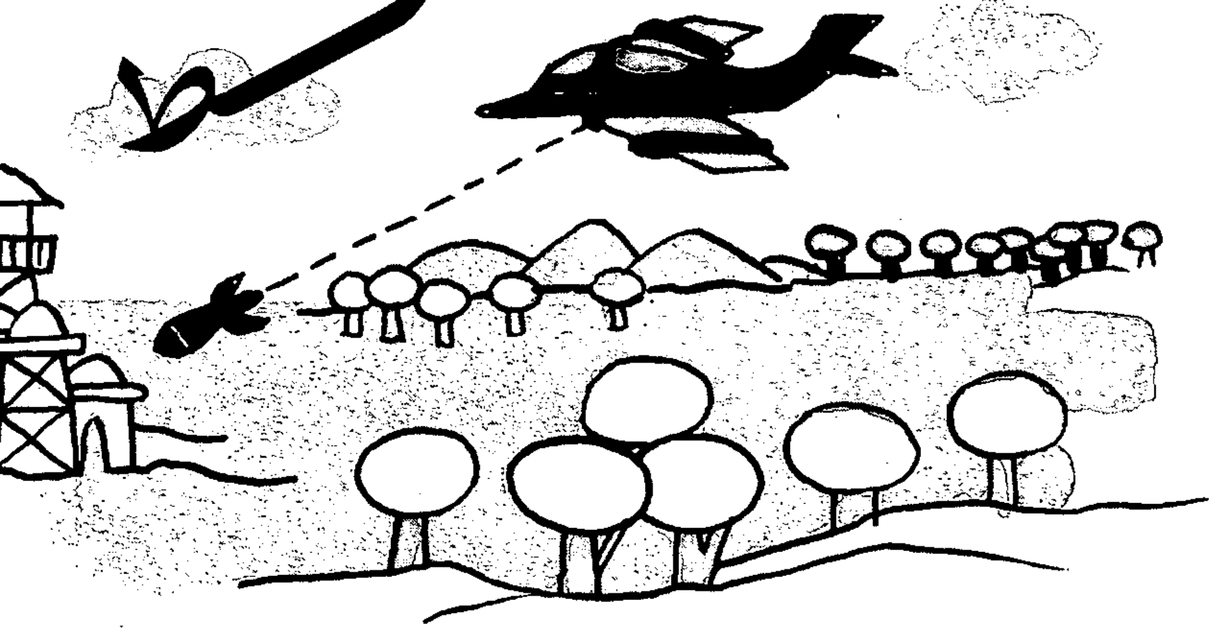
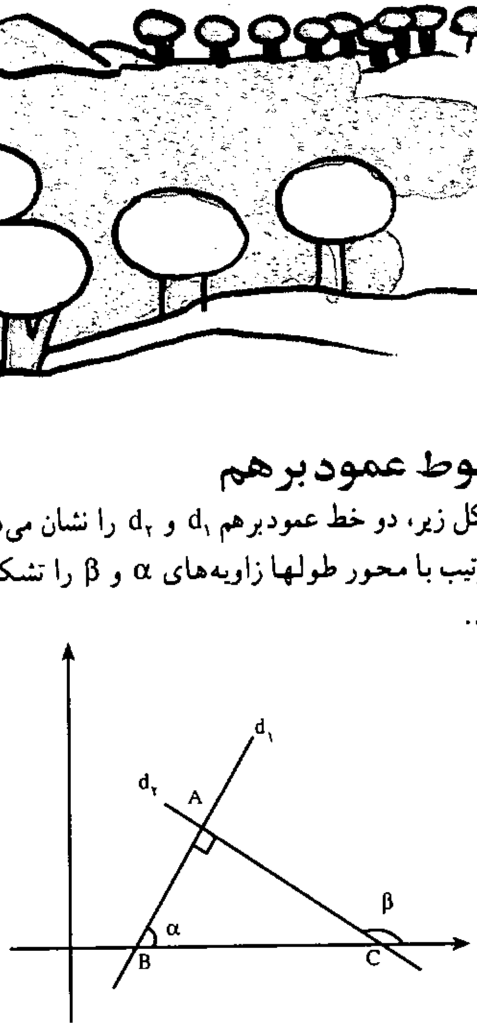
معادله خط

● رضا پیکر



خطوط عمود برهم

شکل زیر، دو خط عمود برهم d_1 و d_2 را نشان می‌دهد که به‌ترتیب با محور طولها زاویه‌های α و β را تشکیل داده‌اند.



