خانوادهٔ مسأله

هر مسألهٔ ریاضی، با مسأله‌های دیگری هم‌خانواده است. گونه‌ای از این هم‌خانوادگی، منطقی است و گونه‌ای از آن، پیامد دگرگونیهایی است که در ساختار هندسی مسأله یا در بیان آن پدید آمده است. آشنایی با این هر دو گونه، می‌تواند به یافتن راه‌حلّ مسأله کمک کند، و مهمتر آن‌که، می‌تواند توانمندی، ورزیدگی و آمادگی ذهنی شما را در حلّ مسأله‌ها افزایش دهد و در این زمینه، اطمینان خاطر را در شما پدید آورد.

خانوادهٔ منطقی مسأله

مسأله‌های ریاضی و قضیه‌های ریاضی، دارای یک ساختار منطقی‌اند و غیر از این‌که قضیه‌ها را برای شما ثابت کرده‌اند و اثبات مسأله‌ها را به شما واگذار کرده‌اند، تفاوت دیگری با هم ندارند. همانند هر قضیه، هر مسأله نیز دارای فرض و حکم است و با جابه‌جا کردن فرض و حکم و یا با نفی یکی یا هر دوی آنها، می‌توان مسأله‌هایی را بیان کرد که خانوادهٔ منطقی آن مسأله را تشکیل می‌دهند و از بین آنها، ممکن است بعضی صحیح و بعضی غلط باشند.

در مسألهٔ داده شده، اگر P فرض و Q حکم باشد، مسأله به‌صورت «اگر P آن‌گاه Q» (یعنی اگر فرض درست باشد، حکم درست است) بیان می‌شود و مسأله‌های هم‌خانوادهٔ منطقی آن عبارت است از :

عکس مسأله: اگر Q آن‌گاه P (= اگر حکم درست باشد، فرض هم درست است) ؛

عکس نقیض مسأله: اگر $\sim Q$ آن‌گاه $\sim P$ (= اگر حکم نادرست باشد، فرض نیز نادرست است) ؛

متقابل مسأله: اگر $\sim P$ آن‌گاه $\sim Q$ (= اگر فرض نادرست باشد، حکم نیز نادرست است) ؛

خلاف مسأله: اگر P آن‌گاه $\sim Q$ یا اگر Q آن‌گاه $\sim P$ (= اگر فرض درست باشد، حکم نادرست است و عکس نقیض آن).

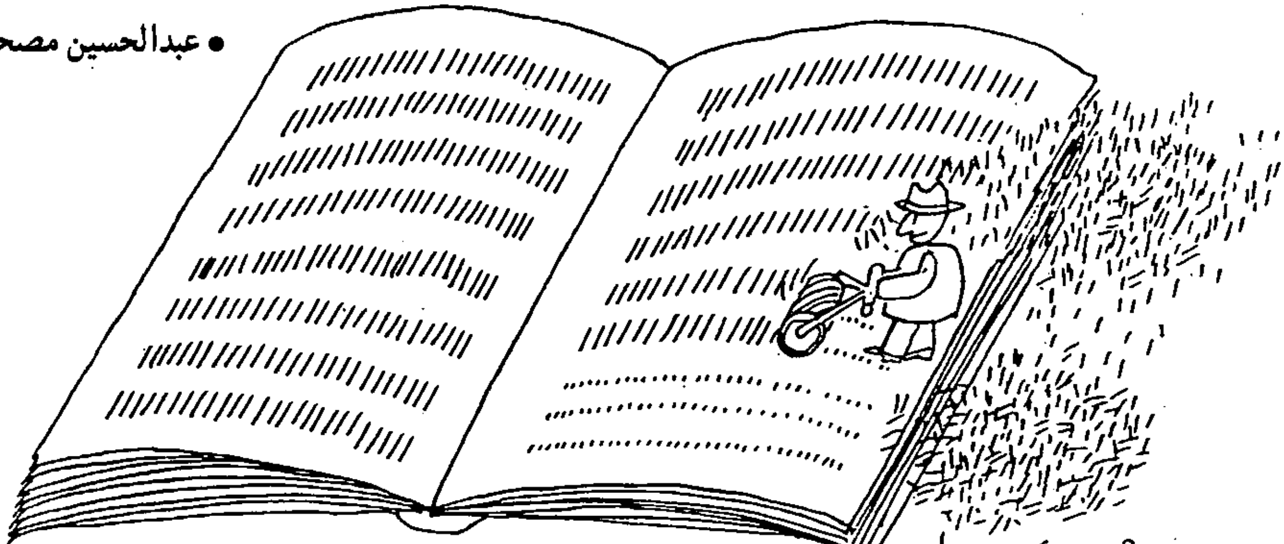
در قضیه‌ها و در مسأله‌های ریاضی، پذیرفته می‌شود که فرض درست است و بر پایهٔ درستی آن، باید ثابت شود که حکم نیز درست است. اگر چنین نباشد، یعنی از درستی فرض، نتیجه شود که حکم نادرست است، آن قضیه یا مسأله، نادرست خواهد بود.

