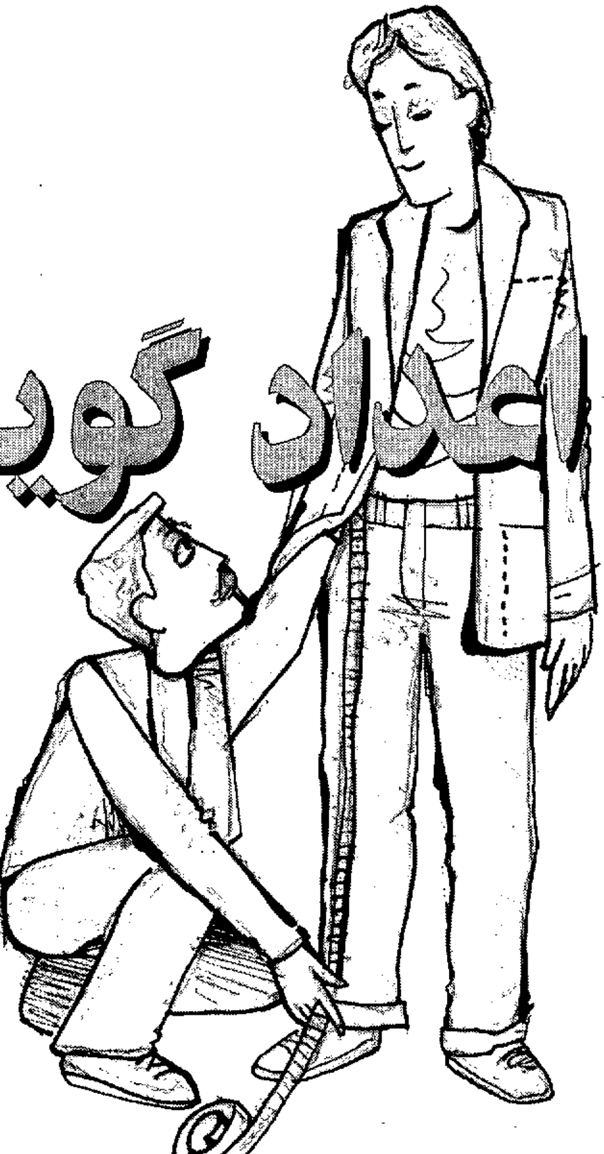
> «چون به مشکلات و نیازمندی‌های مردم درموردِ علم حساب نگریستم، دریافتم که تمام آن مشکلات در عدد خلاصه شده‌است.»
>
> محمدبن موسی خوارزمی



مجموعهٔ اعداد گویا

برای دانش‌آموزان سال اول

یادآوری: با کسرهایی به‌صورت $\frac{۵}{۳}$ و $\frac{-۴}{۷}$ و نظایر آن‌ها آشنا هستید. به‌طور کلی هر عددی به‌صورت $\frac{m}{n}$ را که در آن m و n اعدادی صحیح باشند و $n \neq ۰$، آن را یک کسر می‌نامیم. هر عددی را که بتوان به شکل یک کسر نوشت، یک عدد گویاست.

ممکن است این سؤال برای شما پیش بیاید که، مگر اعدادی هم هستند که نتوان آن را به‌صورت یک کسر نوشت؟ می‌توان ثابت کرد که مثلاً $\sqrt{۳}$ را نمی‌توان به‌صورت یک کسر نوشت؛ یعنی کسری مساوی $\sqrt{۳}$ وجودندارد. بعداً در این مورد بیش‌تر صحبت خواهیم کرد.

تاریخچه

نیاز بشر اولیه به سنجش و شمارش دارایی‌های خود، به‌طور طبیعی سبب پیدایش نخستین مجموعهٔ عددی، یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی شده‌است. می‌دانیم حاصل جمع دو عدد طبیعی، یک عدد طبیعی است؛ یعنی اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع بسته‌اند. تا زمانی که دو عدد را با هم جمع می کردند و حاصل یک عدد طبیعی بود، مشکلی پیش نمی‌آمد؛ ولی وقتی این سؤال مطرح شد که برای مثال عدد ۳ را با چه عددی جمع کنیم تا ۷ حاصل شود، درواقع به‌معادلهٔ زیر برخوردند:

