مجانب‌ها، حدّ و پیوستگی (۳)

● احمد قندهاری

اشاره

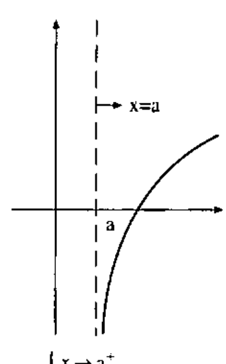
در شماره‌های قبل مفاهیم حد چپ و راست تابع و حد تابع در یک نقطه بررسی شد و به قضایای حد اشاره کردیم، و به‌دنبال آن هم‌ارزی‌های حدی و رفع ابهام در حالت‌های گوناگون را مطرح کردیم. اینک ادامه‌ی مطالب را در پی می‌آوریم.

مجانب قائم

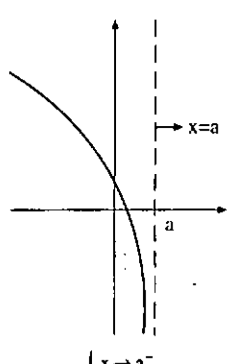
خط $x = a$ را مجانب قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ گوییم، هرگاه یکی از موارد زیر برقرار باشد:

(الف $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ (ب $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

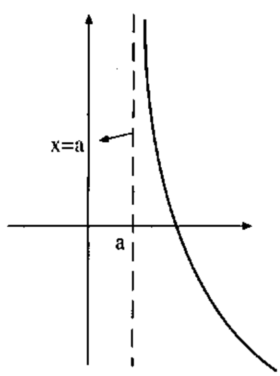
(ج $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ (د $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



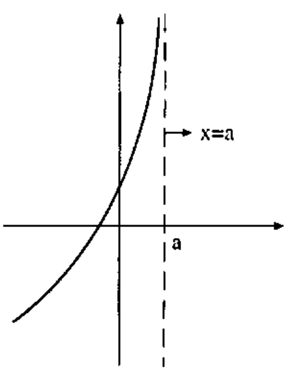
$\begin{cases} x \to a^+ \\ f(x) \to -\infty \end{cases}$



$\begin{cases} x \to a^- \\ f(x) \to -\infty \end{cases}$



$\begin{cases} x \to a^+ \\ f(x) \to +\infty \end{cases}$



$\begin{cases} x \to a^- \\ f(x) \to +\infty \end{cases}$

توجه: مجانب قائم، در تابع‌های به معادله‌ی کسری وجود دارد. برای تعیین معادله‌ی مجانب قائم، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۱. مجانب قائم هریک از تابع‌ها به معادله‌های زیر را بیابید.

(الف $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 4}$

حل:

خطی به معادله‌ی $x = 4$، مجانب قائم منحنی تابع f است.

مجانب قائم: $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

زیرا: $x \to 4 \ ; \ \lim f(x) = \pm\infty$

ب) $f(x)=\frac{3}{x^3-x}$

مجانب قائم: $x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ \pm 1$

پس خط‌ها به معادله‌های $x=0$ ، $x=1$ و $x=-1$ ، مجانب‌های قائم منحنی این تابع است.

مثال۲. به ازای چه مقادیر m، منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{4}{x^2+mx+4}$ یک مجانب قائم دارد؟

حل: معادله‌ی $x^2+mx+4=0$ باید یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد. پس باید:

$$\Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow m^2-16=0 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m=\pm 4$$

مثال۳. اگر دو خط $x=2\sqrt{2}-3$ و $x=2\sqrt{2}+3$ معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2+5}{2x^2+ax+b}$ باشند، a و b را بیابید.

حل: $2x^2+ax+b=0$

ریشه‌های مخرج عبارت‌اند از: $(2\sqrt{2}-3)\ ,\ (2\sqrt{2}+3)$.

مجموع ریشه‌ها $=-\frac{a}{2}=(2\sqrt{2}+3)+(2\sqrt{2}-3)=4\sqrt{2}$

$$\Rightarrow -\frac{a}{2}=4\sqrt{2} \Rightarrow a=-8\sqrt{2}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $=\frac{b}{2}=(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)=8-9=-1$

$$\Rightarrow \frac{b}{2}=-1 \Rightarrow b=-2$$

نکته۱. قبل از تعیین معادله‌ی مجانب قائم، اگر کسر قابل ساده شدن باشد، اول کسر را ساده کنید و سپس مجانب قائم را بیابید.