با فرض این‌که مسألهٔ داده شده درست باشد ؛

۱) عکس مسأله ممکن است درست و ممکن است نادرست

مسئلهٔ حلّ مسئله‌های ریاضی (۳)

● عبدالحسین مصحفی



باشد. هرگاه عکس مسأله هم درست باشد، آن مسأله به‌صورت **«اگر و تنها اگر فرض آن‌گاه حکم»** بیان می‌شود و هر کدام از فرض و حکم را **شرط لازم و کافی** برای دیگری می‌نامند.

۲) عکس نقیض مسأله با خود مسأله هم‌ارز است ؛ یعنی هرکدام که درست باشد، دیگری نیز درست است و هر کدام که نادرست باشد، دیگری نیز نادرست است. از این‌رو، به‌جای اثبات خود مسأله، می‌توان عکس نقیض آن را ثابت کرد.

۳) متقابل مسأله، عکسِ نقیضِ عکس آن مسأله است ؛ یعنی عکس مسأله و متقابل مسأله هم‌ارزند و هر کدام که درست باشد، دیگری نیز درست است. از این‌رو، متقابل مسأله، آن‌گاه درست است که مسأله به‌صورت شرط لازم و کافی بیان شده باشد.

۴) خلاف مسأله، ناهم‌ارز مسأله است ؛ اگر با پذیرفتن درستی فرض مسأله، نتیجه شود که حکم مسأله نادرست است، خلاف مسألهَ ثابت شده و خود مسأله رد شده است. بعکس، اگر خلاف مسأله رد شود، خود مسأله ثابت شده است، که در **برهان خلف** چنین فرایندی به‌کار می‌رود.

مثال ۱: در مجموعهٔ عددهای صحیح، اگر دست‌کم یکی از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر باشد، حاصل‌ضرب ab نیز بر d بخش‌پذیر است. عکس این مسأله می‌شود : اگر حاصل‌ضرب دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر باشد، دست‌کم یکی از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر است، که در حالت کلی، مسأله‌ای نادرست است (در حالتهایی نادرست و در حالتهایی درست است) ؛ حاصل‌ضرب ab بر خودش بخش‌پذیر است ؛ اما a و b مگر در حالت ویژه، بر ab بخش‌پذیر نیستند. همچنین، ۱۲ که حاصل‌ضرب ۶ در ۲ است، بر ۴ بخش‌پذیر است ؛ درصورتی که ۶ و ۲ هیچ‌کدام بر ۴ بخش‌پذیر نیستند. اما $۲ \times ۶ = ۱۲$ که بر ۳ بخش‌پذیر است، عدد ۶ نیز بر ۳ بخش‌پذیر است.

عکس نقیض مسأله می‌شود : اگر حاصل‌ضرب دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر نباشد، هیچ‌کدام از دو عدد a و b بر d بخش‌پذیر نیست، که مسأله‌ای درست است.

متقابل مسأله می‌شود : اگر هیچ‌کدام از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر نباشد، حاصل‌ضرب ab نیز بر d بخش‌پذیر نیست، که در حالت کلی درست نیست. دو عدد ۲ و ۶ هیچ‌کدام بر ۴ بخش‌پذیر نیست ؛ اما حاصل‌ضرب آنها بر ۴ بخش‌پذیر است.

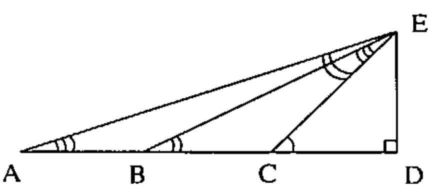
خلاف مسأله می‌شود : اگر دست‌کم یکی از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر باشد، حاصل‌ضرب ab بر d بخش‌پذیر نیست، که مسأله‌ای نادرست است. یا این‌که : اگر حاصل‌ضرب ab بر d بخش‌پذیر باشد، هیچ‌کدام از دو عدد a و b بر d بخش‌پذیر نیست، که در حالت کلی درست نیست.

