معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

● احمد قندهاری

۱ ـ بررسی حالتهای ناقص معادله:

الف) اگر در معادله درجه دوّم $ax^2 + bx + c = 0$، $c = 0$، آنگاه یک ریشه معادله صفر و ریشه دیگر $(-\frac{b}{a})$ است.

$$c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax+b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

ب) اگر در معادله درجه دوّم $ax^2 + bx + c = 0$، b و c هر دو صفر باشد، آنگاه هر دو ریشه معادله صفر است.

$$b = 0, c = 0 \Rightarrow ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x.x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

ج) اگر در معادلهٔ درجه دوم $b = 0$ و a و c مختلف‌العلامه باشد، آنگاه معادله دو ریشه قرینه دارد.

$$b = 0 \Rightarrow ax^2+c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

چون a و c مختلف‌العلامه‌اند، پس کسر $(-\frac{c}{a})$ عددی است مثبت.

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

مسأله: معادلهٔ $mx^2+(m-1)(m+1)x+(m-3)(m+1)=0$ مفروض است. m را چنان بیابید تا اوّلاً: یک ریشه معادله صفر باشد. ثانیاً: هر دو ریشه معادله صفر باشد. **ثالثاً:** معادله دو ریشه قرینه داشته باشد ضمناً در هر مورد ریشه‌ها را بیابید.

حل: اولاً: باید $c = 0$ ولی باید توجه داشت که $b \neq 0$ بنابراین:

$$\boxed{m = 3}$$

اگر $m = 3 \Rightarrow 3x^2 + (3 - 1)(3 + 1)\,x = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(3x + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

ثانیا: برای آن که هر دو ریشه معادله صفر باشد، باید $b = 0$ و $c = 0$ پس: $\boxed{m = -1}$

اگر $m = -1 \Rightarrow -x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x.x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

ثالثا: برای آن که معادله دو ریشه قرینه داشته باشد، باید $b = 0$ و a و c مختلف‌العلامه باشد، پس: $\boxed{m = 1}$

اگر $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = +1 \\ c = -4 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

۲ـ حل معادله درجهٔ دومِ کامل: $ax^2 + bx + c = 0$

طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم ($a \neq 0$).

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

به طرفین تساوی عبارت $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه می‌کنیم.

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

از طرفین تساوی ریشهٔ دوم می‌گیریم.

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

عبارت ($b^2 - 4ac$) مبیّن معادله یا دلتای معادله گوییم و آن را با نماد (Δ) نشان می‌دهیم.

الف) اگر $\Delta > 0$ یا $b^2 - 4ac > 0$، آنگاه x' و x'' وجود دارد، در این‌صورت می‌گوییم معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

ب) اگر $\Delta = 0$ یا $b^2 - 4ac = 0$، آنگاه x' و x'' مساویند، در این‌صورت می‌گوییم معادله دو ریشه حقیقی مساوی دارد.

$$\boxed{x' = x'' = \frac{-b}{2a}}$$

ج) اگر $\Delta < 0$ یا $b^2 - 4ac < 0$، آنگاه معادله دو ریشهٔ غیر حقیقی دارد که از بحث ما خارج است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

۱) $2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{cases}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(2)}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{5+3}{4} = 2 \\ x' = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

۲) $x^2 - (3-\sqrt{3})x + 2 - \sqrt{3} = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -(3-\sqrt{3}) \\ c = 2-\sqrt{3} \end{cases}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3} \pm \sqrt{(3-\sqrt{3})^2 - 4(1)(2-\sqrt{3})}}{2}$$

$$x = \frac{3-\sqrt{3} \pm \sqrt{9+3-6\sqrt{3}-8+4\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3} \pm \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}$$

$$x = \frac{3-\sqrt{3} \pm \sqrt{3+1-2\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3} \pm \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3} \pm (\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{3-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{2} \\ x'' = \dfrac{3-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{x' = 1}$$

$$\frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x'' = 2-\sqrt{3}}$$

$$۳)\ x^{۲}-۲(m-۱)x+(۱-۲m)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=-۲(m-۱) \\ c=۱-۲m \end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

$$=\frac{۲(m-۱)\pm\sqrt{۴(m-۱)^{۲}-۴(۱-۲m)}}{۲}$$

$$x=\frac{۲(m-۱)\pm\sqrt{۴(m^{۲}-۲m+۱)-۴+۸m}}{۲}$$

$$=\frac{۲(m-۱)\pm\sqrt{۴m^{۲}-۸m+۴-۴+۸m}}{۲}$$

$$x=\frac{۲(m-۱)\pm\sqrt{۴m^{۲}}}{۲}=\frac{۲(m-۱)\pm ۲m}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{۲(m-۱)+۲m}{۲}=\dfrac{۲(۲m-۱)}{۲} \\ x''=\dfrac{۲(m-۱)-۲m}{۲}=\dfrac{-۲}{۲} \end{cases}$$

$$=۲m-۱\Rightarrow \boxed{x'=۲m-۱}$$

$$=-۱\Rightarrow \boxed{x''=-۱}$$

$$۴)\ m^{۲}x^{۲}-۲m^{۲}x+(m^{۲}-n^{۲})=۰\quad \begin{cases} a=m^{۲} \\ b=-۲m^{۲} \\ c=m^{۲}-n^{۲} \end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

