مربع لاتین $n \times n$ و کاربردهای آن

۱,۲,۳,...,n

● سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی ناحیه یک اراک

مربع لاتین

مربع لاتین عبارت است از ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های ۱،۲،۳،...،n ، به طوری که در هیچ سطر و ستونی، درایه‌ها تکراری نباشند؛ مثل:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

آزمون۱ . در یک جدول ۴×۴ ، عددهای ۱ تا ۴ به‌صورتی نوشته شده‌اند که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری وجود ندارد . عددهای نوشته شده در چهار تا از خانه‌های این جدول را، مطابق شکل زیر می‌دانیم . عدد موجود در خانه‌ای که با * مشخص شده است، چه می‌تواند باشد؟

۱			
	۲		۳
		*	
			۲

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۳ د) ۲ هـ) نامعلوم.

پاسخ : درایه مورد نیاز در مرحله‌ی iام را با a_i نام‌گذاری می‌کنیم .

۱	a_3	a_4	a_1
	۲		۳
	a_5	*	a_2
			۲

a_1 : عددی به‌جز ۱ ، ۳ و ۲ باید باشد، لذا ۴ است .
a_2 : عددی به جز ۴ ، ۳ و ۲ باید باشد، لذا ۱ است .
a_3 : عددی به‌جز ۱ ، ۴ و ۲ باید باشد، لذا ۳ است .
a_4 : عددی به‌جز ۱ ، ۳ و ۴ باید باشد، لذا ۲ است .
a_5 : عددی به‌جز ۳ ، ۲ و ۱ باید باشد، لذا ۴ است .

و نهایتاً، * عددی به‌جز ۲ ، ۱ و ۴ باید باشد، لذا ۳ است . پس باید گزینه‌ی ج علامت زده شود .

آزمون۲ . در خانه‌های خالی مربع زیر به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۳ را قرار داد، به طوری که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نباشد؟

	۳	

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ هـ) ۱۲

پاسخ: برای a_1 دو حالت وجود دارد: ۱ یا ۲. در هر حالت، ستون دوم پر می‌شود. و حالا برای a_2 هم دو حالت وجود دارد: ۱ یا ۲. با قرار دادن عدد در خانه‌ی a_2، ستون‌های اول و سوم به‌طور یکتا پر می‌شوند. پس تعداد حالات ۴=۲×۲، و گزینه‌ی درست «ب» است.

	a_1	
a_2	۳	

جواب‌ها عبارت‌اند از:

۱)

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۲)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۴)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

آزمون۳. به چند طریق می‌توان جدول نیمه‌پر زیر را با اعداد ۱ تا ۴ طوری پر کرد که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداشته باشیم؟

۱	۲		
	۱	۲	
		۱	

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) !۴

پاسخ: دو خانه‌ی خالی سطر اول را به صورت «۴-۳» یا «۳-۴» می‌توان پر کرد. اگر این دو درایه را از چپ به راست به‌ترتیب با سه و چهار پر کنیم، به ترتیب درایه‌های چهارمِ سطر دوم، اولِ سطر دوم، چهارمِ سطر سوم، اولِ سطر سوم، دوم سطرِ سوم، و درنهایت درایه‌های سطر چهارم به صورت یکتا تعیین می‌شوند. بنابراین، برای هریک از دو روش پر کردن سطر اول، یک حالت برای پر کردن بقیه‌ی جدول وجود دارد. پس جواب ۲=۱×۲، و گزینه‌ی درست ج است. جواب‌ها عبارت‌اند از:

۱)

۱	۲	۴	۳
۳	۱	۲	۴
۴	۳	۱	۲
۲	۴	۳	۱

۲)

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

دو مربع لاتین متعامد

دو مربع لاتین $n \times n$، $L_1 = [a_{ij}]$ و $L_2 = [b_{ij}]$ را متعامد گوییم، هرگاه درایه‌های ماتریس $[(a_{ij}, b_{ij})]$ که از زوج‌های مرتب تشکیل شده‌اند، تکراری نباشند. مثلاً دو مربع لاتین ۳×۳ زیر متعامد هستند.