یادداشت: عکس مسألهٔ مورد مثال، به‌صورت زیر بیان می‌شود و یکی از قضیه‌های بنیادی نظریهٔ اعداد است : اگر حاصل‌ضرب دو عدد a و b بر d بخش‌پذیر باشد و یکی از دو عدد a و b نسبت به d اوّل باشد، عدد دیگر بر d بخش‌پذیر است.

یادآوری: اگرچه به‌جای اثبات یک مسأله نمی‌توان عکس آن را ثابت کرد ؛ اما این بدان معنا نیست که به حکم مسأله توجه نشود. در بسیاری از مسأله‌ها، توجه به حکم و بررسی آن، راه‌حل مسأله را به‌دست می‌دهد.

مثال ۲: مطابق با شکل، زاویهٔ D قائمه است و پاره‌خطهای AB، BC، CD و DE با هم برابرند. ثابت کنید :

$$\angle ECD = \angle EBD + \angle EAD$$



از این‌که زاویهٔ ECD زاویهٔ خارجی مثلث EBC است، نتیجه می‌گیریم :

$$\angle ECD = \angle EBD + \angle BEC$$

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ حکم، درمی‌یابیم که باید ثابت کنیم دو زاویهٔ BEC و EAD با هم برابرند. اگر چنین باشد، دو مثلث EAC و EBC که در زاویهٔ ECB مشترکند، با هم متشابه خواهند بود. راهنمایی می‌شویم که باید تشابه این دو مثلث را ثابت کنیم. با توجه به حالتهای کلاسیک تشابه دو مثلث، درمی‌یابیم که باید ثابت کنیم ضلعهای زاویهٔ مشترک دو مثلث، نظیر به نظیر متناسبند و لازم می‌شود اندازه‌های این ضلعها را حساب کنیم. با فرض آن‌که اندازهٔ DE و اندازه‌های پاره‌خطهای برابر با آن a باشد، خواهیم داشت :

$$CE = a\sqrt{۲} \quad , \quad CA = ۲a \quad ,$$

$$\frac{CE}{BC} = \frac{a\sqrt{۲}}{a} = \sqrt{۲} \quad , \quad \frac{AC}{CE} = \frac{۲a}{a\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} \quad ,$$

$$\frac{CE}{BC}=\frac{AC}{CE}$$

دو مثلث ACE و BCE که در یک زاویه مشترکند و ضلعهای این زاویه، نظیر به نظیر متناسبند، با هم متشابهند و از تشابه آنها، برابری دو زاویهٔ BEC و EAC و سپس رابطهٔ حکم به‌دست می‌آید.

مثال ۳: ثابت کنید اگر حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای تهی باشد، دست‌کم یکی از دو مجموعهٔ A و B تهی است.

برای اثبات این مسأله، کافی است که مسألهٔ عکس نقیض آن را ثابت کنیم. «دست‌کم یکی از دو مجموعهٔ A و B تهی است» به این معناست که «یا A تهی است، یا B تهی است و یا A و B هر دو تهی‌اند» و نفی آن می‌شود «نه A تهی است و نه B». بنابراین، عکس نقیض مسأله می‌شود: «اگر هیچ کدام از دو مجموعهٔ A و B تهی نباشد، حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ A و B تهی نیست».

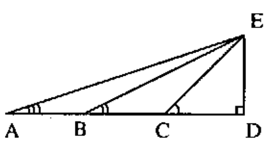
برای اثبات این مسأله هم می‌گوییم: چون A و B هیچ‌کدام تهی نیستند، دست‌کم یک عضو x متعلق به A و یک عضو y متعلق به B وجود دارد و بنا بر تعریف حاصل‌ضرب دو مجموعه، دوتایی مرتّب (x , y) عضو A×B است و این مجموعه تهی نیست. چون عکس نقیض مسأله ثابت شده، خود مسأله هم ثابت شده است.

