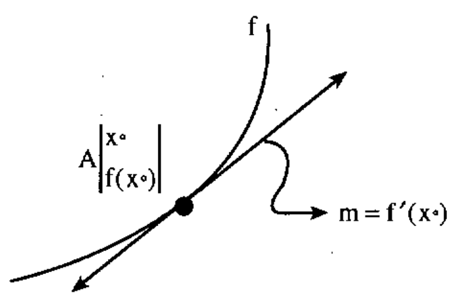
مشتق‌پذیری تابع f در نقطهٔ $x_\circ$ روی منحنی f

احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه

فرض می‌کنیم که تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و $a < x_\circ < b$.

تابع f را در نقطهٔ $x_\circ$، وقتی مشتق‌پذیر گوییم که $\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ برابر یک عدد مشخص و معین باشد. در این صورت، این حد را (که برابر شیب خط مماس بر منحنی f در $x_\circ$ است) مشتق تابع f در نقطهٔ به طول $x_\circ$ می‌گوییم و آن را با نماد $f'(x_\circ)$ نشان می‌دهیم.

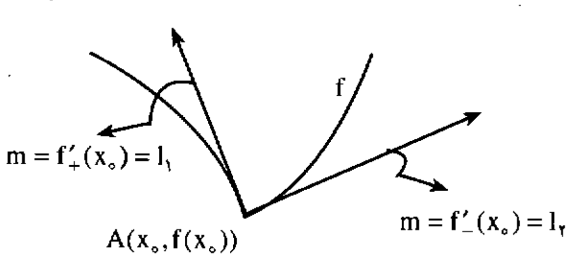


تذکر ۱. اگر حد فوق برابر با دو مقدار متفاوت شود یا ∞ شود و یا مقدار نامعلومی شود، می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ مشتق‌پذیر نیست.

تذکر ۲. اگر در یک مسأله ناچار شدیم $\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ را یک‌بار وقتی $x \to x_\circ^+$ و یک بار برای وقتی $x \to x_\circ^-$ بیابیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

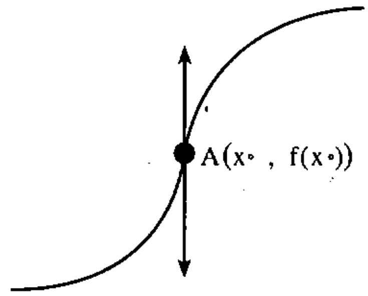
الف. اگر $\lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} = l_1$، در این صورت l_1 را با نماد $f'_+(x_\circ)$ نشان می‌دهیم و این عدد، شیب خط مماس بر منحنی تابع f در طرف راست نقطه‌ای به طول $x_\circ$ است و آن را مشتق راست می‌گوییم.

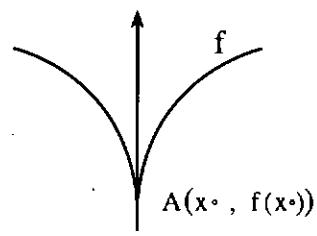
ب. اگر $\lim_{x\to x_\circ^-}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} = l_2$، در این صورت l_2 را با نماد $f'_-(x_\circ)$ نشان می‌دهیم و این عدد شیب خط مماس بر منحنی تابع f در طرف چپ نقطهٔ به طول $x_\circ$ است و آن را مشتق چپ می‌گوییم.



تذکر ۳. اگر $\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} = \infty$، ∞ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ است؛ ولی بنا به تعریف می‌گوییم تابع f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر نیست، ∞ هم یک عدد حقیقی نیست؛ ولی راستای خط مماس را نشان می‌دهد

که عمود بر محور xهاست؛ مانند شکل‌های زیر:





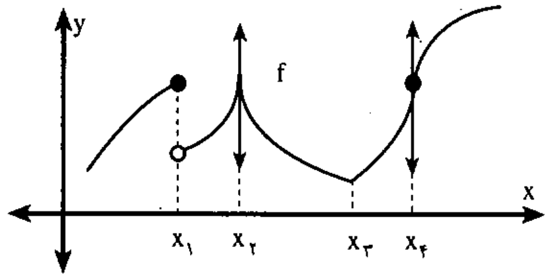
نکتهٔ مهم. همهٔ مسائل مشتق‌پذیری، مسائل حد با ابهام $\frac{0}{0}$ است. برای حل آن‌ها باید:

۱. عبارت $f(x)-f(x_0)$ را تجزیه کرد تا عامل $(x-x_0)$ در آن ایجاد شود، پس از حذف این عامل از صورت و مخرج، حد مورد نظر محاسبه می‌شود.