$L_1 =$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$L_2 =$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$\Rightarrow$

(۱,۱)	(۲,۲)	(۳,۳)
(۲,۳)	(۳,۱)	(۱,۲)
(۳,۲)	(۱,۳)	(۲,۱)

مربع‌های لاتین متعامد، علاوه بر جذابیت ریاضی، کاربردهای فراوانی در طرح‌های آزمایشی، کشاورزی، داروسازی، رمزنگاری و نظریه‌ی کدگذاری دارند که در ادامه، دو نوع از این کاربردها را ارائه خواهیم کرد.

کاربرد مربع لاتین

کاربرد ۱. مربع‌های لاتین در طرح آزمایش‌ها کاربرد دارند. مثلاً، آزمایشی از کارایی ماشین‌های گوناگون نخ‌ریسی در یک کارخانه را می‌توان با استفاده از دو مربع لاتین متعامد به صورت زیر انجام داد. فرض کنید، پنج ماشین نخ‌ریسی با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ توسط پنج کارگر به نام‌های اکبر، بابک، جواد، داود و هرمز در پنج روز اول هفته به کار گرفته می‌شوند و می‌خواهیم کارآیی این ماشین‌ها را روی پنج نوع متفاوت از الیاف A، B، C، D و E آزمایش کنیم.

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
اکبر	۱A	۲B	۳C	۴D	۵E
بابک	۲D	۴C	۵A	۳E	۱B
جواد	۳B	۵D	۲E	۱C	۴A
داود	۴E	۳A	۱D	۵B	۲C
هرمز	۵C	۱E	۴B	۲A	۳D

هر کارگر، هر روز با یکی از پنج ماشین کار می‌کند و یکی از پنج نوع از الیاف را می‌آزماید. هدف این است که بعد از روز پنجم، هر کارگر با هر پنج ماشین و با هر پنج نوع از الیاف کار کرده باشد. این جدول که از دو مربع لاتین متعامد ۵×۵ گرفته شده است، این مسأله را حل می‌کند. با توجه به جدول فوق، مثلاً بابک روز سه‌شنبه با ماشین شماره‌ی ۳ الیاف نوع E را به کار می‌گیرد. بدین ترتیب می‌توانیم کارایی هر نوع ماشین را با هر نوع از الیاف آزمایش کنیم و نظر کارگران را هم دخالت دهیم.

کاربرد ۲. به ازای هر n داده شده می‌توان یک مربع لاتین از مرتبه‌ی n ساخت. از مربع‌هایی که در زیر به ازای n = ۴ و n = ۵ ساخته شده‌اند، می‌توان به راحتی برای حالت کلی نیز ایده گرفت.

۱	۲		
۲			
			۳

۱	۲			
۲				
				۳
			۳	۴

دقت کنید که در هر دو مربع فوق، بعضی از درایه‌های گوشه‌ای نوشته شده‌اند. در مربع اول چهار تا و در دیگری شش تا از درایه‌ها نوشته شده‌اند. جالب این است که اگر در هریک از این دو مربع، فقط این درایه‌ها را به ما بدهند، می‌توانیم بقیه‌ی درایه‌ها را به طور یکتا به دست آوریم. مثلاً دو مربع زیر کامل شده‌ی مربع‌های بالا هستند.

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

تعداد درایه‌های داده شده در حالت کلی $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ است (منظور از نماد [ ] جزء صحیح است). حال فرض کنید، درایه‌های یک مربع لاتین اطلاعاتی است که شما می‌خواهید به شخص مورد اعتماد خود بدهید. یک مربع $n \times n$ از n^2 اطلاعات تشکیل می‌شود. طبق الگوی فوق، فقط کافی است که حدود $\frac{1}{4}$ از اطلاعات را منتقل کنید. شخص مورد اعتماد می‌تواند بقیه را به طور یکتا پیدا کند.