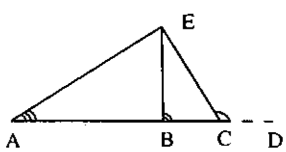
هم‌خانواده‌های غیرمنطقی مسأله

مسأله‌های ریاضی از یکدیگر پدید می‌آیند و هر مسأله را می‌توان با دگرگونیهایی در ساختار هندسی آن، به گونه‌ای دیگر بیان کرد. همهٔ این مسأله‌ها هم‌خانواده‌اند و اگر خویشاوندی آنها شناخته شود و راه‌حلّ یکی از آنها دانسته شده باشد، از روی آن، بسادگی می‌توان به راه‌حلّ مسأله‌ای دیگر از آنها پی برد. تعدادی از این مسأله‌ها، حالتهای ویژه‌ای از یک مسألهٔ حالت کلی‌اند و چنانچه این مسأله شناخته شود، می‌توان راه‌حلّ آن را روی آن مسأله‌های حالتهای ویژه تعمیم داد. اگر هنگامی که فراغت دارید، مسأله‌های گوناگونی را که با آنها سر و کار داشته‌اید، از این دیدگاه بررسی و آنها را ریشه‌یابی کنید و به پیوندهای موجود بین زنجیره‌هایی از مسأله‌ها پی ببرید، دیدی گسترده را روی مجموعهٔ مسأله‌ها برای خود پدید می‌آورید و در روبه‌رویی با هر مسأله، بسادگی و در کمترین زمان، خواهید توانست از عهدهٔ حلّ آن برآیید.

در اوّلین برخورد، ممکن است پیوند ساختاری بین مسأله‌ها به ذهن نرسد و پنهان بماند؛ اما با کمی ژرف‌نگری و دقت در ساختار آنها، به آن پیوند و راه‌حلّ مشترک آنها می‌توان پی برد.

مثال ۴: مسأله‌ای که در مثال ۲ بیان شد و این مسأله که «هر ضلع از مثلث قائم‌الزاویه، واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویر آن ضلع بر وتر»، در ظاهر امر، به نظر نمی‌رسد که هم‌خانواده باشند؛ درصورتی که اگر بیشتر دقت کنیم، می‌بینیم در یک ساختار مشترکند: در هر کدام از آنها، دو مثلث که یکی بخشی از دیگری است، با هم متشابهند (دو مثلث ECB و ECA) و در هر دوی آنها، زاویهٔ ECD برابر است با مجموع دو زاویهٔ EBC و EAB.



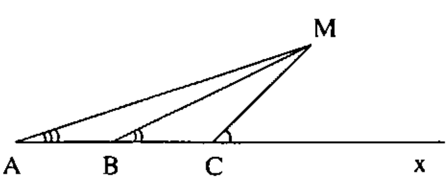


پی بردن به این وجه‌مشترک، ذهن را وامی‌دارد تا بررسی کند آیا مسأله‌ای با حالت کلی هست که این دو مسأله، حالتهای ویژهٔ آن باشند؟ اگر چنین باشد، وجه‌مشترک این مسأله‌ها باید ساختار اصلی مسألهٔ حالت کلی باشد؛ بنابراین، مسألهٔ زیر به میان می‌آید:

سه نقطهٔ A، B و C به همین ترتیب، روی نیم‌خط Ax جای دارند. اگر نقطهٔ M چنان باشد که:

$$\angle MCx = \angle MBx + \angle MAx$$

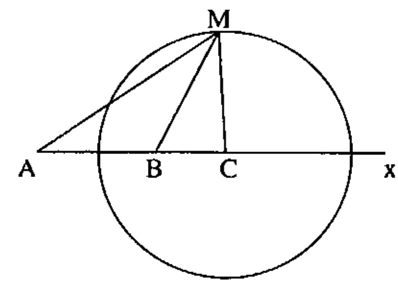
بین اندازه‌های پاره‌خطهای MC، CB و CA چه رابطه‌ای برقرار است؟



از این که زاویهٔ MCx زاویهٔ خارجی مثلث MCB است، برابری دو زاویهٔ BMC و BAM، و بنا بر آن تشابه دو مثلث MBC و MAC نتیجه می‌شود و خواهیم داشت:

$$\frac{MC}{AC}=\frac{BC}{MC}\Rightarrow \overline{MC}^{2} = AC.BC$$

پاره‌خط MC واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط AC و BC است. نقطه‌ها A، B و C که ثابت باشند، اندازه‌های AC، BC و MC نیز مقدارهای ثابتند و نقطهٔ M بر دایرهٔ به مرکز C و به شعاع $R = \sqrt{AC.BC}$ جای دارد.