مثال۴. مجانب‌های قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(x^2-4x+3)(x-5)}{(x-1)^2(x^2-25)}$ را بیابید.

حل: ابتدا کسر را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-1)^2(x-5)(x+5)}=\frac{x-3}{(x+1)(x+5)}\ ;\ x\neq 1,5$$

مجانب قائم: $(x+1)(x+5)=0 \Rightarrow x=-1\ ,\ x=-5$

اگر $x\to -1\ ;\ f(x)\to \pm\infty$

اگر $x\to -5\ ;\ f(x)\to \pm\infty$

پس خط‌های به معادله‌های $x=-1$ و $x=-5$ مجانب‌های قائم منحنی این تابع هستند.

نکته۲. مجانب قائم وقتی قابل قبول است که به ازای آن، عبارت داخل رادیکال‌ها با فرجه‌ی زوج را به عدد منفی تبدیل نکند.

مثال۵. معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(x-1)\sqrt{x^2-2}}{x(x-3)(x-4)}$ را بیابید.

حل:

مجانب قائم: $x(x-3)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=3\\x=4\end{cases}$

$x=0$ قابل قبول نیست، زیرا داخل رادیکال صورت را به عدد منفی تبدیل می‌کند. پس $x=3$ و $x=4$ معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی این تابع‌اند.

حد در بی‌نهایت

تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی $(a,+\infty)$ **تعریف** شده باشد. می‌گوییم حدّ تابع f وقتی $x\to+\infty$، برابر عدد حقیقی L است، هرگاه $|f(x)-L|$ را بتوانیم به هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

هم‌چنین، اگر تابع f در بازه‌ی $(-\infty,a)$ **تعریف** شده باشد، می‌گوییم: حدّ تابع f وقتی $x\to-\infty$، برابر عدد حقیقی L است، هرگاه $|f(x)-L|$ را بتوانیم به هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی کوچک اختیار کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

مثال۱. اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x}=2$ باشد، چنان‌چه بخواهیم داشته باشیم: $\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|<\frac{1}{10^6}$، آن‌گاه باید x را چه قدر بزرگ اختیار کنیم؟

حل:

$$\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|<\frac{1}{10^6}\Rightarrow\left|\frac{2x-1-2x}{x}\right|<\frac{1}{10^6}$$

$$\left|\frac{-1}{x}\right|<\frac{1}{10^6}\Rightarrow\frac{1}{|x|}<\frac{1}{10^6}\Rightarrow|x|\underset{x\to+\infty}{>}10^6\Rightarrow x>10^6$$

پس باید x را بزرگ‌تر از 10^6 انتخاب کنیم.

مثال۲. اگر $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}$ باشد، چنان‌چه بخواهیم داشته باشیم: $\left|\frac{x+1}{2x}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10^8}$، آن‌گاه باید x را چه قدر کوچک اختیار کنیم؟

حل:

$$\left|\frac{x+1}{2x}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10^8}\Rightarrow\left|\frac{x+1-x}{2x}\right|<\frac{1}{10^8}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{1}{2x}\right|<\frac{1}{10^8}\Rightarrow\frac{1}{2|x|}<\frac{1}{10^8}\Rightarrow 2|x|>10^8\Rightarrow|x|>\frac{10^8}{2}$$

$$x\to-\infty\ ;\ |x|=-x$$

$$\Rightarrow -x>\frac{10^8}{2}\Rightarrow x<-\frac{10^8}{2}$$

پس باید x را کوچک‌تر از $-\frac{10^8}{2}$ اختیار کنیم.

