 3-x>0 \Rightarrow x<3 \end{cases}$$

چون

$$\frac{\log 9}{\log 2}=\frac{\log 3^2}{\log 2}=\frac{2\log 3}{\log 2}\simeq\frac{2\times 0/4771}{0/3010}\simeq 3/7$$

بنابراین: $D=(-\infty,3)$

$$\log_2^{(9-2^x)}=10^{\log(3-x)} \Rightarrow \log_2^{(9-2^x)}=(3-x)$$
$$\Rightarrow 2^{(3-x)}=9-2^x \Rightarrow \frac{2^3}{2^x}=9-2^x$$

دو طرف معادله را در 2^x ضرب می‌کنیم:

$$2^x\left(\frac{2^3}{2^x}\right)=2^x(9-2^x) \Rightarrow 2^3=9\times 2^x-(2^x)^2$$

با فرض این‌که $2^x=t$، خواهیم داشت:

$$t^2-9t+8=0 \Rightarrow (t-1)(t-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=8 \end{cases}$$
$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow x=0 & \text{قابل قبول} \\ t=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۳. تغییر متغیر

در معادله‌های لگاریتمی که برای مثال، $\log_a p(x)$ در آن‌ها به کار رفته باشد، و علاوه بر آن، عبارت $(\log_a p(x))^n$ نیز موجود باشد، با فرض $t=\log_a p(x)(1)$، معادله‌ی لگاریتمی را تغییر متغیر می‌دهیم تا به معادله‌ای غیرلگاریتمی برسیم. سپس با حل این معادله مقادیر t به دست می‌آیند که با

جایگزینی آن‌ها در رابطه‌ی (۱)، مقادیر مجهولات به‌دست می‌آیند.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $(\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0$

ب) $3\sqrt{\log_2^x} - \log_2^{8x} + 1 = 0$

حل:

الف) $x > 0 \Rightarrow D = (0,+\infty)$

$$(\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0 \Rightarrow (\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0$$

با فرض t=logx خواهیم داشت:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 \in D & \text{قابل قبول} \\ t = 2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} \log_2^x > 0 \Rightarrow \log_2^x > \log_2^1 \Rightarrow x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow D = (1,+\infty)$$

$$3\sqrt{\log_2^x} - \log_2^{8x} + 1 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{\log_2^x} - (\log_2^8 + \log_2^x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{\log_2^x} - \log_2^x - 2 = 0$$

با فرض این که $t = \log_2^x$، خواهیم داشت:

$$3\sqrt{t} - t - 2 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{t} = t + 2 \Rightarrow (3\sqrt{t})^2 = (t+2)^2$$

$$\Rightarrow 9t = t^2 + 4t + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (t-4)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \log_2^x = 1 \Rightarrow x = 2^1 \in D & \text{قابل قبول} \\ t = 4 \Rightarrow \log_2^x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۴. لگاریتم گرفتن از دو طرف معادله

برای حل معادله‌هایی که در آن‌ها مجهول به صورت عبارت لگاریتمی و در توان باشد، از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم و آن را حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $x^{\log x} = 1000x^2$

ب) $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$

حل:

الف) $x > 0 \Rightarrow D = (0,+\infty)$

$$x^{\log x} = 1000x^2 \Rightarrow \log(x^{\log x}) = \log(1000x^2)$$

$$\Rightarrow \log x . \log x = \log 1000 + \log x^2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = 3 + 2\log x$$

با فرض این که $t = \log x$، خواهیم داشت:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -1 \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10} \notin D & \text{غیرقابل قبول} \\ t = 3 \Rightarrow \log x = 3 \Rightarrow x = 10^3 = 1000 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

ب) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D = (-1,+\infty)$

$$(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$$

$$\Rightarrow \log\left[(x+1)^{\log(x+1)}\right] = \log\left[100(x+1)\right]$$

$$\Rightarrow \log(x+1) . \log(x+1) = \log 100 + \log(x+1)$$

$$\Rightarrow \left(\log(x+1)\right)^2 - \log(x+1) - 2 = 0$$

با فرض این که $t = \log(x+1)$، خواهیم داشت:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$t = -1 \Rightarrow \log(x+1) = -1 \Rightarrow x + 1 = 10^{-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{10} - 1 = \frac{-9}{10} \in D \quad \text{قابل قبول}$$

$$t = 2 \Rightarrow \log(x+1) = 2 \Rightarrow x + 1 = 10^2 \Rightarrow x = 99 \in D \quad \text{قابل قبول}$$