اگر m_1 و m_2 به‌ترتیب شیبهای دو خط d_1 و d_2 باشند، شیب خط d_1 برابر با $tg\alpha$ و شیب خط d_2 برابر با $tg\beta$ است یا $m_1 = tg\alpha$ و $m_2 = tg\beta$، اکنون مثلث قائم‌الزاویه ABC را درنظر بگیرید. در این مثلث داریم :

$$tg(<ABC = tg\alpha) = \frac{AC}{AB}$$

$$tg(<ACB) = tg(180 - \beta) = \frac{AB}{AC}$$

از ضرب طرفین دو رابطهٔ بالا داریم :

$$tg\alpha . tg(180 - \beta) = 1$$

و با توجه به تساوی $tg(180 - \beta) = -tg\beta$ داریم :

$$tg\alpha . (-tg\beta) = 1 \Rightarrow tg\alpha . tg\beta = -1$$

و با توجه به تساویهای $m_1 = tg\alpha$ و $m_2 = tg\beta$ می‌توانیم بنویسیم :

$$m_1 . m_2 = -1 \quad \text{یا} \quad m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

بنابراین می‌توان گفت، حاصلضرب شیبهای دو خط عمود برهم، برابر با ۱- است یا شیبهای دو خط عمود برهم، قرینهٔ معکوس یکدیگرند.

مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-1\\-5\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}-10\\12\end{bmatrix}$ سه رأس یک مثلث می‌باشند. نشان دهید این مثلث در رأس A قائمه است.

حل: برای این منظور، باید نشان دهیم شیبهای خطوطی که ضلعهای AB و AC بر آن واقعند، قرینهٔ معکوس یکدیگرند.

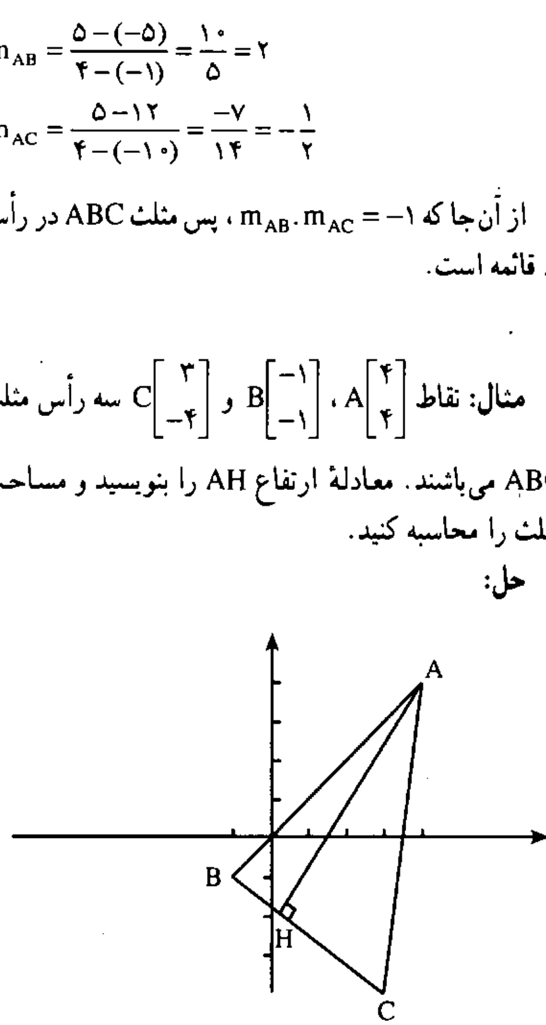
$$m_{AB}=\frac{5-(-5)}{4-(-1)}=\frac{10}{5}=2$$

$$m_{AC}=\frac{5-12}{4-(-10)}=\frac{-7}{14}=-\frac{1}{2}$$

از آن‌جا که $m_{AB}.m_{AC}=-1$، پس مثلث ABC در رأس A قائمه است.

مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ سه رأس مثلث ABC می‌باشند. معادلهٔ ارتفاع AH را بنویسید و مساحت مثلث را محاسبه کنید.

حل:



شیب ارتفاع AH قرینهٔ معکوس شیب ضلع BC است.

$$m_{BC}=\frac{-4-(-1)}{3-(-1)}=\frac{-3}{4}\ \Rightarrow\ m_{AH}=\frac{4}{3}$$

معادلهٔ AH : $(y-4)=\frac{4}{3}(x-4)$ یا $3y=4x-4$

برای محاسبهٔ مساحت مثلث، اندازهٔ ضلع BC و ارتفاع AH لازم است و برای محاسبهٔ اندازهٔ ارتفاع AH مختصات نقطهٔ H موردنیاز است. برای به‌دست آوردن مختصات نقطهٔ H، دو خط AH و BC را در یک دستگاه حل می‌کنیم. معادلهٔ ضلع BC عبارت است از:

$$(y+1)=\frac{-3}{4}(x+1)\quad \text{یا}\quad 4y=-3x-7$$

$$\begin{cases}4y=-3x-7\\3y=4x-4\end{cases}\ \Rightarrow\ H\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\\-\frac{8}{5}\end{bmatrix}$$

$$|AH|=\sqrt{\left(4+\frac{1}{5}\right)^2+\left(4+\frac{8}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1225}{25}}=7$$

$$|BC|=\sqrt{(3+1)^2+(-4+1)^2}=\sqrt{25}=5$$

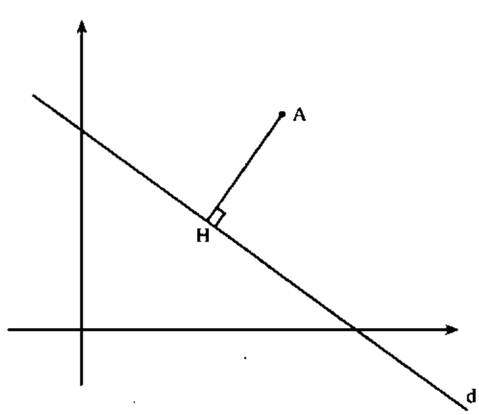
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times|AH|\times|BC|=\frac{1}{2}\times 7\times 5=\frac{35}{2}$$

فاصلهٔ نقطه از خط

برای محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از خط راست، وقتی‌که مختصات نقطه و معادلهٔ خط راست معلوم باشد، می‌توان یک دستور به‌دست آورد.

برای به‌دست آوردن این دستور، از همان شیوه‌ای استفاده می‌کنیم که در مثال قبل، برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ H از خط BC استفاده کردیم.

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ از خط معلوم $d: ax+by+c=0$، ابتدا معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که از نقطهٔ A بگذرد و بر خط d عمود باشد.



از آن‌جا که شیب خط d برابر با $\frac{-a}{b}$ است، شیب خط موردنظر برابر با $\frac{b}{a}$ می‌باشد. بدین‌ترتیب، معادلهٔ خط عمود بر d و گذرنده از نقطهٔ A عبارت است از :

$$d': y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a}$$

با درنظر گرفتن معادله‌های خطوط d و d′ می‌توان مختصات نقطهٔ H (پای عمودی که از A بر خط d رسم می‌شود) را به‌دست آورد :

$$\begin{cases} \frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a} \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

برای سهولت کار فرض می‌کنیم :

$$\frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a} = k$$

داریم :

$$\begin{cases} x = ak + x_1 \\ y = bk + y_1 \end{cases}$$

(x و y همان مختصات نقطهٔ H می‌باشند.)