$$۳+\square=۷$$

پیش‌آمدن چنین مشکلات و معادلاتی، معکوس(قرینه) عمل جمع را در ذهن مردم باستان به وجود آورد که ما امروزه آن را تفریق می‌نامیم. درواقع، عمل تفریق دوعدد طبیعی به‌صورت زیر، به‌وسیلهٔ جمع تعریف می‌شود:

$$a-b=\square \Leftrightarrow b+\square=a$$

اما عمل تفریق به‌مفهوم امروزی، در این مجموعه بسته نبود. این موضوع و این که در طبیعت و پیرامون زندگی مردم آن‌زمان، پدیده‌های متقابل و متضاد مانند گرمی در مقابل سردی، سفیدی در مقابل سیاهی، حرکت در مقابل سکون، رفت در مقابل بازگشت و... مشاهده می‌شد، تصور پیدایش و وجود اعداد منفی را در اذهان مطرح می‌کرد. بالاخره با پیدایش اعداد منفی(قرینه‌های اعداد طبیعی) و بعدها با اضافه شدن صفر به این مجموعه، مجموعهٔ اعداد صحیح $Z=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$ کامل شد، که در این مجموعه، اعمال جمع و تفریق به‌راحتی انجام می‌گرفت.

لزوم صرفه‌جویی در کار و وقت، سبب شد که عمل ضرب به‌عنوان تعمیم عمل جمعْ مطرح شود؛ به این صورت:

$$a+a+\cdots+a=n.a \quad a\in Z, n\in N$$

عمل ضرب در Z به‌راحتی انجام می‌گرفت؛ ولی وقتی به معکوسش فکر می‌کردند یا با معادلاتی به شکل:

$$۳\times\square=۲$$

برخورد می‌کردند، دیگر Z کفاف این محاسبات را نمی‌کرد. به‌عبارت دیگر، چنین معادله‌ای در این مجموعه، دارای جواب نبود. مانند عمل تفریق، عمل تقسیم نیز به‌عنوان معکوس عمل ضرب، به‌صورت زیر تعریف شد:

$$\frac{a}{b}=\square \Leftrightarrow \square\times b=a$$

اما عمل تقسیم در Z بسته نبود. این موضوع و ظاهر شدن معادلاتی به شکل:

$۳\times\square=۱$ که مجهول آن به‌صورت $\square=\frac{۱}{۳}$ است، و همچنین لزوم تقسیم دارایی‌ها و املاک به نسبت و سهم معین(تقسیم ارث)، سبب شد تا اعداد گویا از روی اعداد صحیح، به شکل زیر تعریف شود:

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in Z, n\neq ۰\right\}$$

تعریف مجموعهٔ اعداد گویا

Q حرف اول کلمهٔ Quotient به معنای خارج قسمت است.

هر عدد صحیح، یک عدد گویاست؛ یعنی $Z\subset Q$ (چرا؟)

پس تا به‌حال یادگرفتیم: $N\subset Z\subset Q$.

◇ **فعالیت ۱**

الف. اگر صورت کسر مثبتی را در عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

ب. اگر مخرج کسر مثبتی را در عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

پ. اگر صورت کسر منفی را در عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

ت. اگر مخرج کسر منفی را بر عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

ث. اگر صورت کسر را در عدد صفر ضرب کنیم، حاصل کسر چه می‌شود؟

ج. اگر صورت و مخرج کسر را در عدد ثابتی غیرصفر کنیم، کسر چه تغییری می‌کند؟

تمرین: فعالیت بالا را درصورتی که عددی که ضرب می‌شود، بین صفر و یک، صفر و ۱- و کوچک‌تر از ۱- باشد، انجام دهید. اگر عمل ضرب به تقسیم تبدیل شود، چه‌طور؟ نتیجهٔ فعالیت را در حالتی کلی بیان کنید.

دو عدد گویای مساوی

صورت و مخرج یک کسر را می‌توان در عددی غیرصفر ضرب یا تقسیم کرد؛ یعنی هر عدد گویا دارای بی‌شمار نماد است.