$$=\frac{۲m^{۲}\pm\sqrt{۴m^{۴}-۴m^{۲}(m^{۲}-n^{۲})}}{۲m^{۲}}$$

$$=\frac{۲m^{۲}\pm\sqrt{۴m^{۴}-۴m^{۴}+۴m^{۲}n^{۲}}}{۲m^{۲}}$$

$$x=\frac{۲m^{۲}\pm ۲mn}{۲m^{۲}}\Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{۲m^{۲}+۲mn}{۲m^{۲}} \\ x''=\dfrac{۲m^{۲}-۲mn}{۲m^{۲}} \end{cases}$$

$$=\frac{۲m(m+n)}{۲m^{۲}}=\frac{m+n}{m}\Rightarrow \boxed{x'=\frac{m+n}{m}}$$

$$=\frac{۲m(m-n)}{۲m^{۲}}=\frac{m-n}{m}\Rightarrow \boxed{x''=\frac{m-n}{m}}$$

تذکر: اگر در معادله درجه دوّم $ax^{۲}+bx+c=۰$، b عدد زوج باشد، یا عبارتی شامل مضرب (۲) باشد، نصف آن را (b') می‌نامیم. در این صورت $b=۲b'$.

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}=\frac{-۲b'\pm\sqrt{۴b'^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

$$=\frac{-۲b'\pm\sqrt{۴(b'^{۲}-ac)}}{۲a}\Rightarrow x=\frac{-۲b'\pm ۲\sqrt{b'^{۲}-ac}}{۲a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^{۲}-ac}}{a}}$$ فرمول b'

نتیجه: اگر b زوج باشد و نصف آن را b' بنامیم، بهتر است معادله را از فرمول (b') حل کنیم.

عبارت $b'^{۲}-ac$ را مبین معادله گوییم و آن‌را با نماد (Δ') نشان می‌دهیم.

مثال: معادلهٔ $x^{۲}-۲\sqrt{۳}x-(۲\sqrt{۳}+۱)=۰$ را حل کنید.

$$a=۱\quad b'=-\sqrt{۳}\quad c=-(۲\sqrt{۳}+۱)$$

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^{۲}-ac}}{a}=\frac{\sqrt{۳}\pm\sqrt{۳+(۲\sqrt{۳}+۱)}}{۱}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}\pm\sqrt{۳+۱+۲\sqrt{۳}}}{۱}$$

$$x=\sqrt{۳}\pm\sqrt{(\sqrt{۳}+۱)^{۲}}=\sqrt{۳}\pm(\sqrt{۳}+۱)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\sqrt{۳}+\sqrt{۳}+۱=۲\sqrt{۳}+۱\\ x''=\sqrt{۳}-\sqrt{۳}-۱=-۱\end{cases}$$

مسأله: به‌ازای چه‌مقادیر m معادله $mx^{۲}+۲(m-۱)x+(m+۱)=۰$ دو ریشه حقیقی متمایز یا دو ریشه حقیقی مساوی دارد؟

حل: باید مبیّن معادله مثبت یا صفر باشد، یعنی:

$b^{۲}-۴ac\geq ۰$ یا $b'-ac\geq ۰$

$$a=m\ ،\ b'=m-۱\ ،\ c=m+۱$$

$$\Delta'\geq ۰\Rightarrow b'^{۲}-ac\geq ۰\Rightarrow (m-۱)^{۲}-m(m+۱)\geq ۰$$

$$\Rightarrow m^{۲}-۲m+۱-m^{۲}-m\geq ۰\Rightarrow -۳m+۱\geq ۰$$

$$\Rightarrow -۳m\geq -۱\Rightarrow \boxed{m\leq\frac{۱}{۳}\ ,m\neq ۰}$$

زیرا، اگر $m=۰$ ، آنگاه معادله به معادله درجه اوّل تبدیل می‌شود.

۳ـ روابط بین‌ضرایب و ریشه‌ها در معادلهٔ درجه دوّم $ax^{۲}+bx+c=۰$

c و b و a را ضرایب معادله درجه دوم گوییم و x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله‌اند. روابط بین x'' و x' و c و b و a را روابط بین ریشه‌ها و ضرایب گوییم.

داریم: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$ یا $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$

$$\Rightarrow x'=\frac{-b+\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}\ ,\ x''=\frac{-b-\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

الف) $x'+x''=\dfrac{-b+\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$

$$=\frac{-۲b}{۲a}=-\frac{b}{a}$$

ب) $x'.x''=\dfrac{-b+\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}\times\dfrac{-b-\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$

$$=\frac{(-b)^{۲}-(b^{۲}-۴ac)}{۴a^{۲}}=\frac{۴ac}{۴a^{۲}}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow\boxed{x'+x''=-\frac{b}{a}}\ ,\ \boxed{x'.x''=\frac{c}{a}}$$

توجه: مجموع دو ریشه، یعنی؛ $(x'+x'')$ را با S و حاصل ضرب دو ریشه، یعنی؛ $x'.x''$ را با P هم نشان می‌دهیم.

$$\Rightarrow\boxed{x'+x''=-\frac{b}{a}=S}\ ,\ \boxed{x'.x''=\frac{c}{a}=P}$$

قدر مطلق:

$$|x|=\begin{cases}+x & x\geq ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$$

مثال: $\begin{cases}|+۵|=۵\\ |-۵|=-(-۵)=۵\end{cases}\Rightarrow |-۵|=|۵|$

$$|\sqrt{۲}-۱|=\sqrt{۲}-۱$$

$$|۱-\sqrt{۲}|=|\sqrt{۲}-۱|=\sqrt{۲}-۱$$

قدر مطلق هر عدد برابر است با مقدار مثبت آن عدد.