مقادیر x و y را در معادلهٔ خط d قرار می‌دهیم :

$$a(ak + x_1) + b(bk + y_1) + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

چنانچه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مختصات نقطهٔ H و $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ مختصات نقطهٔ A باشند، می‌توانیم بنویسیم :

$$|AH| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$|AH| = \sqrt{(aK + x_1 - x_2)^2 + (bK + y_1 - y_1)^2}$$

$$|AH| = \sqrt{a^2K^2 + b^2K^2} = |K|\sqrt{a^2 + b^2}$$

با قرار دادن مقدار K در رابطهٔ بالا داریم :

$$|AH| = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

(AH همان فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d می‌باشد.)

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ را از خط $8y = 6x + 5$ محاسبه کنید.

حل: ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت $8y - 6x - 5 = 0$ می‌نویسیم. اگر این فاصله برابر با h باشد، داریم :

$$h = \left| \frac{(8 \times 5) - 6 \times (-5) - 5}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \right| = \frac{65}{10} = 6/5$$

مثال: دو خط $d_1: 3x - 4y = 5$ و $d_2: 3x - 4y = 10$ معادله‌های دو ضلع مقابل یک مربع هستند. مساحت این مربع را محاسبه کنید.

حل: برای محاسبهٔ مساحت مربع، فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه متعلق به خط d_1 را از خط d_2 محاسبه می‌کنیم یا بعکس. این فاصله اندازهٔ یک ضلع مربع است. برای مثال، فاصلهٔ نقطهٔ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ را که متعلق به خط d_1 می‌باشد، از خط d_2 محاسبه می‌کنیم. داریم :

$$h = \left| \frac{3 \times 3 - 4 \times 1 - 10}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| = \left| \frac{-5}{5} \right| = 1$$

بنابراین، مساحت این مربع، یک واحد مربع است.

فاصلهٔ دو خط موازی

دو خط موازی d و d′ را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} d: ax + by + c = 0 \\ d': ax + by + c' = 0 \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ این دو خط، نقطهٔ (x_1, y_1) را روی خط d' انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت، فاصلهٔ این نقطه از خط d برابر است با :

$$H=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

و چون $\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$ روی خط d' است، پس باید : $ax_1+by_1+c'=0$ باشد. در نتیجه، $ax_1+by_1=-c'$. با جایگذاری این رابطه در تساوی اخیر، رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$H=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

حل: مثال قبل از طریق دیگر :

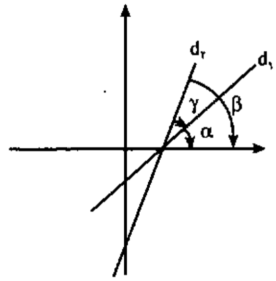
چنانچه معادله‌های اضلاع مقابل را به‌صورت زیر بنویسیم، خواهیم داشت :

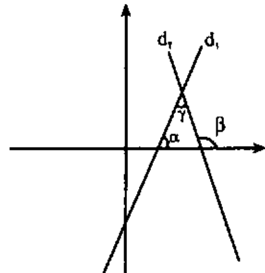
$$d_1: 3x-4y-5=0 \Rightarrow c=-5$$
$$d_2: 3x-4y-10=0 \Rightarrow c'=-10$$
$$H=\frac{|-5-(-10)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$

بنابراین، مساحت این مربع، یک واحد مربع است.

محاسبهٔ زاویهٔ بین دو خط

شکلهای زیر، دو خط d_1 و d_2 را نشان می‌دهند که با یکدیگر زاویه γ و با محور طولها به‌ترتیب زوایای α و β را تشکیل می‌دهند.





اگر m_1 و m_2 به‌ترتیب شیبهای خطوط d_1 و d_2 باشند، داریم : $m_1=tg\alpha$ و $m_2=tg\beta$.