۵. استفاده از مبنای جدید در لگاریتم

در معادله‌های لگاریتمی که مبناهای عبارت‌های لگاریتمی در آن‌ها با هم برابر نیستند، با استفاده از دستور $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ مبناها را یکسان و سپس معادله را حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\log_{\sqrt{5}}^x \cdot \sqrt{\log_x^{5\sqrt{5}} + \log_{\sqrt{5}}^{5\sqrt{5}}} = \sqrt{6}$

ب) $1 + \log_2(x-1) = \log_{(x-1)}^4$

حل:

الف) $\begin{cases} x > 0 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow D = (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$\log_{\sqrt{5}}^x \cdot \sqrt{\log_x^{5\sqrt{5}} + \log_{\sqrt{5}}^{5\sqrt{5}}} = \sqrt{6} \Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^x \cdot \sqrt{\frac{\log_{\sqrt{5}}^{5\sqrt{5}}}{\log_x^{\sqrt{5}}} + 3} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^x \cdot \sqrt{3\log_{\sqrt{5}}^x + 3} = \sqrt{6}$$

با فرض این‌که $t = \log_{\sqrt{5}}^x$، خواهیم داشت:

$$t\sqrt{3t+3} = \sqrt{6} \Rightarrow t^2(3t+3) = 6 \Rightarrow 3t^2(t+1) = 6$$

$$\Rightarrow t^3 + t^2 - 2 = 0 \Rightarrow (t^3 - 1) + (t^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t^2+t+1) + (t-1)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t^2+t+1+t+1) = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t^2+2t+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-1 = 0 \Rightarrow t = 1 \\ t^2+2t+2 = 0, \quad \Delta = 4-8 = -4 < 0 \text{ این معادله ریشه ندارد} \end{cases}$$

$t = 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^x = 1 \Rightarrow x = \sqrt{5}^1 \Rightarrow x = \sqrt{5} \in D$ قابل قبول

ب)

$$\begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x-1 \neq 1 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow D = (1,2) \cup (2,+\infty)$$

$$1 + \log_2^{(x-1)} = \log_{(x-1)}^4 \Rightarrow 1 + \log_2^{(x-1)} = \frac{\log_2^4}{\log_2^{(x-1)}}$$

$$\Rightarrow 1 + \log_2^{(x-1)} = 2\log_2^{(x-1)}$$

با فرض $t = \log_2^{(x-1)}$، خواهیم داشت:

$$1 + t = 2t \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_2^{(x-1)} = 1 \Rightarrow x - 1 = 2^1$$

$\Rightarrow x = 3 \in D$ قابل قبول

ب. نامعادله‌های لگاریتمی

نامعادله‌های لگاریتمی را به دو دسته‌ی کلی، تقسیم‌بندی و روش حل هر کدام را جداگانه بررسی می‌کنیم:

دسته‌ی اول. برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) > \log_{f(x)} q(x)$$

که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$، عبارت‌های جبری بر حسب متغیر x هستند، کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} f(x) > 1 \\ p(x) > q(x) \\ q(x) > 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ p(x) < q(x) \\ p(x) > 0 \end{cases}$$

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) \geq \log_{f(x)} q(x)$$

کافی است، اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به دست آوریم:

$$\begin{cases} f(x) > 1 \\ p(x) \geq q(x) \\ q(x) > 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ p(x) \leq q(x) \\ p(x) > 0 \end{cases}$$

دسته‌ی دوم. برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) < \log_{f(x)} q(x)$$

که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$، عبارت‌های جبری بر حسب متغیر x هستند، کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} f(x) > 1 \\ p(x) < q(x) \\ p(x) > 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ p(x) > q(x) \\ q(x) > 0 \end{cases}$$

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) \leq \log_{f(x)} q(x)$$

کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را

به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} f(x)>۱\\ p(x)\le q(x)\\ p(x)>۰\end{cases} \quad و \quad \begin{cases} ۰<f(x)<۱\\ p(x)\ge q(x)\\ q(x)>۰\end{cases}$$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\log(x^{۲}-۲x-۳)\ge ۰$

۲) $\log_{۷} \frac{x-۲}{x-۳}<۰$

۳) $\log_{۲}(۲x-۱)\ge -۲$

۴) $\log_{\frac{۱}{۱۱}}(۲x+۲۱)<-۲$

۵) $\log_{x}(x+۱)\le \log_{\frac{۱}{x}}(۲-x)$

حل:

۱.

$$\log(x^{۲}-۲x-۳)\ge ۰ \Rightarrow \log_{۱۰}(x^{۲}-۲x-۳)\ge \log_{۱۰} ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۰>۱\\ x^{۲}-۲x-۳\ge ۱ \Rightarrow x^{۲}-۲x-۴\ge ۰\\ ۱>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow D=\left(-\infty, ۱-\sqrt{۵}\right]\cup\left[۱+\sqrt{۵}, \infty\right)$$