◇ **فعالیت ۲**

الف. چند کسر مثبت را که صورت آن‌ها عدد ثابتی است، درنظر بگیرید، کدام کسر بزرگ‌تر است؟ کدام کسر کوچک‌تر است؟

ب. چند کسر مثبت را که مخرج آن‌ها عدد ثابتی است، درنظر بگیرید، کدام کسر بزرگ‌تر و کدام کسر کوچک‌تر است؟

تمرین: فعالیت بالا را درصورتی که کسر منفی باشد، انجام دهید و نتیجه این فعالیت را در حالت کلی بیان کنید.

◇ **فعالیت ۳**

الف. کسری مثال بزنید و ب.م.م بین صورت و مخرج آن کسر را بیابید.

ب. صورت و مخرج کسر را بر ب.م.م تقسیم کنید.

پ. آیا ب.م.م کسر به‌دست آمده، برابر یک است؟

ت. چند کسر دیگر مثال بزنید و این فعالیت را درمورد آن

انجام دهید. نتیجهٔ فعالیت را بیان کنید.

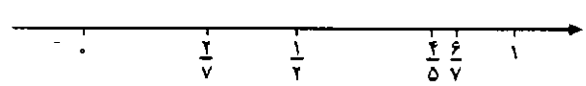
اعداد گویای تحویل ناپذیر

هر کسر را می‌توان به صورت کسری که دیگر ساده نشود، تبدیل کرد، که آن کسر را تحویل ناپذیر گویند. به عبارت دیگر، هرگاه ب.م.م صورت و مخرج برابر یک شد، کسر را تحویل ناپذیر نامند.

◇ فعالیت ۴

رضا: با مسأله‌ای مواجه شده‌ام و آن این است که، می‌خواهیم کسرهای $\frac{۲}{۷}$، $\frac{۴}{۵}$، $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۱}{۲}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. محمد چه راهی به نظرت می‌رسد؟

محمد: به‌نظر من به‌طور تقریبی می‌توان محل هریک از کسرها را روی محور اعداد نمایش داد. همهٔ کسرها از یک کوچک‌ترند؛ چون صورت آن‌ها از مخرج‌هایشان کوچک‌تر است.



رضا: به نظر تو اگر تعداد اعداد گویا زیاد بود، این روش، جالب است؟

محمد: راستش می‌خواستم بگویم اعداد $\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۶}{۷}$ تقریباً به هم نزدیک‌اند و برای تقسیم یک پاره‌خط به قطعات مساوی، باید خیلی دقت کرد. اگر اعداد ما خیلی به هم نزدیک باشند، ممکن است در مشاهده خطا داشته باشیم یا این که خط‌کش ما دقیق نباشد تا بتوانیم موقعیت دقیق دو کسر را روی محور مشخص کنیم. رضا راه دیگری به فکرت می‌رسد؟

رضا: به نظر من اگر بتوان مخرج کسرها را با هم مساوی کرد و بعد مقایسه را انجام داد، کار ساده‌تر می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱}{۲}=\frac{۱\times ۳۵}{۲\times ۳۵}=\frac{۳۵}{۷۰},\quad \frac{۶}{۷}=\frac{۶\times ۱۰}{۷\times ۱۰}=\frac{۶۰}{۷۰}\\ \frac{۴}{۵}=\frac{۴\times ۱۴}{۵\times ۱۴}=\frac{۵۶}{۷۰},\quad \frac{۲}{۷}=\frac{۲\times ۱۰}{۷\times ۱۰}=\frac{۲۰}{۷۰}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۲}{۷}<\frac{۱}{۲}<\frac{۴}{۵}<\frac{۶}{۷}$$

محمد: درست است؛ می‌توان این‌گونه کسرها را مقایسه کرد. اما اگر تعداد اعداد گویا زیاد باشد، این روش خیلی طول می‌کشد.

رضا: خوب، البته می‌توان تعدادی از اعداد گویا را که از کوچکی یا بزرگی آن‌ها اطلاع داریم، کنار بگذاریم، برای مثال می‌دانیم که $\frac{۱}{۲}$ از $\frac{۲}{۷}$ بزرگ‌تر است و فقط $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۴}{۵}$ به عدد یک نزدیک‌ترند و آن‌دو را با هم مقایسه کنیم.