بسادگی ثابت می‌شود که نظیر هر نقطهٔ M واقع بر این دایره، زاویهٔ MCx با مجموع دو زاویهٔ MBx و MAx برابر است. بنابراین، دایرهٔ به مرکز C و به شعاع R، مکان هندسی M است.

اکنون با درنظر گرفتن جاهای مختلف M روی دایره و بنابر چگونگی وضع سه نقطهٔ A، B و C، می‌توانیم مسأله‌هایی گوناگون را بیان کنیم که هر کدام حالت ویژه‌ای از این مسألهٔ حالت کلی است. همهٔ آنها هم‌خانواده‌اند و یک راه اثبات دارند.

هرگاه AB و BC برابر باشند و اندازهٔ آنها a فرض شود، اندازهٔ MC می‌شود $a\sqrt{2}$ و در این حالت، اگر M در جایی از دایره انتخاب شود که زاویهٔ MCx به اندازهٔ ۴۵ درجه باشد، عمود MH که بر Cx رسم شود، پاره‌خطهای MH و CH نیز برابر با a می‌شوند و مسألهٔ مثال ۲ را خواهیم داشت.

هرگاه M بر نقطهٔ برخورد دایرهٔ به قطر BC با دایرهٔ مکانش واقع باشد، MB بر AC عمود خواهد بود و مسألهٔ «هر ضلع مثلث قائم‌الزاویه واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویرش بر وتر» نموده خواهد شد.

هرگاه M در جایی از دایره قرار گیرد که MC بر AC عمود باشد، نتیجه خواهد شد که تفاضل دو زاویهٔ B و A از مثلث MAB برابر ۹۰ درجه و این مثلث به رأس M شبه قائمه است.

و مسأله‌های دیگری که هر کدام نظیر یک موضع M روی دایره است.

مسأله آفرینی

نظیر هر مسأله، اگر مسأله‌های هم‌خانواده‌اش را بیابید و مسألهٔ حالت کلی همهٔ آنها را به‌دست آورید، با بررسی حالتهای گوناگون این مسألهٔ کلی، چه‌بسا به مسأله‌هایی دست یابید که نه‌تنها برای خود شما، بلکه برای دیگران هم تازگی داشته باشند. دستیابی به راه‌حلّ ابتکاری و زیبای یک مسأله لذتبخش و شوق‌انگیز است. اما لذتبخش‌تر از آن، دستیابی به طرح و بیان مسأله‌هایی است که تازگی داشته باشند.

تمرین ۳:

۱ـ برای امتحان عمل‌ضرب عددها، روشی به‌کار می‌رود که آن را *طرح q به q* می‌نامند؛ اگر در عمل‌ضرب عدد a در عدد b، حاصل‌ضرب برابر با P به‌دست آمده باشد، باقیماندهٔ تقسیم a بر q برابر با r، باقیماندهٔ تقسیم b بر q برابر با s، باقیماندهٔ تقسیم rs بر q برابر با t و باقیماندهٔ تقسیم P بر q برابر با u باشد، چنانچه عمل ضرب صحیح انجام گرفته باشد، دو عدد t و u با هم برابر خواهند بود. در این فرایند، قضیه‌ای به‌کار می‌رود؛ فرض و حکم و قضیه‌های هم‌خانواده منطقی آن را نام ببرید و معلوم کنید کدام درست و کدام نادرستند؟

۲ـ هرگاه A زیرمجموعهٔ B، B زیرمجموعهٔ C و C زیرمجموعهٔ A باشد، ثابت کنید سه مجموعهٔ A، B و C با هم برابرند. فرض و حکم این مسأله و مسأله‌های هم‌خانوادهٔ منطقی آن را بیان و معلوم کنید کدامها درست و کدامها نادرستند، و سرانجام، مسأله را به‌صورت صحیح آن بیان کنید.

۳ـ ثابت کنید اگر دو عدد طبیعی a و b نسبت به هم اوّل باشند، دو عدد $s = a + b$ و $P = ab$ نیز نسبت به هم اوّلند. این مسأله را از راه اثبات نادرستی خلاف آن ثابت کنید.

