احمد قندهاری

مقدمه

در بیان مطالب ریاضی به مفاهیمی مانند کمیت، مقدار، واحد و عدد برمی‌خوریم که ممکن است برای خواننده خیلی روشن نباشند. به همین خاطر، قبل از ورود به بحث اصلی، این مفاهیم را تعریف می‌کنیم.

کمیت: آنچه قابل کم و زیاد شدن باشد، کمیت است.

مقدار: قسمت محدودی از کمیت را مقدار گویند.

واحد: واحد هر کمیت، مقدار مشخص و معینی از آن کمیت است که برای سنجش مقادیر هم‌جنس خود به کار می‌رود.

برای دانش‌آموزان سال دوم

عدد: نتیجه‌ی سنجش هر مقدار از یک کمیت با واحد هم‌جنس خودش، عدد است.

انواع عدد: اعداد را به سه دسته تقسیم می‌کنند به نام‌های **اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و اعداد شناسایی.**

اعداد اصلی: برای بیان کمیت به‌کار می‌روند. برای مثال، ساعت ۱۱ صبح، نمره‌ی ۱۷ در درس حسابان یا ۲۰ هزار تومان قرض. این اعداد قابل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم با یکدیگر هستند.

اعداد ترتیبی: این اعداد صرفاً در مقایسه به‌کار می‌روند. برای مثال، حمید در درس فیزیک نفر سوم کلاس است، یا علی نفر هفتم در صف اتوبوس است. اعداد سوم و هفتم در این جملات، اعداد ترتیبی نامیده می‌شوند.

اعداد شناسایی: این اعداد صرفاً برای شناسایی به‌کار می‌روند. برای مثال، خیابان بیستم، کوچه‌ی پنجم، اتوبوس خط ۱۱۸.

اعداد چگونه پیدا شدند

پیدا شدن اعداد، از شمارش و اندازه‌گیری ناشی شده است. به این صورت که در زمان‌های قدیم، برای شمارش اشیا یا حیوانات یا... اعداد طبیعی کافی بودند. مثلاً پنج تا گوسفند یا ده تا درخت. اما با پیدایش تدریجی رابطه‌های اجتماعی در آن روزگار، برای بیان بدهی یا سود و زیان، دیگر اعداد طبیعی کافی نبودند و این نیاز، به پیدا شدن اعداد صحیح منجر شد. اما در سنجش مفاهیم و کمیت‌های پیوسته مانند زمان و دما، مقیاسی لازم بود که شامل اعدادی بین اعداد صحیح باشد. در نتیجه، اعدادی پیدا شدند به نام اعداد گویا: مانند $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۷}{۳}$ و $-\frac{۵}{۲}$ و...

در یونان باستان دریافته بودند، نسبت محیط دایره به قطرش، عددی است که نمی‌توان دقیقاً آن را با عددهای گویا بیان کرد؛ اگرچه به‌طور تقریب این عدد را $\frac{۲۲}{۷}$ در نظر می‌گرفتند که تقریب بسیار مناسبی است، زیرا:

$$\frac{۲۲}{۷} = ۳/۱۴۲۸۵۷$$

ولی بعدها معلوم شد که این عدد و عددهای نظیر آن، دسته‌ی جدیدی از اعداد را وارد ریاضی می‌کنند به نام عددهای اصم یا گنگ یا رادیکالی؛ مانند $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۵}$ و π و $\sqrt{۷}$ و ...

پس از پیدا شدن این عددها، مجموعه‌ای را که شامل، اعداد صحیح و اعداد گویا و اعداد اصم باشد، مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامیدند و آن را با $\mathbb{R}$ نشان دادند.

با این مقدمه، به تعریفی دقیق‌تر از مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌پردازیم.

مجموعه‌ی اعداد حقیقی: مجموعه‌ای است شامل زیر مجموعه‌های:

۱. مجموعه‌ی اعداد طبیعی (N)

مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$N = \{۱,۲,۳,\cdots,n,\cdots\}$$

۲. مجموعه‌ی اعداد صحیح نسبی (Z)

مجموعه‌ای است شامل اعداد طبیعی و قرینه‌ی آن‌ها و عدد صفر. این مجموعه را به صورت

$$Z = \{\cdots,-n,\cdots,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots,n,\cdots\}$$

نشان می‌دهند.