محمد و رضا تصمیم گرفتند نزد معلمشان بروند و از او بخواهند تا راهنمایی‌شان کند.

معلم: ببینید دانش‌آموزان خوبم، اگر صورت کسرها بر مخرج آن‌ها تقسیم و سپس اعداد اعشاری حاصل را با هم مقایسه کنیم، به نظرم این راه ساده‌تر است. حالا حاصل کسرها را مقایسه کنید.

محمد: حاصل کسرها را به اتفاق هم به دست آوردیم:

$$\frac{۱}{۲}=۰/۵,\quad \frac{۶}{۷}=۰/۸,\quad \frac{۴}{۵}=۰/۸,\quad \frac{۲}{۷}=۰/۲۵$$

خوب تاکنون مشخص شد $\frac{۱}{۲} > \frac{۲}{۷}$؛ ولی آقای معلم، الان $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۴}{۵}$ جواب‌های یکسانی به ما دادند.

معلم: خوب فکر کنید، آیا راه‌حلی به ذهنتان می‌رسد؟

رضا: آری، خوب هریک از کسرها را تا دو رقم اعشار حساب کنیم.

محمد: نیازی به محاسبهٔ همه کسرها نیست، فقط دو کسر $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۴}{۵}$ کفایت می‌کند.

رضا: راست گفتی، تکلیف آن دو کسر دیگر مشخص است.

معلم: این روش نیز اشکالی دارد؛ می‌توانید بگویید اشکال آن چیست؟

رضا: آقای معلم، خوب ابتدا تصمیم گرفتیم که تا یک رقم اعشار حساب کنیم و سپس در مرحلهٔ بعد، تا دو رقم اعشار حساب کردیم؛ اگر تعداد اعداد گویا زیاد بود، مشکل ایجاد می‌شد.

معلم: آفرین! به نکتهٔ خوبی اشاره کردید. اشکال آن این است که ناچاریم هربار برای نمایش اعشاری هر کسر، تا چند رقم اعشار محاسبه کنیم. البته ماشین حساب تا چندرقم اعشار را خوب حساب می‌کند و اگر با رایانه آشنایی داشته‌باشید، می‌توانید برنامه‌ای بنویسید که اعداد را از کوچک به بزرگ یا به‌عکس مرتب کند.

مسأله مبارزه‌طلب. اگر $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ که در آن‌ها، a، b، c و d اعداد طبیعی هستند، آن‌گاه نشان دهید که $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

آیا می‌توان نتیجه گرفت که بین دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد؟ (چگونه؟)

مثال ۱ . می‌خواهیم بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۵}$ یک عدد گویا بیابیم. ابتدا کسرها را هم مخرج می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۵}=\frac{۱\times۳}{۵\times۳}=\frac{۳}{۱۵}\ ,\ \frac{۱}{۳}=\frac{۱\times۵}{۳\times۵}=\frac{۵}{۱۵}$$

سپس دنبال عددی می‌گردیم که بین ۳ و ۵ باشد:

$$\frac{۳}{۱۵}<\frac{۴}{۱۵}<\frac{۵}{۱۵}$$

مثال ۲ . می‌خواهیم بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ یک عدد گویا پیدا کنیم. ابتدا کسرها را هم مخرج می‌کنیم

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۱\times۲}{۳\times۲}=\frac{۲}{۶}\ ,\ \frac{۱}{۲}=\frac{۱\times۳}{۲\times۳}=\frac{۳}{۶}$$

حال چون صورت‌ها اعداد متوالی هستند، می‌توان صورت و مخرج کسرها را در عدد ۲ ضرب کنیم تا بتوان عددی بین آن‌ها پیدا کنیم؛ پس: $\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}\ ,\ \frac{۱}{۲}=\frac{۶}{۱۲}$؛ درنتیجه داریم:

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

◇ فعالیت ۵

الف. آیا میانگین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$، بین دو عدد گویای داده شده است؟

(میانگین دو عدد، یعنی حاصل جمع دو عدد تقسیم بر عدد ۲)

ب. آیا عدد $\frac{۲}{۵}$ بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ است؟

پ. آیا رابطهٔ $\frac{۱}{۳}<\frac{۱+۱}{۳+۲}<\frac{۱}{۲}$ درست است؟

کار با ماشین حساب

کسرهای زیر را با ماشین حساب محاسبه کنید و نتیجه را درمقابل آن بنویسید:

$\frac{۱}{۲}=۰/۵$, $\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳۳۳۳۳۳$,

$\frac{۱}{۴}=$........ , $\frac{۱}{۵}=$.......;

$\frac{۱}{۶}=۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶$, $\frac{۱}{۷}=$........ ,

$\frac{۱}{۸}=$...... , $\frac{۱}{۹}=$........