مثال۳. مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

$$\text{(الف}\ A=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-5x^2+4x-1}{x^3+x+5}=\frac{\infty}{\infty}$$

حل:

$$A=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3(2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}$$

$$=\frac{2-0+0-0}{1+0+0}=\frac{2}{1}=2$$

$$\text{(ب}\ B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

حل:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x})}+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x})}+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

توجه: $x\to+\infty\ ;\ |x|=x$

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{\cancel{x}(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}})}$$

$$=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}{\sqrt{4+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}$$

نکته‌ی مهم: اگر در مسئله‌ای، وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$، حد تابع به صورت $(+\infty-\infty)$ شود، برای حل، عبارت مسئله را در عبارت مناسبی ضرب می‌کنیم تا این حالت حذف شود. سپس مانند مثال‌های قبلی، حد مسئله را محاسبه می‌کنیم. به این مثال‌ها توجه کنید.

مثال۴. مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

الف) $C=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+2x})$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+2x})=+\infty-\infty$$

عبارت مسئله را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$C=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+1-x^2-2x}{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}+\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(-6+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(-6+\frac{1}{x})}{\cancel{x}(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\frac{-6}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{-6}{2}=-3$$

حل:

ب) $D=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2})-x)=-\infty+\infty$

نکته:

$$a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})$$

$$D=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x)\times\frac{\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}}{\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2-x^3}{\sqrt[3]{x^6(1+\frac{2}{x})^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3(1+\frac{2}{x})}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x})^2}+x^2+x^2\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}$$

$$D=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x})^2}+1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}})}$$

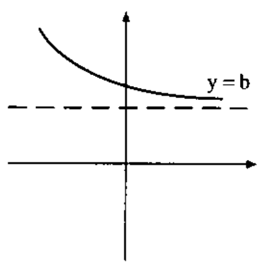
$$=\frac{2}{(\sqrt[3]{(1+0)^2}+1+\sqrt[3]{1+0})}=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

مجانب افقی

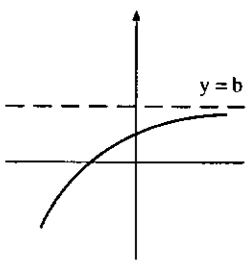
خط $y=b$ را مجانب افقی منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$ گوییم، هرگاه فقط و فقط یکی از سه مورد زیر وجود داشته باشد:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$

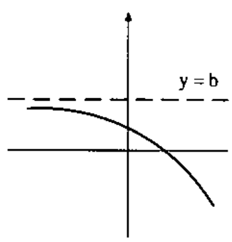
ج) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=b$



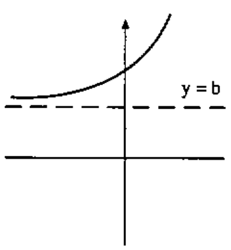
$\begin{cases}x\to+\infty\\ y\to b\end{cases}$



$\begin{cases}x\to+\infty\\ y\to b\end{cases}$



$\begin{cases}x\to-\infty\\ y\to b\end{cases}$



$\begin{cases}x\to-\infty\\ y\to b\end{cases}$

برای تعیین مجانب افقی یک تابع، x را به سمت ∞ میل می‌دهیم و حد تابع را محاسبه می‌کنیم.

نکته: تابعی که ضابطه‌ی آن کسری باشد، وقتی مجانب افقی دارد

که صورت و مخرج هم‌درجه باشند (در این صورت $y=\frac{a}{a'}$ مجانب افقی است)، یا درجه‌ی صورت کمتر از درجه‌ی مخرج باشد (در این صورت $y=0$ مجانب افقی است).

مثال۱ . مجانب افقی تابع های به معادله های زیر را بیابید.

الف) $y=\frac{2x-1}{x-4}$

حل:

$x\to\pm\infty \Rightarrow \lim y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-4}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}(2-\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{4}{x})}$: مجانب افقی

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}}=\frac{2-0}{1-0}=2$; $y=2$ معادله‌ی مجانب افقی

ب) $y=\frac{4x+5}{x^2+1}$

حل:

$x\to\pm\infty \Rightarrow \lim y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x+5}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}(4+\frac{5}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}$: مجانب افقی

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{x(1+\frac{1}{x^2})}=\lim\limits_{n\to\pm\infty}\frac{4}{x}=0$; $y=0$ معادله‌ی مجانب افقی

ج) $y=\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x+5}$

حل:

$x\to\pm\infty \Rightarrow \lim y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x+5}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}}{x(2+\frac{5}{x})}$: مجانب افقی

$$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}$$

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=\frac{1}{2}$

پس $y=\frac{1}{2}$ معادله‌ی مجانب افقی است، وقتی: $x\to+\infty$.