با توجه به شکلها می‌توانیم بنویسیم :

$$\alpha+\gamma=\beta \Rightarrow \gamma=\beta-\alpha$$

از دو طرف رابطهٔ بالا تانژانت می‌گیریم :

$$tg\gamma=tg(\beta-\alpha) \Rightarrow tg\gamma=\frac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\alpha.tg\beta}$$

چنانچه مقادیر $tg\alpha$ و $tg\beta$ را بر حسب m_1 و m_2 قرار دهیم، داریم :

$$tg\gamma=\frac{m_2-m_1}{1+m_1.m_2} \Rightarrow \gamma=Arctg\frac{m_2-m_1}{1+m_1.m_2}$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد، زاویهٔ بین دو خط d_1 و d_2 با شیبهای m_1 و m_2، زاویه‌ای است که تانژانت آن برابر است با : $\frac{m_2-m_1}{1+m_1.m_2}$

از آن‌جا که زاویهٔ دو خط را با زاویه‌ای که در فاصلهٔ $(0, \frac{\pi}{2})$ قرار داشته باشد، عنوان می‌کنند، رابطهٔ اخیر را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\gamma=Arctg\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1.m_2}\right|$$

مثال: دو خط زیر با هم چه زاویه‌ای تشکیل می‌دهند؟

$$d_1: y=\sqrt{3}x$$
$$d_2: y=-\sqrt{3}x$$

حل: اگر γ زاویهٔ بین این دو خط باشد، داریم :

$$m_{d_1}=\sqrt{3}\ ,\ m_{d_2}=-\sqrt{3}$$
$$\gamma=Arctg\left|\frac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{1+(\sqrt{3})(-\sqrt{3})}\right|$$
$$\gamma=Arctg\left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right|=Arctg\left|-\sqrt{3}\right|=60^\circ$$

سال دوازدهم ۱۳۸۱ شماره مسلسل ۳۷

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ می‌گذرد و با خط $\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$ زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد.

حل: شیب‌خط $\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$ برابر با $\frac{2}{5}$ است و اگر شیب‌خط موردنظر برابر با m باشد، داریم :

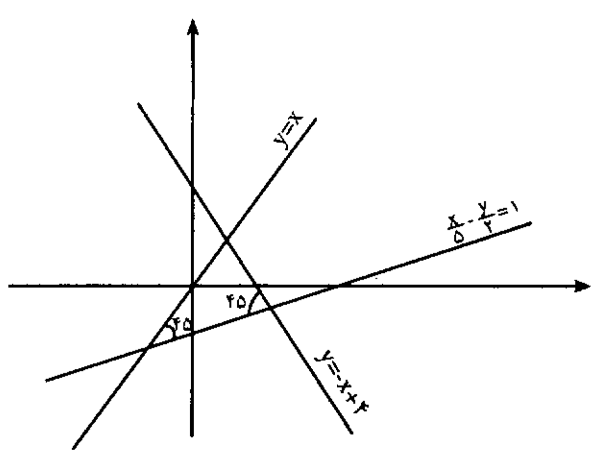
$$tg45^\circ=\left|\frac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}\right|$$

$$\left|\frac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}\right|=1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}=1\Rightarrow m=1\\[2ex]\dfrac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}=-1\Rightarrow m=-1\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ خط موردنظر عبارت است از :

$$(y-2)=(x-2)\Rightarrow\ y=x$$

$$(y-2)=-(x-2)\quad \text{یا}\quad \Rightarrow y=-x+4$$



همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، مسأله دو جواب دارد.

مکان هندسی یک نقطهٔ متغیر

نقطهٔ $A(P,3)$ را درنظر بگیرید. نقطهٔA، نقطهٔ ثابتی روی صفحهٔ مختصات نیست و با تغییر مقدار P، مکان خود را روی صفحه عوض می‌کند. عرض نقطهٔA مقدار ثابت ۳ می‌باشد و نقطهٔA تنها در مکانهایی می‌تواند باشد که عرض آن برابر با ۳ باشد. بنابراین نقطهٔA روی خط $y=3$ واقع است. خط $y=3$ را مکان هندسی نقطهٔ A می‌نامیم.

در حالت کلی، وقتی طول و عرض یک نقطه شامل پارامتر باشند، می‌توان با حذف پارامتر، رابطه‌ای بین طول و عرض نقطه و مستقل از پارامتر نوشت.

مثال: مکان هندسی نقطهٔ $M\begin{bmatrix}2m\\1-m\end{bmatrix}$ را با حذف پارامتر m به‌دست آورید.