سودوکو

«سودوکو»[1] واژه‌ای ژاپنی به معنای عددهای بی‌تکرار است و به جدول اعدادی گفته می‌شود که امروزه یکی از سرگرمی‌های رایج در کشورهای گوناگون جهان به شمار می‌آید.

نخستین جدول سودوکو را یک ریاضی‌دان اروپایی در قرن هجدهم طراحی کرد. سودوکو انواع گوناگون ساده، متوسط، دشوار و خیلی دشوار دارد. سودوکوهای بسیاری هم برای کودکان طراحی می‌شوند. کتاب‌های گوناگون و متنوعی نیز برای آموزش طراحی و حل این نوع جدول منتشر شده‌اند. این جدول هم‌اکنون در بسیاری از روزنامه‌های معتبر دنیا هر روزه به چاپ می‌رسد و کتاب‌های مجموعه‌ی این جدول‌ها نیز توسط بخش انتشارات هر روزنامه منتشر می‌شود. این بازی که در «نمایشگاه بین‌المللی بازی و سرگرمی آلمان» به عنوان محبوب‌ترین و پرطرفدارترین بازی شناخته شده است، قانون بسیار ساده و روشنی دارد.

نوع متداول سودوکو در واقع نوعی جدول است که ۹ ستون عمودی و ۹ ستون افقی دارد، و البته کل جدول هم به ۹ ستون کوچک‌تر تقسیم می‌شود. شما باید اعداد ۱ تا ۹ را در هریک از جدول‌های کوچک‌تر بدون تکرار بنویسید؛ به صورتی که در هر ستون بزرگ‌تر افقی یا عمودی هیچ عددی تکرار نشود. در واقع، هم باید از تمام اعداد ۱ تا ۹ در همه‌ی ستون‌های عمودی و افقی استفاده کنید و هم باید هیچ عددی تکرار نشود و در همه‌ی مربع‌های ۳ ستونی کوچک‌تر نیز به همین ترتیب همه‌ی اعداد ۱ تا ۹ بیایند و تکرار هم نشوند. همیشه به عنوان راهنمایی چند عدد در جدول از قبل مشخص می‌شوند تا بقیه‌ی اعداد را شما پیدا کنید.

سودوکو واژه‌ای ژاپنی است، اما ریشه‌ی این بازی را باید در آمریکای شمالی جست‌وجو کرد. نخستین نمونه‌های شناخته‌شده‌ی این بازی در سال ۱۹۷۹ در مجله‌ی «بازی‌های حروف و معماهای با مداد دل»[2] به چاپ رسید. طراح این جدول‌ها ناشناس است، اما ویل شورتز، دبیر جدول روزنامه‌ی «نیویورک تایمز» توانسته است، در روندی منطقی که بی‌شباهت به حل سودوکو نیست، حدس بزند این ناشناس که بوده است. شورتز فهرست همکاران شماره‌های گوناگون مجله‌ی دل را بررسی کرد و توانست تنها یک نام مشترک را در شماره‌های حاوی سودوکو پیدا کند، نامی که در شماره‌های دیگر تکرار نشده بود: هوارد گارنز، معمار، اهل ایندیاناپلیس، متوفی به سال ۱۹۸۹. مسئولان فعلی در مجله‌ی معماهای دل گفته‌اند، در آرشیو مطالب مجله سندی وجود ندارد که گارنز را طراح این جدول‌ها معرفی کند، اما آن‌ها نتیجه‌گیری روزنامه‌نگار نیویورک تایمز را رد نکرده‌اند.