۲. اگر عبارت $f(x)-f(x_0)$ رادیکالی باشد، باید صورت و مخرج کسر را در عبارت مناسبی ضرب کنیم تا رادیکال صورت حذف شود، سپس مانند شمارهٔ (۱) عمل می‌کنیم.

۳. اگر عبارت $f(x)-f(x_0)$ مثلثاتی باشد، آن عبارت را به حاصلضرب تبدیل می‌کنیم و از هم‌ارزی $u\to 0\begin{cases}\sin u\sim u\\ \tan u\sim u\end{cases}$ استفاده می‌کنیم؛ در این موقع، عبارت‌های مورد نیاز به عبارت‌های جبری تبدیل می‌شوند، آن‌گاه حد مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

تذکر ۴. یک نمودار، در نقاط زاویه‌دار، در نقاط ناپیوسته و در نقاطی که خط مماس بر منحنی تابع موازی محور yها باشد، مشتق‌پذیر نیست. به نمودار تابع f در این شکل توجه کنید.



این تابع در نقاط به طول‌های x_1 و x_2 و x_3 و x_4 مشتق‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۱. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-2x+3$ را در نقطهٔ $x_0=2$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x+3-7}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-2}$$

$$x^3-2x-4\ \Big|\ \frac{x-2}{x^2+2x+2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+2)=10=f'(2)$$

این تابع در $x_0=2$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۲. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$ را در نقطهٔ $x_0=-1$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{7}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{7}}{x+1}\times\frac{\sqrt{x^2-6x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x^2-6x}+\sqrt{7}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-6x-7}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-6x}+7\right)}$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-7)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-6x}+7\right)} = \lim_{x\to -1}\frac{x-7}{\sqrt{x^2-6x}+7}$$

$$= \frac{-8}{2\sqrt{7}} = \frac{-4}{\sqrt{7}} = f'(-1)$$

پس این تابع در $x_0 = -1$ مشتق‌پذیر است .

مسألهٔ ۳ . مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید .

حل :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{2}}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{2(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{2(x^3+x)}+\sqrt[3]{4}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{2(x^3+x)}+\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{2(x^3+x)}+\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{2(x^3+x)}+\sqrt[3]{4}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}} = f'(1)$$

پس این تابع در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر است .

مسألهٔ ۴ . مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sin\sqrt{x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 4$ بررسی کنید .

حل :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\sin\sqrt{x}-\sin 2}{x-4} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{2\sin\frac{\sqrt{x}-2}{2}.\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{x-4} =$$

$$x\to 4;\ \frac{\sqrt{x}-2}{2}\to 0 \Rightarrow \sin\frac{\sqrt{x}-2}{2}\sim\frac{\sqrt{x}-2}{2}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\frac{\sqrt{x}-2}{2}\right).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{\sqrt{x}+2} = \frac{\cos 2}{4} = f'(4)$$

بنابراین، تابع f در $x_0 = 4$ مشتق‌پذیر است .

مسألهٔ ۵ . مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \cos\sqrt{x^2+3x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید .

حل :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cos\sqrt{x^2+3x}-\cos 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-2\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}.\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{x-1}$$

$$x\to 1;\ \frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\to 0 \Rightarrow \sin\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\sim\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-2\left(\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\right).\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\left(x^2+3x-4\right)\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+4).\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x+4)\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{\sqrt{x^2+3x}+2}$$

$$=\frac{-5\sin2}{4}=f'(1)$$

پس این تابع در $x_0=1$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۶. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^2-2|$ را در نقطهٔ $x_0=\sqrt2$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to\sqrt2}\frac{f(x)-f(\sqrt2)}{x-\sqrt2}=\lim_{x\to\sqrt2}\frac{|x^2-2|-0}{x-\sqrt2}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt2}\frac{|x-\sqrt2|.|x+\sqrt2|}{x-\sqrt2}$$