مثال:

$$a=۲,b=۵\Rightarrow |a-b|=|۲-۵|=|-۳|=۳$$

$$x'=۴,x''=۶\Rightarrow |x'-x''|=|۴-۶|$$
$$=|-۲|=۲$$

$$x'=-۲,x''=-۵\Rightarrow |x'-x''|=|-۲+۵|$$
$$=|۳|=۳$$

$$x'=-۱,x''=۵\Rightarrow |x'-x''|=|-۱-۵|$$
$$=|-۶|=۶$$

در سال سوم قدر مطلق را به‌طور کامل خواهید داشت.

۱) $x'+x''=-\dfrac{b}{a}=S$

۲) $x'.x''=\dfrac{c}{a}=P$

۳) $|x'-x''| = \left|\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|$

$= \left|\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) $x'^2+x''^2 = (x'+x'')^2 - 2x'x''$

$= (S)^2 - 2P = S^2-2P$

۵) $x'^{-2}+x''^{-2} = \dfrac{1}{x'^2}+\dfrac{1}{x''^2} = \dfrac{x''^2+x'^2}{x'^2.x''^2}$

$= \dfrac{x'^2+x''^2}{(x'x'')^2} = \dfrac{S^2-2P}{P^2}$

۶) $|x'^2-x''^2| = |(x'-x'')(x'+x'')|$

$= \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\times S\right|$

۷) $x'^3+x''^3 = (x'+x'')(x'^2+x''^2-x'x'')$

$= S(S^2-2P-P) = S^3-3PS$

۸) $x'^{-3}+x''^{-3} = \dfrac{1}{x'^3}+\dfrac{1}{x''^3} = \dfrac{x''^3+x'^3}{x'^3.x''^3} = \dfrac{S^3-3PS}{P^3}$

۹) $|x'^3-x''^3| = |(x'-x'')(x'^2+x''^2+x'x'')|$

$= \left|\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)(S^2-2P+P)\right|$

$= \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}(S^2-P)\right|$

۱۰) $x'^4+x''^4 = (x'^2+x''^2)^2 - 2x'^2x''^2$

$= (S^2-2P)^2-2P^2$

۱۱) $x'^{-4}+x''^{-4} = \dfrac{1}{x'^4}+\dfrac{1}{x''^4} = \dfrac{x''^4+x'^4}{x'^4x''^4}$

$= \dfrac{(S^2-2P)^2-2P^2}{P^4}$

۱۲) $|x'^4-x''^4| = |(x'^2-x''^2)(x'^2+x''^2)|$

$= \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.S(S^2-2P)\right|$

۱۳) $\begin{cases} x'>0 \\ x''>0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'}+\sqrt{x''}$

$= \sqrt{S+2\sqrt{P}} = \sqrt{x'+x''+2\sqrt{x'x''}}$

۱۴) $\begin{cases} x'>0 \\ x''>0 \end{cases} \Rightarrow |\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|$

$= \sqrt{x'+x''-2\sqrt{x'x''}} = \sqrt{S-2\sqrt{P}}$

۱۵) $\begin{cases} x'>0 \\ x''>0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}}+\dfrac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}} = \dfrac{x'+x''}{\sqrt{x'x''}} = \dfrac{S}{\sqrt{P}}$

مسأله: در معادله درجه دوم $x^2 - 3x + 1 = 0$ اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند، موارد پانزده رابطه‌های فوق را محاسبه کنید.

$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5$

$S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-3}{1} = 3$

$P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{1} = 1$

۱) $x'+x'' = S = 3$ ۲) $x'.x'' = P = 1$

۳) $|x'-x''| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \dfrac{\sqrt{5}}{|1|} = \sqrt{5}$

$$۴)\ x'^{۲}+x''^{۲}=S^{۲}-۲P=(۳)^{۲}-۲=۹-۲=۷$$

$$۵)\ x'^{-۲}+x''^{-۲}=\frac{S^{۲}-۲P}{P^{۲}}=\frac{۷}{۱}=۷$$

$$۶)\ \left|x'^{۲}-x''^{۲}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.S\right|=\left|\frac{\sqrt{۵}}{|۱|}\times ۳\right|$$
$$=۳\sqrt{۵}$$

$$۷)\ x'^{۳}+x''^{۳}=S^{۳}-۳PS=(۳)^{۳}-۳(۱)(۳)$$
$$=۲۷-۹=۱۸$$

$$۸)\ x'^{-۳}+x''^{-۳}=\frac{S^{۳}-۳PS}{P^{۳}}=\frac{۱۸}{۱}=۱۸$$

$$۹)\ \left|x'^{۳}-x''^{۳}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.(S^{۲}-P)\right|$$
$$=\left|\frac{\sqrt{۵}}{|۱|}(۹-۱)\right|=۸\sqrt{۵}$$