الف. حاصل $\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳۳۳۳۳۳$ به‌دست آمد. اگر طرفین را در ۳ ضرب کنیم، می‌بینیم که $۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۹=۱$ درست نیست. چه‌طور چنین چیزی ممکن است؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌ها تقریبی است؟

ب. اگر عدد ۱ را بر ۳ تقسیم کنیم، مشاهده می‌کنیم که در خارج قسمت عدد ۳ تکرار می‌شود. آیا روش ساده‌تری برای این که این عدد تکراری را ننویسیم، وجود دارد؟

پ. اعداد گویای بالا را به چند دسته می‌توانید تقسیم کنید؟

ت. آیا راهی وجوددارد که بدون عمل تقسیم بتوان اعداد گویا را به سه دسته تقسیم کرد؟

◇ فعالیت ۶

الف. کسرهای روبه رو چه ویژگی مشترکی دارند؟

$۰/۳=\frac{۱}{۳}$, $۰/۲۵=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}$,

$۰/۴۵۳=\frac{۴۵۳}{۱۰۰۰}$, $۱/۴=\frac{۱۴}{۱۰}=\frac{۷}{۵}$

ب. پس از ساده کردن کسرها در مخرج آن‌ها، کدام عامل‌های اول وجوددارد؟ آیا می‌توان مخرج آن‌ها را به صورت $۲^n\times۵^m$ که در آن m و n اعداد حسابی هستند، نوشت؟

پ. آیا هر کسری را که مخرج آن به صورت $۲^n\times۵^m$ است، می‌توان به صورت توانی از عدد ۱۰ نوشت؟

ت. از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در انتهای این فصل مشابه با صفحه‌های ۲۷ و ۲۸ کتاب درسی ریاضی ۱، می‌توان تدریس را به پایان رساند.

◇ خود را بیازماییم

۱. درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

۱) $Z\subset Q$ ۲) $N\subset Q$ ۳) $Q\subset W$

ـ هر عدد گویا را می‌توان به‌صورت یک کسر متعارفی مثبت نوشت.

ـ غیر از اعداد گویا، عددی وجود ندارد.

ـ در مجموعهٔ اعداد گویا کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو وجود ندارد.

ـ صورت و مخرج یک کسر را می‌توان در یک عدد ضرب کرد.

ـ عدد صفر، یک عدد گویاست.

ـ عدد $-۰/۲۵$ یک عدد گویا نیست.

۲. دو سال و سه ماه، چه کسری از سه سال و چهار ماه است؟

۳. یکی از کسرهای معادل $\frac{۲}{۵}$ به صورت $\frac{۳۴}{2a+۱}$ نشان داده شده است. a چه قدر است؟

۴. به ازای چه مقدار a، دو کسر $\frac{a+۱}{۳}$ و $\frac{a-۴}{۲}$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۵. اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد، نشان دهید به ازای هر $m \neq \frac{-d}{b}$ داریم: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+mc}{b+md}$.

۶. پنج عدد گویای بین $\frac{-۳}{۲}$ و $\frac{-۲}{۳}$ بیابید.

۷. کسرهای زیر را به اعشاری تبدیل و دورهٔ گردش هریک را مشخص کنید.

$\frac{۲۶}{۶۵}$ ، $\frac{۱۳}{۶۵}$ ، $\frac{۴}{۶}$ ، $\frac{۵}{۶}$ ، $\frac{۷}{۳۴}$ ، $\frac{۱۳}{۲۳۱}$ ، $\frac{۱}{۱۳}$ ، $\frac{۱}{۷}$

۸. از کسرهای زیر، کدام مولد عدد اعشاری تحقیقی، کدام مولد عدد اعشاری متناوب ساده و کدام متناوب مرکب است؟ پس از تحقیق، عدد اعشاری هریک را بنویسید.