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=-\frac{1}{2}$

پس $y=-\frac{1}{2}$ هم معادله‌ی مجانب افقی دیگر این منحنی است، وقتی: $x\to-\infty$.

مثال ۲ . مجانب افقی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(\sqrt{x^2+10x+5}-x)$ را وقتی $x\to+\infty$ ، بیابید.

حل:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+10x+5}-x)=+\infty-\infty$$

عبارت مسئله را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+10x+5}-x)\times\frac{\sqrt{x^2+10x+5}+x}{\sqrt{x^2+10x+5}+x}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+10x+5-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2})}+x}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10x+5}{|x|\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(10+\frac{5}{x})}{x\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(10+\frac{5}{x})}{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{1}+1}=\frac{10}{2}=5$$

پس $y=5$ معادله‌ی مُجانب افقی این تابع است.

تمرین: معادله‌های مجانب‌های قائم و افقی هریک از تابع‌های به این معادله‌ها را بیابید.

۱) $y=\frac{x^2-4x}{2x^2-8}$

۲) $y=\frac{x-1}{x^2-1}$

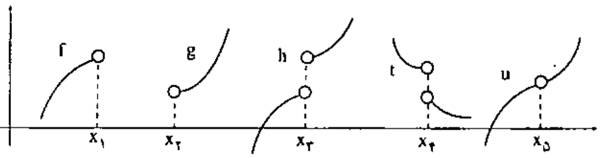
۳) $y = \tan x$ ۴) $y = \dfrac{x-5}{\sqrt{4x^2 - 8x}}$

۵) $y = \cot x$ ۶) $y = (\sqrt{x^2 + 2x} + x)$

پیوستگی‌ها

حد و پیوستگی به‌طریقه‌ی شهودی

۱ . حد : نقطه‌ی تو خالی در نمودارها را نقطه‌ی حد گوییم . اگر نمودار در سمت چپ نقطه‌ی تو خالی باشد، آن نقطه را «حد چپ» و اگر در سمت راست نقطه‌ی تو خالی باشد، آن نقطه را «حد راست» گوییم . هم‌چنین، اگر در دو طرف نقطه‌ی تو خالی نمودار وجود داشته باشد، آن نقطه را «نقطه‌ی حد» گوییم . به نمودارهای زیر توجه کنید :



نتایج :

۱ . تابع f در x_1 فقط حد چپ دارد .

۲ . تابع g در x_2 فقط حد راست دارد .

۳ . تابع h در x_3 ، حد راست و حد چپ دارد، ولی برابر نیستند . حد راست تابع بیشتر از حد چپ آن است .

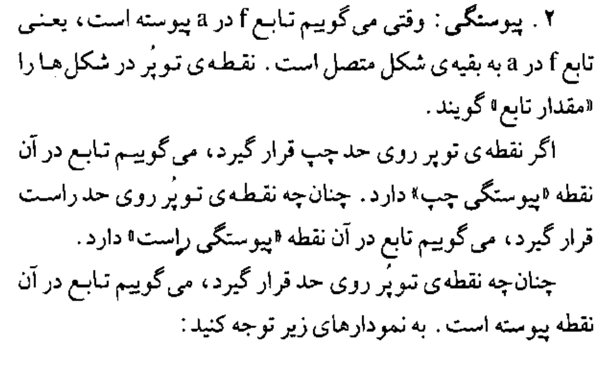
۴ . تابع t در x_4 ، حد راست و حد چپ دارد، ولی برابر نیستند . حد چپ تابع بیشتر از حد راست آن است .

۵ . تابع u در x_5 حد دارد .

۲ . پیوستگی : وقتی می‌گوییم تابع f در a پیوسته است، یعنی تابع f در a به بقیه‌ی شکل متصل است . نقطه‌ی توپُر در شکل‌ها را «مقدار تابع» گویند .

اگر نقطه‌ی توپر روی حد چپ قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه «پیوستگی چپ» دارد . چنان‌چه نقطه‌ی توپُر روی حد راست قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه «پیوستگی راست» دارد .