۲.

$$\log_{۷}\frac{x-۲}{x-۳}<۰ \Rightarrow \log_{۷}\frac{x-۲}{x-۳}<\log_{۷} ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۷>۱\\ \frac{x-۲}{x-۳}<۱\\ \frac{x-۲}{x-۳}>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{x-۳}<۰ \Rightarrow x<۳ \Rightarrow x\in(-\infty, ۳)\\ x\in(-\infty, ۲)\cup(۳, +\infty)\end{cases}$$

$$\Rightarrow D=(-\infty, ۲)$$

۳.

$$\log_{۲}(۲x-۱)\ge -۲ \Rightarrow \log_{۲}(۲x-۱)\ge \log_{۲} ۲^{-۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲>۱\\ (۲x-۱)\ge ۲^{-۲}\\ ۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲x-۱)\ge \frac{۱}{۴} \Rightarrow x\ge \frac{۵}{۸} \Rightarrow D=\left[\frac{۵}{۸}, \infty\right)$$

۴.

$$\log_{\frac{۱}{۱۱}}(۲x+۲۱)<-۲ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۱۱}}(۲x+۲۱)<\log_{\frac{۱}{۱۱}}\left(\frac{۱}{۱۱}\right)^{-۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۰<\frac{۱}{۱۱}<۱\\ (۲x+۲۱)>\left(\frac{۱}{۱۱}\right)^{-۲} \Rightarrow ۲x+۲۱>۱۲۱ \Rightarrow x>۵۰ \Rightarrow D=(۵۰, \infty)\\ \left(\frac{۱}{۱۱}\right)^{-۲}=۱۲۱>۰\end{cases}$$

۵.

$$\log_{x}(x+۱)\le \log_{\frac{۱}{x}}(۲-x) \Rightarrow \log_{x}(x+۱)\le -\log_{x}(۲-x)$$

$$\log_{x}(x+۱)\le \log_{x}(۲-x)^{-۱} \Rightarrow \log_{x}(x+۱)\le \log_{x}\frac{۱}{۲-x}$$

برای یافتن مجموعه جواب نامعادله‌ی بالا، باید اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} x>۱\\ x+۱\le \frac{۱}{۲-x}\\ x+۱>۰\end{cases} \ (۱) \quad و \quad \begin{cases} ۰<x<۱\\ x+۱\ge \frac{۱}{۲-x}\\ \frac{۱}{۲-x}>۰\end{cases} \ (۲)$$

ابتدا دستگاه (۱) را حل می‌کنیم:

$$(۱) \begin{cases} x+۱-\frac{۱}{۲-x}<۰\\ x>۱\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} \text{ یا } \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \le x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_1 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$$

اکنون مجموعه جواب دستگاه (۲) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x+1-\dfrac{1}{2-x} \ge 0 \\ x < 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ یا } x > 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

(۲)

$$\Rightarrow D_2 = (0,1)$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow D = (0,1) \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$$

تمرین:

نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \ge 0$

۲) $\log_2(x^2-4x-5) \le 4$

۳) $\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2-2}-x+1) < 0$

۴) $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{x^2}{6}-x+\frac{35}{24}) \ge 0$

۵) $\sqrt{4-x^2}(\log_3 \frac{x+1}{x}+2) \le 0$

۶) $|\log_2(x^2+x-4)| < 1$

۷) $\log_{3x+5}(9x^2+8x+8) > 2$

۸) $\log_{0/1}(x^2+x+2) > \log_{0/1}(x+3)$

۹) $5\log_x(\frac{8-12x}{x-6}) \ge 25$

۱۰) $\log_{(x-\frac{9}{2})} \frac{x+4}{2x-6} \le \log_{(x-\frac{9}{2})}(x-5)$

معادله‌های زیر را حل کنید.

۱. $4^{(\log_2(x-3)+\log_2^5)} = 50$

۲. $\log \frac{x+5}{2} = \frac{1}{2}\log(2x-1)$

۳. $\log_x^{\sqrt{5}} + \log_x^{5x} = \frac{9}{4} + (\log_x^{\sqrt{5}})^2$

۴. $2\log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$

۵. $\log_2^{(x+4)} + \log_{\sqrt{2}}^{(x+4)} + \log_{\sqrt[3]{2}}^{(x+4)} = 7$

معماهای فکری و منطقی

چهار گاو سیاه و سه گاو قهوه‌ای در پنج روز به اندازه‌ی سه گاو سیاه و پنج گاو قهوه‌ای در چهار روز شیر می‌دهند.

کدام نوع گاو شیر بیش‌تری می‌دهد؛
سیاه یا قهوه‌ای؟