۳. مجموعه‌ی اعداد صحیح گویا (Q)

مجموعه‌ای است شامل مجموعه‌ی Z و اعداد کسری یا اعشاری بین عضوهای Z؛ مانند

$$\{\cdots,-n,\cdots,-۴,-\frac{۲}{۳},-۱,-\frac{۱}{۱۰},۰,\cdots,\frac{۱}{۲},\cdots,۵,\cdots,\frac{۱۱}{۲},\cdots,n,\cdots\}$$

به بیان ریاضی، این مجموعه را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$Q = \left\{\frac{p}{q}\middle| p,q \in Z \ , \ q \neq ۰\right\}$$

۴. مجموعه‌ی اعداد اصم یا گنگ (Q')

مجموعه‌ی $(\mathbb{R} - Q)$ را مجموعه‌ی اعداد اصم یا گنگ گویند و آن را با Q' نشان می‌دهند؛ مانند مجموعه‌ی $\{\cdots,-\sqrt{۱۵},\cdots,-\sqrt{۱۱},\cdots,-\sqrt{۲},\cdots,\sqrt{۳},\sqrt{۷},\cdots\}$ به بیان ریاضی، این مجموعه را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$Q' = \{x \in \mathbb{R} | x \notin Q\}$$

نکته‌ی ۱: بسط اعشاری هر عدد گویا ممکن است به سه شکل باشد:

الف) پایان‌پذیر باشد؛ مانند:

$$\frac{۴۵}{۱۲} = ۳/۷۵ \qquad \frac{۱۸}{۵} = ۳/۶ \qquad \frac{۵}{۸} = ۰/۶۲۵$$

ب) بی‌پایان ولی متناوب ساده باشد؛ مانند:

$$\frac{۵}{۱۱} = ۰/۴۵۴۵۴۵\cdots \qquad \frac{۳}{۱۱} = ۰/۲۷۲۷۲۷\cdots$$

ج) بی‌پایان ولی متناوب مرکب باشد؛ مانند:

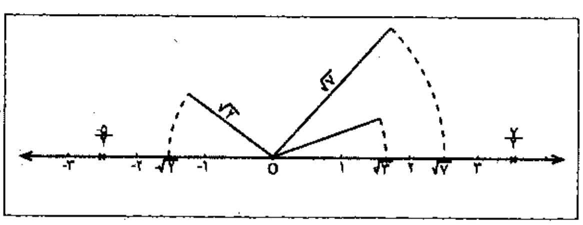
$$\frac{۱۱}{۱۵} = ۰/۷۳۳۳\cdots \qquad \frac{۱۳}{۱۸} = ۰/۷۲۲۲\cdots$$

نکته‌ی ۲: بسط اعشاری هر عدد اصم یا گنگ، بی‌پایان و غیر متناوب است؛ مانند:

$$\sqrt{۳} = ۱/۷۳۲۰۵۰۸۰۷\cdots , \sqrt{۷} = ۲/۶۴۵۷۱۳۱۱\cdots$$

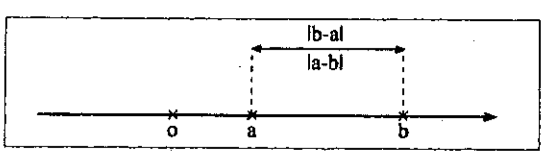
نکته‌ی ۳: عدد اصم یا گنگ را نمی‌توان به صورت عدد گویای $\frac{p}{q}$ نوشت که p و q نسبت به هم اول باشند. برای مثال، می‌توان ثابت کرد که $\sqrt{۲}$ را نمی‌توان به صورت عدد گویای $\frac{p}{q}$ نوشت که p و q نسبت به هم اول باشند (اثبات آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم).

نکته‌ی ۴: هر عدد حقیقی را می‌توان به صورت نقطه‌ای از یک محور مشخص کرد و برعکس هر نقطه از محور را می‌توان به یک عدد حقیقی مربوط ساخت. در واقع تناظری یک‌به‌یک بین اعداد حقیقی و نقاط یک محور وجود دارد.



مبدأ مختصات را متناظر با عدد ۰، اعداد مثبت را سمت راست مبدأ و اعداد منفی را سمت چپ مبدأ در نظر می‌گیرند.

فاصله‌ی بین اعداد حقیقی a و b روی یک محور: فاصله‌ی بین اعداد حقیقی a و b را روی یک محور با $|a-b|$ یا $|b-a|$ نشان می‌دهیم.