چنان‌چه نقطه‌ی توپُر روی حد قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه پیوسته است . به نمودارهای زیر توجه کنید :



نتایج شکل

۱ . تابع f در x_1 فقط پیوستگی چپ دارد .

۲ . تابع g در x_2 فقط پیوستگی راست دارد .

۳ . تابع h در x_3 فقط پیوستگی راست دارد و حد چپ هم دارد .

۴ . تابع t در x_4 فقط پیوستگی چپ دارد و حد راست هم دارد .

۵ . تابع u در x_5 حد دارد، ولی نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ .

۶ . تابع v در x_6 پیوسته است .

۷ . تابع w و تابع s به‌ترتیب در x_7 و x_8 ناپیوستگی رفع‌نشدنی دارند .

با این مقدمات و آشنایی به تعریف ریاضی پیوستگی می‌پردازیم .

تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع f را در نقطه‌ی x_0 وقتی پیوسته گوییم که این تابع در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد و حد تابع در x_0 مساوی مقدار تابع در x_0 باشد $(f(x_0))$. پس :

۱ . اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ،

آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 پیوسته است؛ مانند نقطه‌ی x_6 در تابع v .

۲ . اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ،

آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 پیوسته نیست و فقط پیوستگی راست دارد؛ مانند نقطه‌ی x_3 در تابع h .

۳ . اگر داشته باشیم : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ،

آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 پیوسته نیست و فقط پیوستگی چپ دارد؛ مانند نقطه‌ی x_4 در تابع t .

۴ . اگر داشته باشیم : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ ،

آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد؛ مانند نقطه‌ی x_5 در تابع u .

۵ . در دو تابع w و s ، تابع در همسایگی x_7 و x_8 تعریف نشده است، پس بحث پیوستگی مورد ندارد . ولی اصطلاحاً به این نوع ناپیوستگی، ناپیوستگی رفع نشدنی هم می‌گویند .

مثال ۱ . در تابع با ضابطه‌ی زیر، پیوستگی تابع را در $x = 0$ بررسی کنید .

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-\cos 2x}}{x\sqrt{2}} & , \ x \neq 0 \\ -2 & , \ x = 0 \end{cases}$$

حل: ضابطه‌ی دوم تابع، مقدار تابع را نشان می‌دهد. پس برای حل باید حد راست و حد چپ تابع را محاسبه کرد.

مقدار تابع $f(\circ) = -۲$

الف) $\lim_{x\to\circ^+} f(x) = \lim_{x\to\circ^+}\frac{۲\sqrt{۱-\cos ۲x}}{x\sqrt{۲}} = \lim_{x\to\circ^+}\frac{۲\sqrt{۲\sin^۲ x}}{x\sqrt{۲}}$

$\sim \lim_{x\to\circ^+}\frac{۲\sqrt{۲x^۲}}{x\sqrt{۲}} = \lim_{x\to\circ^+}\frac{۲\sqrt{۲}|x|}{x\sqrt{۲}} = \lim_{x\to\circ^+}\frac{۲\sqrt{۲}x}{x\sqrt{۲}} = ۲$ حد راست

ب) $\lim_{x\to\circ^-} f(x) = \lim_{x\to\circ^-}\frac{۲\sqrt{۱-\cos ۲x}}{x\sqrt{۲}} = \lim_{x\to\circ^-}\frac{۲\sqrt{۲\sin^۲ x}}{x\sqrt{۲}}$

$\sim \lim_{x\to\circ^-}\frac{۲\sqrt{۲x^۲}}{x\sqrt{۲}} = \lim_{x\to\circ^-}\frac{۲\sqrt{۲}|x|}{x\sqrt{۲}} = \lim_{x\to\circ^-}\frac{-۲\sqrt{۲}x}{x\sqrt{۲}} = -۲$

حد چپ

چون در این تابع در نقطه‌ی $x = \circ$، فقط حد چپ برابر مقدار تابع است، بنابراین این تابع در $\circ$ فقط پیوستگی چپ دارد.

مثال ۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۲ + ۲x + \lfloor x\rfloor$ مفروض است. پیوستگی این تابع را در $x_\circ = ۲$ بررسی کنید.