۴ـ دایرهٔ مثال ۴ را چگونه باید رسم کرد؟ به عبارت دیگر، اگر سه نقطهٔ A، B و C به همین ترتیب، روی نیم‌خط Ax داده شده باشند و M نقطه‌ای باشد که زاویهٔ MCx با مجموع دو زاویهٔ MBx و MAx برابر باشد، دایرهٔ مکان M را باید چگونه رسم کرد؟ نقطهٔ B نسبت به دایرهٔ مکان M چه وضعی دارد؟

۵ ـ دو مسألهٔ زیر را درنظر بگیرید:

مسألهٔ الف: «مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. نقطهٔ P را روی ضلع AB یا در امتداد آن، و نقطهٔ Q را روی ضلع AC یا در امتداد آن، چنان به‌دست می‌آوریم که دو پاره‌خط AP و AQ با دو ضلع AB و AC، یا هر دو هم‌جهت یا هر دو ناهم‌جهت باشند و تناسب:

$$\frac{AP}{AC}=\frac{AQ}{AB}$$

برقرار باشد. ثابت کنید: ارتفاع نظیر رأس A در هر یک از دو مثلث APQ و ABC میانهٔ نظیر همان رأس در مثلث دیگر است.»

مسألهٔ ب: «در هر چهارضلعی محاطی، اگر دو قطر بر هم عمود باشند، خطی که از نقطهٔ برخورد دو قطر بر یک ضلع عمود شود، ضلع روبه‌رو به آن را نصف می‌کند و اگر دو ضلع بر هم عمود باشند، خطی که از نقطهٔ برخورد آنها بر یک ضلع روبه‌رو عمود شود، ضلع روبه‌روی دیگر را نصف می‌کند.»

آیا دو مسألهٔ بالا هم‌خانواده‌اند؟ کدام‌یک از آنها حالت کلّی‌تر را بیان می‌کند؟

پاسخهای مسأله‌های تمرین ۲:

۱ـ یک راه‌حلّ مسأله، تجزیهٔ سه‌جمله‌ایهاست که می‌شوند:

$$\begin{cases}(a-2b)(3a-b)=8\\(a-2b)(a+4ab)=7\end{cases}$$

عامل $a-2b$ نمی‌تواند صفر باشد و از تقسیم دو برابری بر هم رابطهٔ $a=3b$ به‌دست می‌آید.

۲ـ مقدارهای داده شده برای x و y پس از ساده شدن می‌شوند:

$$x=2-\sqrt{3}\ ,\ y=2+\sqrt{3}$$

عبارت جبری $f(x,y)$ چون نسبت به x و y متقارن است، با عوض کردن x و y با هم فرق نمی‌کند و چون نسبت به x و y همگن است، همهٔ جمله‌های آن نسبت به x و y همدرجه‌اند؛ بنابراین:

$$f(x,y)=ax^2+bxy+ay^2$$

$$x=y\Rightarrow x^2(a+b+a)=0\Rightarrow b=-2a$$

$$x=2-\sqrt{3}\ ,\ y=2+\sqrt{3}\Rightarrow 14a+b=24$$

$$\begin{cases}b=-2a\\14a+b=24\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}a=2\\b=-4\end{vmatrix}$$

۳ـ داریم:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}$$

$$\left[(x+y+z)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$

$$=\frac{1}{3}(a^2+k^2)\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq\frac{a^2}{3}$$

۴ـ دو طرف را تفضیل در صورت و ترکیب در مخرج می‌کنیم و پس از آن، به توان ۲ می‌رسانیم، که خواهیم داشت:

$$\frac{1-tgx}{1+tgx}=\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y}}$$

$$\frac{tg^2x-2tgx+1}{tg^2x+2tgx+1}=\frac{1+y}{1-y}$$

باز در صورت تفضیل و در مخرج ترکیب می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$y=\frac{2tgx}{1+tg^2x}=\sin 2x$$

۵ـ عدد را N، رقم سمت راست آن را x و عدد بدون رقم x را y می‌گیریم:

$$N=10y+x\ ,\ N'=10^nx+y$$

$$10^nx+y=\frac{3}{2}(10y+x)\Rightarrow 28y=(2\times10^n-3)x$$

طرف اوّل مضرب ۴ و مضرب ۷، و عدد داخل پرانتز فرد است؛ پس x مضرب ۴ و کوچکترین مقدارش ۴ است و

$$7y=2\times10^n-3$$

طرف دوم مضرب ۷ است؛ پس کوچکترین مقدار n برابر ۵ و در نتیجه:

$$y=28571\ ,\ N=285714$$

۶ـ برآیند سه تبدیل، دَوَران به مرکز A و به زاویهٔ 60° خواهد شد.