ادامه‌ی داستان آسان‌تر است. مجله‌ی دل به چاپ این معماها ادامه داد و در سال ۱۹۸۴، مجله‌ی ژاپنی «نیکولی» جدول‌هایی با همان ساختار را به چاپ رساند. نیکولی این جدول را «سوجی و ادکوشین نی کاگیرو» نام نهاد که چیزی جز برگردان ژاپنی «اعداد باید یکتا باشند» نیست. خیلی زود مردم این اسم طولانی را خلاصه کردند و آن را سودوکو نام نهادند؛ یعنی اعداد یکتا. نشریه‌ی نیکولی این نام را به ثبت رساند و جدول هم به این نام مشهور شد. جالب این جاست که هنوز بسیاری از ژاپنی‌ها این جدول را با نام انگلیسی آن می‌شناسند: «نامبر پلیس» یا «جاگذاری اعداد». در حالی که انگلیسی‌ها واژه‌ی ژاپنی سودوکو را ترجیح می‌دهند.

اتفاق مهم بعدی در نیمکره‌ی جنوبی زمین روی داد. واین گولد، شهروند نیوزیلندی که پیش از تغییر حاکمیت هنگ‌کنگ در این منطقه به قضاوت مشغول بود، در سفری به ژاپن با سودوکو آشنا شد و برنامه‌ای رایانه‌ای برای طراحی این جدول‌ها نوشت. او مسئولان روزنامه‌ی تایمز لندن را به چاپ این جدول‌ها تشویق کرد و درنهایت، توانست اولین جدولش را در نوامبر ۲۰۰۴ به چاپ برساند. تأثیر این جدول در انگلستان بسیار سریع و شدید بود! دیگر روزنامه‌های لندن به صف چاپ‌کنندگان سودوکو پیوستند و خیلی زود رقابتی شدید آغاز شد؛ به‌طوری که روزنامه‌ی «دیلی تلگراف»، سودوکو را در صفحه‌ی اول به چاپ رساند. همه تلاش می‌کردند، بهترین سودوکو را طراحی کنند.

برنامه‌های رایانه‌ای بسیاری برای طراحی سودوکو نوشته شدند و کار به جایی رسید که در جولای ۲۰۰۵، تورنومنت سودوکو برگزار شد و رسانه‌های تصویری انگلستان آن را به شکل گسترده‌ای تحت پوشش قرار دادند. در پایان تورنومنت، سودوکوی بزرگی به ضلع ۹۲ متر در تپه‌ای سبز در نزدیکی شهر بریستول حجاری شد. ولی خیلی زود مشخص شد، لقب بزرگ‌ترین سودوکوی جهان به اندازه‌ی خود جدول تأثیرگذار نیست.

در بهار سال ۲۰۰۵، سودوکو به آمریکا رفت و مردم هم از این معمای جدید استقبال کردند. شدت استقبال به قدری زیاد بود که تولید محصولات خانگی کاهش یافت. مردم به جای کار به حل سودوکو روی آورده بودند! با این حال، هم‌زبانان بریتانیایی آن‌ها اشتیاق بیشتری نشان دادند.

قوانین راهنما: اگر شما هم مداد به‌دست بگیرید و چند جدول سودوکو را حل کنید، به سرعت می‌توانید قوانین و روش‌های مفیدی را کشف کنید. ابتدایی‌ترین راهبرد حل این معماها این است که هر خانه را بررسی کنید و تمام اعدادی را که می‌توانند در آن قرار بگیرند، فهرست کنید. برای این کار هم کافی است بررسی کنید، کدامین عدد است که با سطر و ستون متناظر خود مغایرتی ندارد. اگر خانه‌ای را پیدا کردید که فقط می‌توانست یک عدد داشته باشد، می‌توانید عدد مذکور را در آن خانه بنویسید.

روش کامل‌تر این است که تمام خانه‌های یک ردیف، ستون یا واحد (مربع‌های کوچک ۳×۳) را بررسی کنید. معمولاً در هر ردیف یا ستون چند خانه از قبل پر شده‌اند. تمام عددهایی را که می‌توانند در هر خانه قرار بگیرند، فهرست کنید و خانه‌ای را که تنها یک گزینه‌ی ممکن دارد، پر کنید. با پر کردن هر خانه، عدد متناظر از دیگر فهرست‌ها حذف می‌شود و حل به همین ترتیب ادامه می‌یابد. بسیاری از سودوکوها را می‌توان با تکرار همین دو روش ساده حل کرد.