بازه‌ها

بسیاری از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی، بازه‌ها هستند.

فرض می‌کنیم $a < b \ , \ a,b \in \mathbb{R}$

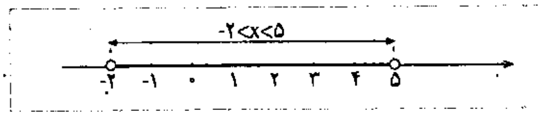
۱. مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a < x < b$ صدق می‌کند، یعنی:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

مثال: بازه‌ی $(-۲ , ۵)$ یعنی:

$$(-۲,۵) = \{x \in \mathbb{R} | -۲ < x < ۵\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:



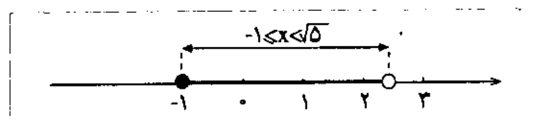
۲. مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a \le x < b$ صدق می‌کند؛ یعنی:

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$$

مثال: بازه‌ی $[-۱,\sqrt{۵})$ یعنی:

$$[-۱,\sqrt{۵}) = \{x \in \mathbb{R} | -۱ \le x < \sqrt{۵}\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:



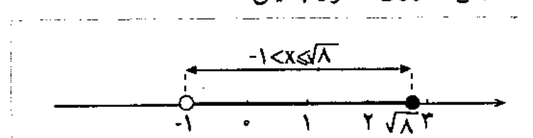
۳. مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a < x \le b$ صدق می‌کند؛ یعنی:

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$$

مثال: بازه‌ی $(-۱,\sqrt{۸}]$ یعنی:

$$(-۱,\sqrt{۸}] = \{x \in \mathbb{R} | -۱ < x \le \sqrt{۸}\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:



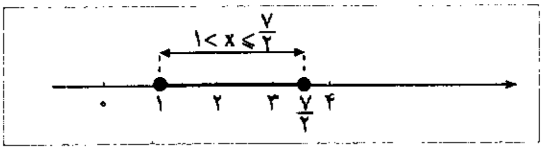
۴. مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a \le x \le b$ صدق می‌کند؛ یعنی:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$$

مثال: بازه‌ی $[۱,\frac{۷}{۲}]$ یعنی:

$$[۱,\frac{۷}{۲}] = \{x \in \mathbb{R} | ۱ \le x \le \frac{۷}{۲}\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:

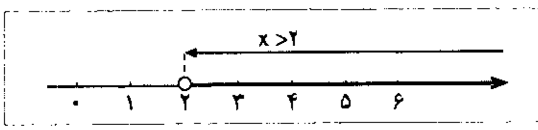


۵. مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x > a$ صدق کند؛ یعنی:

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۲، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x > ۲$ صدق می‌کند؛ یعنی: $(۲,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | ۲ < x\}$

که نمایش آن روی محور چنین است:

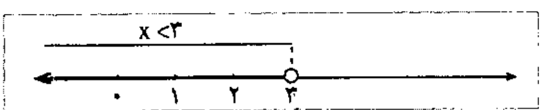


۶. مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x < a$ صدق کند؛ یعنی:

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x < ۳$ صدق می‌کند؛ یعنی $(-\infty,۳) = \{x \in \mathbb{R} | x < ۳\}$

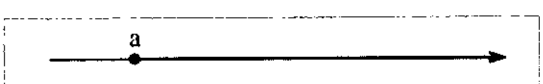
که نمایش آن روی محور چنین است:



۷. مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x \ge a$ صدق کند؛ یعنی:

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$$

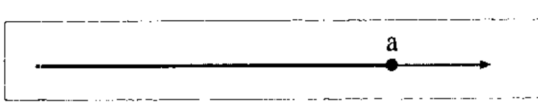
نمایش آن روی محور چنین است:



۸. مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x \le a$ صدق کند؛ یعنی:

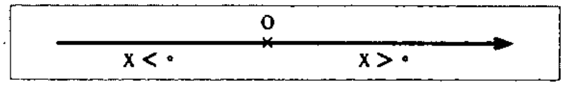
$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} | x \le a\}$$

نمایش آن روی محور چنین است:



۹. مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را در بازه‌ها به صورت $(-\infty,+\infty)$ نشان می‌دهند.

$(-\infty,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\}$ که نمایش آن همه‌ی محور است.