$\frac{۲}{۲۵}$ ، $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۷}{۱۲}$ ، $\frac{۵}{۳۳}$ ، $\frac{۳}{۵۰}$ ، $\frac{۱}{۸}$ ،
$\frac{۰/۲۵}{۳}$ ، $\frac{۲۶}{۶۵}$ ، $\frac{۵}{۱۱}$ ، $\frac{۵}{۱۸}$

۹. اعداد $\frac{-۳}{۴}$ ، $\frac{-۴}{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

۱۰. اگر $a > ۱$ و a گویا باشد، ثابت کنید $۱ < \frac{2a}{a+۱} < a$.

کاربرد اعداد گویا

خوارزمی نیمهٔ اول کتابش را به راه‌حل‌های معادلات مختلف و اثبات صحت روش‌های خود اختصاص می‌دهد؛ ولی نیمهٔ دیگر کتاب مشتمل بر مثال‌هایی از چگونگی استفاده از علم حساب و جبر در مسائلی است که به حساب نیازهای قوانین اسلامی مطرح می‌شوند.

وقتی شخصی فوت می‌کند و برای فرد بیگانه میراثی باقی نمی‌گذارد، سهم‌های شرعی وراث طبیعی او را می‌توان با حساب کسرها محاسبه کرد. محاسبهٔ این سهم‌ها به «علم‌الفرایض» موسوم شد. مثال زیر از کتاب خوارزمی، کاربرد حساب را در این جا نشان می‌دهد.

مثال. «زنی درمی‌گذرد. از او شوهر، یک پسر و سه دختر باقی می‌ماند.» و منظور محاسبهٔ کسر ماترکی است که به هریک از وراث می‌رسد.

قانون(شرع) در این حالت، آن است که شوهر $\frac{۱}{۴}$ ماترک را می‌برد و به پسر دوبرابر سهم هر دختر تعلق می‌گیرد. (ولی باید اضافه کرد که قانون ارث اسلامی از لحاظ حقوق زنان، به‌مراتب پیشرفته‌تر از رسومات دوران پیش از اسلام در شبه‌جزیرهٔ عربستان است.)

خوارزمی سپس باقی ماندهٔ ماترک را پس از کسر شوهر، یعنی $\frac{۳}{۴}$ را، به پنج قسمت تقسیم می‌کند، دو قسمت برای پسر و سه قسمت برای دختران، چون کوچک‌ترین مضرب مشترک پنج و چهار، ۲۰ است، ماترک باید به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود. از این ۲۰ قسمت، شوهر پنج، پسر شش و هریک از دختران سه قسمت می‌برند.

مراجع

۱. بابلیان، اسماعیل و همکاران، ریاضیات سال اول دبیرستان، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۸۱.
۲. بهروش، محمود و همکاران، روش تدریس ریاضیات ابتدایی، دورهٔ کاردانی تربیت‌معلم ابتدایی، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۷۰.
۳. جهانشاهی، محمد، اصول فراگیری و آموزش ریاضی دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۷.
۴. داریوش همدانی، حمیده و همکاران، مهارت‌های پایهٔ ریاضی، وزارت آموزش‌وپرورش ۱۳۸۱.
۵. رحمانی، مهدی، اهداف آموزش ریاضی چیست و چه نقشی در اعتلای ریاضیات دارد، رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۵۰، زمستان ۱۳۷۶.
۶. رستگار، آرش، ریاضیات ۱، کتاب پیشنهادی وزارت آموزش‌وپرورش، چاپ بهار ۱۳۸۱.
۷. صفائیان، افسر، مجموعه تمرین‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی، گامی به‌سوی دبیرستان، انتشارات مبتکران، ۱۳۸۰.
۸. فرزان، مسعود و همکاران، ریاضی سال سوم راهنمایی، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۸۱.
۹. فرزان، مسعود و همکاران، کتاب معلم(روش تدریس)ریاضی دورهٔ راهنمایی، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۷۲.
۱۰. وحیدی، محمدقاسم، گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی، تألیف جی. ال. برگرن، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۳.