$$۱۰)\ x'^{۴}+x''^{۴}=\left(S^{۲}-۲P\right)^{۲}-۲P^{۲}=(۹-۲)^{۲}-۲$$
$$=۴۹-۲=۴۷$$

$$۱۱)\ x'^{-۴}+x''^{-۴}=\frac{\left(S^{۲}-۲P\right)^{۲}-۲P^{۲}}{P^{۴}}=\frac{(۹-۲)^{۲}-۲}{(۱)^{۴}}$$
$$=\frac{۴۹-۲}{۱}=۴۷$$

$$۱۲)\ \left|x'^{۴}-x''^{۴}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.S\left(S^{۲}-۲P\right)\right|$$
$$=\left|\frac{\sqrt{۵}}{|۱|}\times ۳(۹-۲)\right|=۲۱\sqrt{۵}$$

$$۱۳)\ \sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$$
$$=\sqrt{۳+۲\sqrt{۱}}=\sqrt{۵}$$

$$۱۴)\ \left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}$$
$$=\sqrt{۳-۲\sqrt{۱}}=۱$$

$$۱۵)\ \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}}+\frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}}=\frac{S}{\sqrt{P}}=\frac{۳}{\sqrt{۱}}=۳$$

مسأله: در معادلهٔ $x^{۲}-۵x+(m+۱)=۰$، m را چنان بیابید که داشته باشیم: $x'^{-۲}+x''^{-۲}=\frac{۱۷}{۱۶}$

حل:

$$\begin{cases}S=۵\\P=m+۱\end{cases}$$

$$x'^{-۲}+x''^{-۲}=\frac{S^{۲}-۲P}{p^{۲}}=\frac{(۵)^{۲}-۲(m+۱)}{(m+۱)^{۲}}=\frac{۱۷}{۱۶}$$

$$\frac{۲۵-۲m-۲}{m^{۲}+۲m+۱}=\frac{۱۷}{۱۶}\Rightarrow ۱۷m^{۲}+۳۴m+۱۷$$
$$=۳۶۸-۳۲m\ \Rightarrow\ ۱۷m^{۲}+۶۶m-۳۵۱=۰$$

$$\Delta'=b'^{۲}-ac=(۳۳)^{۲}+۱۷(۳۵۱)$$
$$=۱۰۸۹+۵۹۶۷=(۷۰۵۶)=(۸۴)^{۲}$$

$$m=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^{۲}-ac}}{a}=\frac{-۳۳\pm ۸۴}{۱۷}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m'=۳\\m''=\frac{-۱۱۷}{۱۷}\end{cases}$$

۴ـ چند نکته دربارهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوّم $ax^{۲}+bx+c=۰$

الف) اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$، مجموع ضرایب صفر باشد، یعنی؛ $a+b+c=۰$ آنگاه‌یک ریشه عدد۱ و ریشه دیگر برابر $(\frac{c}{a})$ است.

اثبات:

$$a+b+c=۰\Rightarrow c=-(a+b)$$
$$\Rightarrow ax^{۲}+bx-(a+b)=۰$$
$$\Delta=b^{۲}+۴a(a+b)=b^{۲}+۴a^{۲}+۴ab=(۲a+b)^{۲}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm (2a+b)}{2a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-b+2a+b}{2a} = 1 \\ x'' = \dfrac{-b-2a-b}{2a} = \dfrac{-2(a+b)}{2a} = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

مثال: معادلهٔ $2x^2 - (2-\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

حل: در این معادله مجموع ضرایب صفر است، زیرا

$$2 - 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x' = 1}, \ x'' = \frac{c}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \boxed{x'' = \frac{-\sqrt{3}}{2}}$$

ب) اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، $a + c = b$، آنگاه یک ریشه -1 و ریشهٔ دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

اثبات: $c = b - a \Rightarrow ax^2 + bx + b - a = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(b-a)}}{2a}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab + 4a^2}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(2a-b)^2}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm (2a-b)}{2a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-b-2a+b}{2a} = \dfrac{-2a}{2a} = -1 \\ x'' = \dfrac{-b+2a-b}{2a} = \dfrac{-2(b-a)}{2a} \end{cases}$$

$$= \frac{-2(c)}{2a} = -\frac{c}{a}$$

مثال: معادلهٔ $(\sqrt{2}-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2}+1) = 0$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a + c = b$ زیرا

$$\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = -\dfrac{c}{a} = -\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \end{cases}$$

ج) اگر در معادله درجه دوّم $ax^2 + bx + c = 0$، یک ریشه (k) برابر ریشه دیگر باشد داریم: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$

اثبات:

$$\begin{cases} x'' = kx' \\ x' + x'' = -\dfrac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow kx' + x' = -\frac{b}{a} \Rightarrow (k+1)\ x' = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-b}{a(k+1)} \quad , \quad x'' = \frac{-bk}{a(k+1)}$$

$$x'.x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{-b}{a(k+1)} \times \frac{-bk}{a(k+1)} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 k}{a^2 (k+1)^2} = \frac{c}{a}$$

$$ab^2k = a^2c(k+1)^2 \Rightarrow b^2k = ac(k+1)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}}$$

مثال: در معادله $x^2 - (m+1)x + 2(m-2) = 0$ اگر $x'' = 4x'$ باشد، m را بیابید.