$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+}(x^۲+۲x+\lfloor x\rfloor) = ۴+۴+\lfloor ۲^+\rfloor$

حد راست تابع $= ۴+۴+۲ = ۱۰$

$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-}(x^۲+۲x+\lfloor x\rfloor) = ۴+۴+\lfloor ۲^-\rfloor$

حد چپ تابع $= ۴+۴+۱ = ۹$

مقدار تابع $f(۲) = ۴+۴+\lfloor ۲\rfloor = ۴+۴+۲ = ۱۰$

چون در این مسئله در $x = ۲$، فقط حد راست برابر مقدار تابع شده است، می‌گوییم تابع f در $x = ۲$ پیوسته نیست، ولی فقط پیوستگی راست دارد.

مثال ۳. پیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor . \lfloor ۱-x+\lfloor x\rfloor\rfloor$ را در $x = \circ$ بررسی کنید.

حل:

$\lim_{x\to\circ^+} f(x) = \lfloor \circ^+ + \lfloor\circ^+\rfloor\rfloor . \lfloor ۱+\circ^- + \lfloor\circ^+\rfloor\rfloor = \lfloor\circ^+ + \circ\rfloor . \lfloor ۱^- + \circ\rfloor$

حد راست $= \lfloor\circ^+\rfloor . \lfloor ۱^-\rfloor = \circ(\circ) = \circ$

$\lim_{x\to\circ^-} f(x) = \lfloor \circ^- + \lfloor\circ^-\rfloor\rfloor . \lfloor ۱+\circ^+ + \lfloor\circ^-\rfloor\rfloor = \lfloor\circ^- - ۱\rfloor . \lfloor ۱^+ - ۱\rfloor$

حد چپ $= \lfloor -۱^-\rfloor . \lfloor\circ^+\rfloor = -۲(\circ) = \circ$

مقدار تابع $f(\circ) = \lfloor\circ+\lfloor\circ\rfloor\rfloor . \lfloor ۱-\circ+\lfloor\circ\rfloor\rfloor = \lfloor\circ\rfloor . \lfloor ۱\rfloor = (\circ)(۱) = \circ$

پس این تابع در $x = \circ$ پیوسته است.

مثال ۴. تابع f با ضابطه‌ی زیر مفروض است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax-x^۲}{|x|} & , x > \circ \\ b+\lfloor x-\sqrt{۵}\rfloor & , x = \circ \\ \lfloor ۴+x\rfloor & , x < \circ \end{cases}$$

اگر این تابع در $x = \circ$ پیوسته باشد، a و b را بیابید.

حل:

$\lim_{x\to\circ^+} f(x) = \lim_{x\to\circ^+}\frac{ax-x^۲}{|x|} = \lim_{x\to\circ^+}\frac{x(a-x)}{x}$

حد راست $= \lim_{x\to\circ^+}(a-x) = a$

حد چپ $\lim_{x\to\circ^-} f(x) = \lim_{x\to\circ^-}\lfloor ۴+x\rfloor = \lfloor ۴+\circ^-\rfloor = \lfloor ۴^-\rfloor = ۳$

مقدار تابع $= f(\circ) = b+\lfloor\circ-\sqrt{۵}\rfloor = b-۳$ مقدار تابع

$a = ۳ \ , \ b-۳ = ۳ \Rightarrow b = ۶$

مثال ۵. تابع f با ضابطه‌ی زیر مفروض است.

$$f(x) = \begin{cases} ۲ax^۲+b|x| & , x < ۱ \\ \lfloor x^۲-\sqrt{۷}\rfloor & , x = ۱ \\ a\sin(x-۱)+b\lfloor x\rfloor & , x > ۱ \end{cases}$$

اگر این تابع در $x = ۱$ پیوسته باشد، a و b را بیابید.