قدر مطلق

$$|x|=\begin{cases}x\ , & x\ge 0\\ -x\ , & x<0\end{cases}$$

توجه کنید که حاصل $|x|$ عددی مثبت یا صفر است.

مثال: $|x-2|=\begin{cases}(x-2)\ , & x\ge 2\\ -(x-2)\ , & x<2\end{cases}$

۱. معادله‌ی قدرمطلق

$$\begin{matrix}|x|=a\\ \text{یا}\\ x^2=a^2\end{matrix}\Rightarrow x=\pm a\ ,\ a>0$$

مثال: این معادله‌ها را حل کنید:

الف) $|2x-3|=7$

حل:

$|2x-3|=7\Rightarrow 2x-3=\pm7\Rightarrow 2x=3\pm7\Rightarrow$

$x=\frac{3\pm7}{2}\Rightarrow x_1=\frac{3+7}{2}=5$ یا $x_2=\frac{3-7}{2}=-2$

ب) $|2x^2-7|=1$

حل:

$|2x^2-7|=1\Rightarrow 2x^2-7=\pm1\Rightarrow 2x^2=7\pm1\Rightarrow$

$$\begin{cases}2x^2=8\\ \text{یا}\\ 2x^2=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=4\\ \text{یا}\\ x^2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm2\\ \text{یا}\\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

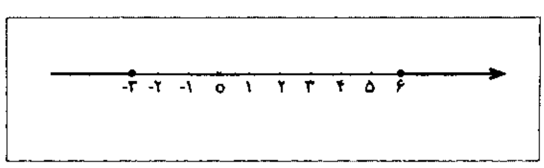
۲. نامعادله‌ی قدرمطلق

الف)

$$\begin{matrix}|x|\ge a\\ \\ x^2\ge a^2\end{matrix}\Rightarrow x\ge a \text{ یا } x\le -a\quad a>0$$

مثال: نامعادله‌ی $|2x-3|\ge 9$ را حل کنید و جواب‌ها را روی محور نشان دهید.

حل:



$$|2x-3|\ge 9\Rightarrow\begin{cases}2x-3\ge 9\\ \text{یا}\\ 2x-3\le -9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x\ge 12\\ \text{یا}\\ 2x\le -6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 6\\ \text{یا}\\ x\le -3.\end{cases}$$

ب)

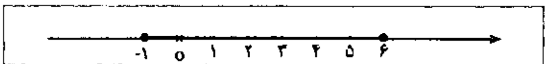
$$\begin{matrix}|x|\le a\\ \\ x^2\le a^2\end{matrix}\Rightarrow -a\le x\le a\ ,\ a>0$$

مثال: نامعادله‌ی $|2x-5|\le 7$ را حل کنید و جواب‌ها را روی محور نشان دهید.

حل:

$|2x-5|\le 7\Rightarrow -7\le 2x-5\le 7\Rightarrow$

$-2\le 2x\le 12\Rightarrow -1\le x\le 6$



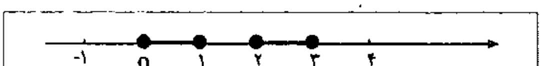
ج)

$$\begin{matrix}a\le|x|\le b\\ \\ a^2\le x^2\le b^2\end{matrix}\Rightarrow -b\le x\le -a \text{ یا } a\le x\le b\ ,\quad 0<a<b$$

مثال: معادله‌ی $1\le|2x-3|\le 9$ را حل کنید و جواب‌ها را روی محور نشان دهید.

حل:

$$1\le|2x-3|\le 9\Rightarrow\begin{cases}-3\le 2x-3\le -1\\ \text{یا}\\ 1\le 2x-3\le 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le 2x\le 2\\ \text{یا}\\ 4\le 2x\le 6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ \text{یا}\\ 2\le x\le 3\end{cases}$$



توجه: عدد میانی بازه‌ی (a,b) یا بازه‌ی $[a,b]$ برابر $\frac{a+b}{2}$ است.

مثال: عدد میانی حاصل از بازه‌ی $(-\frac{3}{4},\frac{7}{2})\cap(-\frac{1}{2},\frac{17}{4})$ را بیابید.

حل: $(-\frac{3}{4},\frac{7}{2})\cap(-\frac{1}{2},\frac{17}{4})=(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$

$$\text{عدد میانی}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{2}$$

به کمک محور نیز می‌توان مثال را حل کرد:

$$\text{اشتراک}=(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$$

$$\text{عدد میانی}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{2}$$