حل: $$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{(m+1)^2}{2(m-2)} = \frac{(4+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 2(m+1)^2 = 25(m-2)$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 21m + 52 = 0 \Rightarrow m = \frac{21 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{13}{2}\,,\,4}$$

د) اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، $\frac{c}{a} < 0$، آنگاه (Δ) خود به خود مثبت و معادله دو ریشه مختلف‌العلامه دارد.

اثبات:

$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow$ c, a مختلف العلامه‌اند $\Rightarrow ac < 0 \Rightarrow -4ac > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

$x'.x'' = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow x' < 0 < x''$

مسأله: حدود m را چنان بیابید تا معادله

$$\left(2\sqrt{2} + 1\right) x^2 - 4mx + (2m - 6) = 0$$

دو ریشه مختلف‌العلامه داشته باشد.

حل:

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m - 6}{2\sqrt{2} + 1} < 0 \Rightarrow 2m - 6 < 0$$

$$\Rightarrow 2m < 6 \Rightarrow m < 3$$

۵ ـ بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم

$ax^2 + bx + c = 0$

۱) Δ یا $\Delta' > 0 \Rightarrow x' < x''$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow & \text{۱) هر دو ریشه متحدالعلامه‌اند} \\ \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow & \text{۲) دو ریشه مختلف العلامه‌اند } x' < 0 < x'' \\ \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow & \text{۳) یک ریشه صفر و ریشه‌دیگر } \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ است.} \end{cases}$

$1 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 0 < x' < x'' & \text{هر دو ریشه مثبت} \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x' < x'' < 0 & \text{هر دو ریشه منفی} \end{cases}$

$$2 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x' < 0 < x'' \\ |x''| > |x'| \end{cases} \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x' < 0 < x'' \\ |x'| > |x''| \end{cases} \\ -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x'' = -x' \end{cases}$$

$$3 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow x' = 0 < x'' \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x' < 0 = x'' \end{cases}$$

۲) Δ یا $\Delta' = 0 \Rightarrow x' = x'' = -\frac{b}{2a}$

معادله دو ریشهٔ حقیقی مساوی دارد.

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow 0 < x' = x'' \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow x' = x'' < 0 \\ -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x' = x'' = 0 \end{cases}$$

مسأله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌های معادله زیر بحث کنید.

$$mx^2 - 2(m + 1)x + (m - 1) = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (m + 1)^2 - m(m - 1)$$

$$= m^2 + 2m + 1 - m^2 + m = 3m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{3}}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m - 1}{m} \quad \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \boxed{m = 1, 0}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{2(m + 1)}{m} \quad \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \boxed{m = -1, 0}$$

m	مقادیر کوچکتر از -1	-1		$-\frac{1}{2}$		۰		۱	مقادیر بزرگتر از ۱
Δ	−		−	۰	+		+		+
$\frac{c}{a}$	+		+		+	تعریف‌نشده	−	۰	+
$-\frac{b}{a}$	+	۰	−		−	تعریف‌نشده	+		+
	معادله ریشه‌های حقیقی ندارد.				$x'<x''<0$		$x'<0<x''$, $\lvert x''\rvert>\lvert x'\rvert$		$0<x'<x''$
				۱		۲		۳	

روی خط (۱):

$$\Delta=0 \Rightarrow x'=x''=-\frac{b}{2a}=\frac{2(m+1)}{2m}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

روی خط (۲):

$$m=0 \Rightarrow \text{معادلهٔ:}\ -2x-1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

روی خط (۳):

$$\frac{c}{a}=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ x''=-\frac{b}{a}>0 \end{cases} \Rightarrow x'=0<x''$$

تمرین: به ازای مقادیر مختلف m، در تعداد و علامت ریشه‌های معادلات زیر بحث کنید:

۱) $(m-1)x^2+2mx+(m-2)=0$

۱) $(m-1)x^2-2mx+(m-4)=0$

۱) $(m-1)x^2-2mx+(m-6)=0$

۶ـ تجزیه و تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوّم $f(x)+ax^2+bx+c$

الف ـ تجزیه:

ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ را صفرکننده‌های $f(x)$ می‌نامیم. و Δ یا مبیّن معادله $ax^2+bx+c=0$ را Δ یا مبیّن $f(x)$ می‌نامیم.

حالت اوّل: فرض می‌کنیم: $\Delta>0$ پس معادله $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه حقیقی متمایز x' و x'' است.

$$\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[x^2-(x'+x'')x+x'x''\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=a(x-x')(x-x'')}$$

این تجزیه را حاصل‌ضرب دو عامل درجه اوّل گوییم:

حالت دوّم: فرض می‌کنیم: $\Delta=0$ پس معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، دو ریشهٔ حقیقی مساوی دارد.

$$x'=x''=-\frac{b}{2a}$$

این تجزیه را مربع کامل گوییم.

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=a(x-x')^2=a(x-x'')^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

حالت سوّم: فرض می‌کنیم: $\Delta<0$ پس معادله $ax^2+bx+c=0$، ریشه‌های حقیقی ندارد.

$$\Rightarrow f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

این عبارت را مجموع مربعات دو عبارت گوییم.