حل: پارامتر $2m$ معرّف طول نقطهٔM و پارامتر $1-m$ معرّف عرض نقطهٔ M می‌باشد، داریم :

$$2m=x$$
$$1-m=y$$

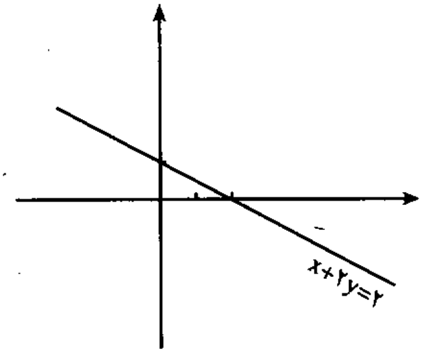
از تساوی $2m=x$، مقدار m را بر حسب x محاسبه می‌کنیم. داریم :

$$m=\frac{x}{2}$$

در رابطهٔ $1-m=y$، مقدار m را بر حسب x قرار می‌دهیم.

$$1-\frac{x}{2}=y\Rightarrow\ x+2y=2$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ $M\begin{bmatrix}2m\\1-m\end{bmatrix}$، خط $x+2y=2$ می‌باشد، یا به بیان دیگر، نقطهٔM به‌ازای هر مقدار m روی خط $x+2y=2$ قرار دارد. شکل صفحه بعد، مکان هندسی نقطهٔM را نشان می‌دهد.



مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ مفروضند. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید، اگر داشته باشیم:

$$|MA|^2-|MB|^2=8$$

حل: اگر مختصات M را $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ فرض کنیم، داریم:

$$|MA|^2=(x+1)^2+(y-4)^2$$
$$|MB|^2=(x-3)^2+(y+2)^2$$
$$\Rightarrow |MA|^2-|MB|^2=8x-12y+4$$

با برقرار کردن شرط مسأله داریم:

$$8x-12y+4=8 \Rightarrow 2x-3y=1$$

پس نقطهٔ M روی خط $2x-3y=1$ قرار دارد.

توانایی خود را با حلّ چند تمرین ارزیابی کنید.

۱. معادلهٔ اضلاع مثلثی را به‌دست آورید که مختصات کی از رئوس آن $\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$ و معادله‌های ارتفاع و میانهٔ نظیر أس دیگر آن به‌ترتیب $2x-3y+12=0$ و $2x=-3y$ ست.

۲. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ گذشته و حورهای مختصات را در دو نقطه قطع کند که فاصلهٔ آن دو قطه از مبدأ مختصات، برابر هم و مخالف صفر باشد.

۳. معادلهٔ خطی را بنویسید که با خط $8x-5y+15=0$ موازی بوده و از نقطهٔ $M\begin{bmatrix}-6\\-3\end{bmatrix}$ به فاصلهٔ ۴ باشد.

۴. نقاط $M_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$، $M_2\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ و $M_3\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ مختصات اوساط سه ضلع مثلثی هستند. معادلهٔ ضلعهای این مثلث را به‌دست آورید.

۵. نقاط $A\begin{bmatrix}-4\\a\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}a\\-2\end{bmatrix}$ مفروضند. مقدار a را طوری تعیین کنید که در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه باشد.

۶. معادله‌های اضلاع مثلثی عبارتند از: $x+5y=+7$، $3x-2y-4=0$ و $7x+y+19=0$، مساحت این مثلث را حساب کنید.

۷. مساحت مثلثی ۸ واحد مربع است و دو رأس آن عبارتند از $A\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$، و رأس سوم آن روی خط $2x+y=2$ قرار دارد. مختصات رأس سوم را به‌دست آورید.

۸. روی محور طولها، نقطه‌ای بیابید که مجموع مربعات فواصلش از دو نقطهٔ $M\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $N\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ کمترین مقدار ممکن باشد.

۹. اگر معادله‌های قطرهای یک مستطیل $3x+2y-8=0$ و $4x+y-14=0$ باشند و مختصات یکی از رئوس مستطیل $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ باشد، معادلهٔ ضلعهای مستطیل را به‌دست آورید.