حل:

$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+}(a\sin(x-۱)+b\lfloor x\rfloor)$

حد راست $= a\sin\circ + b\lfloor ۱^+\rfloor = \circ + b = b$

حد چپ $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-}(۲ax^۲+b|x|) = ۲a+b$

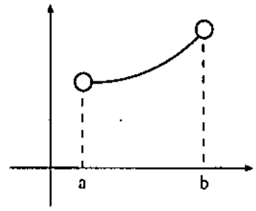
مقدار تابع $= f(۱) = \lfloor ۱-\sqrt{۷}\rfloor = \lfloor ۱-۲/۶\rfloor = \lfloor -۱/۶\rfloor = -۲$

$b = -۲ \ , \ ۲a+b = -۲ \Rightarrow ۲a-۲ = -۲ \Rightarrow a = \circ$

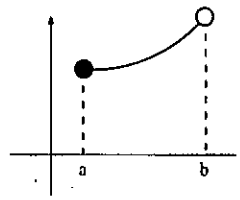
نکته: اگر تابع f در $x_\circ$ و تابع g در $f(x_\circ)$ پیوسته باشند، آن‌گاه تابع gof در $x_\circ$ پیوسته است و اگر تابع g در $x_\circ$ و تابع f در $g(x_\circ)$ پیوسته باشد، آن‌گاه تابع fog در $x_\circ$ پیوسته است.

پیوستگی در یک بازه

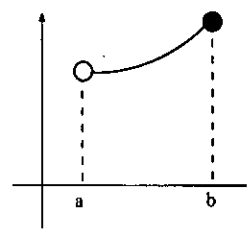
۱ . تابع f را در بازه‌ی (a,b) وقتی پیوسته گوییم که f در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.



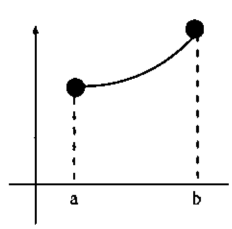
۲ . تابع f را در بازه‌ی $[a,b)$ وقتی پیوسته گوییم که:
اولاً، در تمام نقاط بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.
ثانیاً، در a پیوستگی راست داشته باشد.



۳ . تابع f را در بازه‌ی $(a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که:
اولاً، در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.
ثانیاً، در b پیوستگی چپ داشته باشد.



۴ . تابع f را در بازه‌ی $[a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که:
اولاً، در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.
ثانیاً، در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد.



مثال ۱ . ثابت کنید تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + \lfloor x \rfloor$ در بازه‌ی $[1,2)$ پیوسته است.

حل: اولاً، باید ثابت کنیم، این تابع در بازه‌ی $(1,2)$ پیوسته است.

$$1 < x_0 < 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 < x_0^+ < 2 \\ 1 < x_0^- < 2 \end{cases}$$

حد راست $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 2x_0 + \lfloor x_0^+ \rfloor = 2x_0 + 1$

حد چپ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 2x_0 + \lfloor x_0^- \rfloor = 2x_0 + 1$

مقدار تابع $f(x_0) = 2x_0 + \lfloor x_0 \rfloor = 2x_0 + 1$

پس این تابع در بازه‌ی $(1,2)$ پیوسته است.

ثانیاً، باید ثابت کنیم، این تابع در ۱ از راست پیوسته است.

حد راست $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 + \lfloor 1^+ \rfloor = 2 + 1 = 3$

مقدار تابع $f(1) = 2 + \lfloor 1 \rfloor = 2 + 1 = 3$

پس این تابع در $x = 1$ از راست پیوسته است.

مثال ۲ . تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ مفروض است. ثابت کنید، این تابع در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته است.

حل:

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

اولاً، باید ثابت کنیم، این تابع در بازه‌ی $(-1,1)$ پیوسته است.

$$-1 < x_0 < 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x_0^+ < 1 \\ -1 < x_0^- < 1 \end{cases}$$

حد راست $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sqrt{1 - x_0^2}$

حد چپ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sqrt{1 - x_0^2}$

مقدار تابع $f(x_0) = \sqrt{1 - x_0^2}$ ثانیاً، باید ثابت کنیم، این تابع در $x = -1$ پیوستگی راست و در $x = 1$ پیوستگی چپ دارد.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \sqrt{0^+} = \sqrt{0} \quad \text{و} \quad f(-1) = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sqrt{0^+} = \sqrt{0} \quad \text{و} \quad f(1) = \sqrt{0} = 0$$

بنابراین، این تابع در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته است.