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right]}$$

ب ـ تعیین علامت

حالت اوّل: داریم: $\Delta>0$ و $f(x)=a(x-x')(x-x'')$ فرض می‌کنیم:

$x'<x''$

$$a(x-x')(x-x'')=(ax-ax')(x-x'')=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=x' \\ x_2=x'' \end{cases}$$

x	مقادیر کوچکتر از x'	x'	مقادیر بزرگتراز x''، x''
$ax - ax'$	مخالف علامت a	موافق علامت a	موافق علامت a
$x - x''$	$-$	$-$	$+$
f(x)	مخالف علامت a	موافق علامت a	موافق علامت a

حالت دوّم: $\Delta = 0$ و $f(x) = a(x - x')^2$.

عبارت $(x - x')^2$ به‌ازای $x = x'$ صفر و دربقیّهٔ موارد مثبت است.

پس می‌توان گفت:

عبارتِ $f(x) = a(x - x')^2$ به‌ازای $x = x'$ صفر و در بقیّهٔ موارد موافق علامت a است.

x	مقادیر کوچکتر x'	x'	مقادیر بزرگتر از x'
f(x)	موافق علامت a		موافق علامت a

حالت سوّم: $\Delta < 0$ و

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

عبارت داخل کروشه همواره مثبت است، پس علامت f(x) همواره موافق علامت (a) است.

سؤال: یک سه جمله‌ای درجه دوّم $f(x) = ax^2 + bx + c$ چه‌وقت همواره مثبت است.

جواب: وقتی که: $\Delta' < 0$ یا Δ و $a > 0$.

سؤال: یک سه جمله‌ای درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ چه‌وقت همواره منفی است.

جواب: وقتی که $\Delta' < 0$ یا Δ و $a < 0$.

مسأله: به ازای چه مقادیر m، سه جمله‌ای $f(x) = (m - 1)x^2 - 2mx + (m - 2)$ همواره منفی‌است.

حل:

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow b'^2 - ac < 0 \Rightarrow m^2 - (m-1)(m-2) < 0$$

$$\Rightarrow 3m - 2 < 0 \Rightarrow m < \frac{2}{3} \quad m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1$$

$$\begin{cases} m < \frac{2}{3} \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{اشتراک جوابها} \Rightarrow \boxed{m < \frac{2}{3}}$$

مسأله: به ازای چه مقادیر m، سه جمله‌ای $f(x) = (m - 2)x^2 - 2mx + (m - 4)$ به صورت مجموع مربعات دو عبارت خواهدشد.

حل: باید $\Delta < 0$ یا Δ'.

$$\Delta' = b'^2 - ac < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - (m - 2)(m - 4) < 0$$

$$\Rightarrow 6m - 8 < 0 \Rightarrow m < \frac{4}{3}$$

۷ ـ تشکیل معادله:

الف) اگر مجموع دو عدد یعنی S و حاصل‌ضرب دو عدد یعنی P معلوم باشد و بخواهیم آن دو عدد را پیدا کنیم معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه‌هایش، آن دو عدد باشد:

$ax^2 + bx + c = 0$ طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \begin{cases} S = -\frac{b}{a} \\ P = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

در معادله $x^2 - Sx + P = 0$، مقادیر P و S را قرار دهیم سپس معادله حاصل را حل می‌کنیم.

مسأله: مجموعه دو عدد حقیقی (-1) و حاصل‌ضرب آنها $(\sqrt{3} - 3)$ است. آن دو عدد را بیابید.

$$S = -1 \qquad P = \sqrt{3} - 3$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + x + (\sqrt{3} - 3) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\sqrt{3} + 12}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2}}{2} = \frac{-1 \pm (2\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-۱+۲\sqrt{۳}-۱}{۲} = \dfrac{۲\sqrt{۳}-۲}{۲} = \boxed{\sqrt{۳}-۱} \\ x'' = \dfrac{-۱-۲\sqrt{۳}+۱}{۲} = \dfrac{-۲\sqrt{۳}}{۲} = \boxed{-\sqrt{۳}} \end{cases}$$

ب) تشکیل معادله درجه دوم وقتی یک ریشه آن معلوم است.

آن ریشه را مساوی x قرار می‌دهیم، سپس طرفین را به‌توان (۲) می‌رسانیم.

مسأله: معادلهٔ درجه دوّمی با ضرایب گویا تشکیل دهید که یک ریشهٔ آن $(۲-\sqrt{۳})$ باشد.

راه‌اوّل:

طرفین‌رابه‌توان (۲)می‌رسانیم: $x = ۲-\sqrt{۳} \Rightarrow x-۲ = -\sqrt{۳}$

$$x^۲ - ۴x + ۴ = ۳ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$$

راه دوّم: اگر بخواهیم معادلهٔ درجه دوّمی با ضرایب گویا تشکیل دهیم که یک ریشهٔ آن $(۲-\sqrt{۳})$ باشد، باید ریشهٔ دیگر $(۲+\sqrt{۳})$ باشد تا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها، اعدادی گویا باشند.