الف) $$\lim_{x\to\sqrt2^+}\frac{|x-\sqrt2|.|x+\sqrt2|}{x-\sqrt2}=\lim_{x\to\sqrt2^+}\frac{(x-\sqrt2).(x+\sqrt2)}{x-\sqrt2}=\lim_{x\to\sqrt2^+}\left(x+\sqrt2\right)$$

$=2\sqrt2=f'_+\left(\sqrt2\right)$ (مشتق راست تابع f در $x_0=\sqrt2$)

ب) $$\lim_{x\to\sqrt2^-}\frac{|x-\sqrt2|.|x+\sqrt2|}{x-\sqrt2}=\lim_{x\to\sqrt2^-}\frac{-(x-\sqrt2).(x+\sqrt2)}{x-\sqrt2}=\lim_{x\to\sqrt2^-}-|x+\sqrt2|$$

$=-2\sqrt2=f'_-\left(\sqrt2\right)$ (مشتق چپ تابع f در $x_0=\sqrt2$)

پس این تابع در $x_0=\sqrt2$ مشتق‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۷. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)(x^2+1)}$ را در نقطهٔ $x_0=2$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)(x^2+2)}-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)}.\sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt[3]{(x-2)^3}}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}=\frac{\sqrt[3]{6}}{0^+}\to+\infty$$

این تابع در $x_0=2$ مشتق‌پذیر نیست و راستای خط مماس بر منحنی در این نقطه، موازی محور yهاست.

مسألهٔ ۸. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-2)}$ را در نقطهٔ $x_0=0$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2(x-2)}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{-2}}{0^\pm}\to\mp\infty$$

این تابع هم در $x_0=0$ مشتق‌پذیر نیست و راستای خط مماس بر منحنی در $x_0=0$ موازی مجور yهاست.

مسألهٔ ۹. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x.\cos\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ را در نقطهٔ $x_0=0$ بررسی کنید.

حل:

عددی نامعلوم در بازهٔ

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}=\cos(\pm\infty)=[-1,1]$$

پس این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

فرض کنید این شکل سه طبقهٔ یک ساختمان باشد.

طبقهٔ سوم	مشتق‌پذیری
طبقهٔ دوم	پیوستگی
طبقهٔ اول	حد

قضیهٔ ۱. اگر تابع f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در x_0 پیوسته است.

قضیهٔ ۲. اگر تابع f در x_0 پیوسته باشد، آن‌گاه f در x_0 حد دارد.

قضیهٔ ۳. اگر تابع f در x_0 حد نداشته باشد، آن‌گاه f در x_0 نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر. سه قضیه را با شکل بالا می‌توان بیان کرد.

مسألهٔ ۱۰. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^3+x, & x \ge 2 \\ ax^2+bx, & x<2 \end{cases}$ در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است. a و b را بیابید.

حل:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x, & x \ge 2 \\ ax^2+bx, & x<2 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1, & x \ge 2 \\ 2ax+b, & x<2 \end{cases}$$

چون تابع f در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است، پس $f'_-(2) = f'_+(2)$؛ بنابراین:

$$2a(2)+b = 3(2)^2+1 \Rightarrow 4a+b=13$$

چون تابع f در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است، پس f در $x_0 = 2$ پیوسته است و حد دارد؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a+2b=10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a+b=13 \\ 4a+2b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$$

معماهای فــکری و منطقی

C، J، M و S چهار نفرند که شغلشان قصاب، داروساز، بقّال و پلیس ـ گرچه نه لزوماً به همین ترتیب ـ است.

C و J همسایه‌اند و به نوبت همدیگر را با اتومبیل به سر کار می‌برند.

درآمد J بیش از M است.

C به طور منظم در بازی بولینگ از S می‌برد.

قصاب همیشه پیاده سر کار می‌رود.

پلیس نزدیک داروساز زندگی نمی‌کند.

تنها وقتی که بقّال و پلیس ملاقات کردند، وقتی بود که پلیس بقّال را به خاطر سرعت زیاد توقیف کرد.

درآمد پلیس از داروساز یا بقّال بیشتر است.

شغل هر یک چیست؟