کیپرا، ریاضی‌دان اهل مینسوتا توضیح می‌دهد، قوانین سودوکو رده‌بندی‌های متفاوتی دارند که روز به روز هم پیچیده‌تر می‌شوند. قوانین سطح اول آن‌هایی هستند که یک خانه را به یک عدد یا یک عدد را به یک خانه محدود می‌کنند. در سطح دوم قوانینی هستند که به دو خانه‌ی درون یک سطر، ستون یا واحد اعمال می‌شوند؛ بدین شکل که این دو خانه نمی‌توانند با بیش از دو حالت پر شوند. درنتیجه این دو حالت از دیگر خانه‌های سطر، ستون یا واحد متناظر حذف می‌شوند. قوانین سطح سوم بر سه خانه اعمال می‌شوند و عددهای متناظر را در سایر خانه‌ها حذف می‌کنند. به همین شکل می‌توان قوانین را تا سطح نهم که در مورد ۹ خانه‌ی تشکیل دهنده‌ی یک سطر، ستون یا واحد اظهارنظر می‌کنند، تعمیم داد.

تمرین. اعداد ۱ تا ۹ را در هریک از سطرها، ستون‌ها و مربع‌های کوچک ۳ در ۳ طوری قرار دهید که فقط یک بار تکرار شوند.

۶	۷		۴					
	۳				۲		۵	
			۳		۵			۴
۴		۷		۶		۵	۹	۳
		۸	۹		۴	۱	۷	
۹					۱			
			۵				۱	۷
				۴	۶			۲
	۴				۷	۸		

جدول ۱

		۳	۹				۱	
		۲		۶	۴	۳		۵
					۲			۷
	۴	۵			۸			
	۷				۶			۲
			۱			۴		
۴	۵				۷			۶
	۳			۴				
			۶	۳				۱

جدول ۲

۴	۱			۵	۹	۳		
					۱	۲		
۸	۲					۹		
		۸		۲	۴		۹	
		۱			۵			۳
۶	۹			۱	۷			۲
۵						۴	۷	
			۹	۴		۵	۲	
								۶

جدول ۳

پاسخ تمرین را در ص ۳۰ مجله ملاحظه نمایید.

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

ابعاد مستطیل

مسئله: اضلاع یک مستطیل اعدادی صحیح هستند. اگر بدانیم عددی که نماینده‌ی محیط مستطیل است، با عدد نماینده‌ی مساحت آن برابر است. ابعاد مستطیل را پیدا کنید.

حل: اگر ابعاد مستطیل را x و y فرض کنیم، این معادله را خواهیم داشت:

$$۲x + ۲y = x.y$$

و از آن جا:

$$x = \frac{۲y}{y - ۲}$$

برای این‌که x و y اعدادی مثبت باشند، باید عدد $y-۲$ هم مثبت، یعنی y بزرگ‌تر از ۲ باشد.

حالا معادله را چنین می‌نویسیم:

$$x = \frac{۲y}{y - ۲} = \frac{۲(y - ۲) + ۴}{y - ۲} = ۲ + \frac{۴}{y - ۲}$$

برای این‌که x عددی صحیح مثبت باشد، باید $\frac{۴}{y-۲}$ هم عددی صحیح مثبت باشد و به ازای $y > ۲$ وقتی این شرط برقرار است که y یکی از اعداد ۳، ۴ یا ۶ باشد و در این صورت مقادیر متناظر x مساوی ۶، ۴ و ۳ می‌شود. به این ترتیب شکل مجهول، مستطیلی خواهد بود به ابعاد ۳ و ۶ و یا مربعی به ضلع ۴.