بنابراین: $P = ۱ \ , \ S = ۴$

در نتیجه: $x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$

ج) تشکیل معادله درجه دوم جدید از روی معادله مفروض تحت شرایط مسأله

مسأله: معادلهٔ درجه‌دوم $x^۲ - ۵x - ۲ = ۰$ مفروض‌است، اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی این معادله باشد؛ معادلهٔ درجه دوم جدیدی تشکیل دهید که ریشه‌های آن از نصف ریشه‌های این معادله (۲) واحد کمتر باشد.

$x =$ ریشه معادله مفروض

$y =$ ریشه معادله جدید

$$\Rightarrow y = \frac{x}{۲} - ۲ \Rightarrow x = ۲y - ۴$$

در معادله مفروض به‌جای x، $(۲y - ۴)$ را قرار می‌دهیم.

$$(۲y-۴)^۲ - ۵(۲y-۴) - ۲ = ۰ \Rightarrow ۴y^۲ - ۲۶y + ۳۴ = ۰$$

مسأله: معادلهٔ $x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ مفروض است. اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی این معادله باشد، معادلهٔ درجه دوم جدیدی بسازید که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های این معادله باشد.

در معادله مفروض قرار می‌دهیم:

$x =$ ریشه معادله مفروض

$y =$ ریشه معادله جدید

$$\Rightarrow y = x^۳ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y}$$

طرفین را به‌توان (۳) می‌رسانیم:

$$\sqrt[۳]{y^۲} - ۴\sqrt[۳]{y} - ۱ = ۰ \Rightarrow \underbrace{\sqrt[۳]{y^۲}}_{a} - \underbrace{۴\sqrt[۳]{y}}_{b} = ۱$$

$$a - b = ۱$$

$$a^۳ - b^۳ - ۳ab(a-b) = ۱$$

$$y^۲ - ۶۴y - ۳\sqrt[۳]{y^۲}(+۴\sqrt[۳]{y})\overbrace{(\sqrt[۳]{y^۲} - ۴\sqrt[۳]{y})}^{۱} = ۱$$

$$y^۲ - ۶۴y - ۱۲y(۱) = ۱ \Rightarrow y^۲ - ۷۶y - ۱ = ۰$$

مسأله: معادله $x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ مفروض‌است. اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشد، معادله درجه دوم جدیدی بسازید که ریشه‌هایش $۲x' + ۳x'' - ۴$ و $۲x'' + ۳x' - ۴$ باشد.

حل: یکی از روابط را مساوی y قرار می‌دهیم.

$$y = ۲x' + ۳x'' - ۴ \Rightarrow y = ۲x' + ۲x'' + x'' - ۴$$

$$\Rightarrow y = ۲(x'+x'') + x'' - ۴$$

$$y = ۲\left(-\frac{b}{a}\right) + x'' - ۴ \Rightarrow y = ۲(۳) + x'' - ۴$$

$$= y = x'' + ۲ \Rightarrow x'' = y - ۲$$

در معادله مفروض قرار می‌دهیم.

$$(y-۲)^۲ - ۳(y-۲) - ۱ = ۰ \Rightarrow y^۲ - y - ۳ = ۰$$

۸ ـ رابطه S ها در معادله درجه دوم:

معادله درجه دوّم $ax^۲ + bx + c = ۰$ را درنظر می‌گیریم و قرارداد می‌کنیم که

$$S_۱ = x'^۱ + x''^۱, S_۲ = x'^۲ + x''^۲, S_۳ = x'^۳ + x''^۳, \ldots,$$

$$S_n = x'^n + x''^n$$

طرفین معادله را در $x^{n-۲}$ ضرب می‌کنیم. $n \in N$

$$ax^n + bx^{n-۱} + cx^{n-۲} = ۰$$

در این معادله یکبار به‌جای x، x' و یکبار بـجای x، x'' را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} ax'^{n}+bx'^{n-۱}+cx'^{n-۲}=۰ \\ ax''^{n}+bx''^{n-۱}+cx''^{n-۲}=۰ \end{cases}$$ جمع می‌کنیم

$$a(x'^{n}+x''^{n})+b(x'^{n-۱}+x''^{n-۱})+c(x'^{n-۲}+x''^{n-۲})=۰$$

$$\Rightarrow \boxed{aS_n+bS_{n-۱}+cS_{n-۲}=۰}$$

مسأله: اگر در معادله $x^۲-۲x-۱=۰$، $S_۳=۱۴$ و $S_۴=۳۴$ باشد $S_۵$ را بیابید.

$$n=۵ \Rightarrow a\,S_۵+b\,S_۴+c\,S_۳=۰$$

$$S_۵-۲(۳۴)-۱(۱۴)=۰ \Rightarrow \boxed{S_۵=۸۲}$$

مسأله: اگر در معادله $x^۲-۳x-۱=۰$، $S_{۱۰}=k$، آنگاه $S_{۳۰}$ را بیابید.

حل: طرفین را به‌توان (۳) می‌رسانیم: $S_{۱۰}=k\Rightarrow \underbrace{x'^{۱۰}}_{a}+\underbrace{x''^{۱۰}}_{b}=k$

$$a+b=k$$

$$a^۳+b^۳+۳ab(a+b)=k^۳$$

$$x'^{۳۰}+x''^{۳۰}+۳x'^{۱۰}x''^{۱۰}(x'^{۱۰}+x''^{۱۰})=k^۳$$

$$S_{۳۰}+۳(x'x'')^{۱۰}(k)=k^۳$$

$$S_{۳۰}+۳(-۱)^{۱۰}(k)=k^۳\Rightarrow \boxed{S_{۳۰}=k^۳-۳k}$$

۹ـ معادلات تبدیل‌پذیر به معادله درجه دوم:

الف) معادله $(x^۲+x-۵)(x^۲+x-۳)$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم: $x^۲+x=A$

$$\Rightarrow (A-۵)(A-۳)=۸ \Rightarrow A^۲-۸A+۱۵=۸$$

$$\Rightarrow A^۲-۸A+۷=۰$$

مجموع ضرایب صفر است $\Rightarrow \begin{cases}A=۱\\A=۷\end{cases}$

$$\Rightarrow x^۲+x=۱ \qquad x^۲+x=۷$$

$$x^۲+x-۱=۰ \qquad x^۲+x-۷=۰$$

$$x=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \qquad x=\frac{-۱\pm\sqrt{۲۹}}{۲}$$

ب: هر معادله که به‌صورت $ax^{۲n}+bx^{n}+c=۰$، $n\in N$ باشد، با فرض $x^n=y$ قابل حل است.

مسأله: معادله $۱۶x^۸-۱۷x^۴+۱=۰$ را حل کنید.

حل: فرض می‌شود: $x^۴=y$.

$$\Rightarrow ۱۶y^۲-۱۷y+۱=۰$$

مجموع ضرایب صفر است

$$\Rightarrow \begin{cases}y=۱\\ y=\frac{۱}{۱۶}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^۴=۱\Rightarrow x=\pm ۱\\ x^۴=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

ج: معادله $(۲-\sqrt{۳})^{tgx}+(۲+\sqrt{۳})^{tgx}=۲$ را حل کنید.

حل: فرض می‌شود: $(۲-\sqrt{۳})^{tgx}=A$

$$(۲+\sqrt{۳})^{tgx}=\left(\frac{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}{۲-\sqrt{۳}}\right)^{tgx}$$

$$=\left(\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\right)^{tgx}=\frac{۱}{(۲-\sqrt{۳})^{tgx}}=\frac{۱}{A}$$

$$\Rightarrow A+\frac{۱}{A}=۲\Rightarrow A^۲-۲A+۱=۰\Rightarrow \boxed{A=۱}$$

می‌دانیم: $\Rightarrow (۲-\sqrt{۳})^{tgx}=۱,\ (۲-\sqrt{۳})^{۰}=۱$

$$\Rightarrow tgx=۰ \Rightarrow \boxed{x=k\pi}$$

۱۰ـ نامعادله درجه دوم: $ax^۲+bx+c>۰$ یا $ax^۲+bx+c<۰$

باید اوّل معادله $ax^۲+bx+c=۰$ را حل کرد سپس آن را در جدولی تعیین علامت نمود، سپس محدوده جواب را پیدا کرد.

مسأله: نامعادله $۲x^۲+۷x+۵>۰$ را حل کنید.

$$f(x)=۲x^۲+۷x+۵=۰$$

$$a+c=b \Rightarrow \begin{cases}x'=-۱\\ x''=-\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

x	مقادیر کوچکتر از $-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$		-1	مقادیر بزرگتر از -1
$f(x)$	+		−		+
	جواب				جواب

$x < -\frac{5}{2}$ یا $-1 < x$

مسأله: اگر $n \in N$ ، نامعادله $2n^2 - 27n + 25 < 0$ چند جواب دارد.

$$f(n) = 2n^2 - 27n + 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = \frac{25}{2} \end{cases}$$

n	مقادیر کوچکتر از ۱	۱		$\frac{25}{2}$	مقادیر بزرگتر از $\frac{25}{2}$
$f(n)$	+		−		+
			جواب		

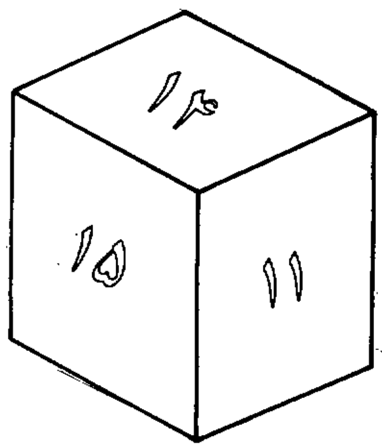
$1 < n < \frac{25}{2}$

$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

پس این نامعادله (۱۱) جواب دارد.

تفریح اندیشه ۱

عددهای واقع بر وجه‌های مکعب زیر عددهای درست متوالی‌اند. مجموعهای دو عدد واقع بر هر یک از سه جفت وجه مقابل آن برابرند. مجموع شش عدد واقع بر این مکعب چه قدر است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

ناسازگاری میان امور فنی و حکمت، همان گونه که اکنون وجود دارد، در گذشته نیز موجود بوده، و در آن گذشته نیز مانند امروز، گروه فراوانی از مردم نادان بوده‌اند که چیزهای اساسی را فدای چیزهای پیش‌پا افتاده و بی‌مقدار کرده‌اند.

تاریخ علم . جورج سارتن ، احمد آرام