مثلث ارتفاعیه

(قسمت دوم)

● ساسان اسماعیلی شاهرودی (دبیرستان سروش)

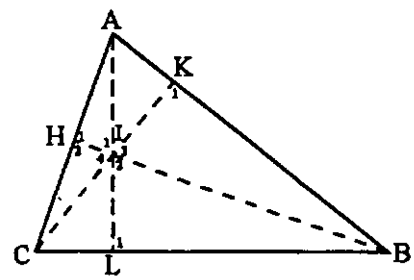
ویژگی هشتم:

در هر مثلث، حاصل ضرب دو قطعه‌ای که توسط مرکز ارتفاعیه بر روی ارتفاعها جدا می‌شوند با هم برابرند یعنی:

$$AI.LI = BI.HI = CI.KI$$

$$\begin{cases}\hat{H}_1 = \hat{L}_1 = \frac{\pi}{2} \\ I_1 = I_2\end{cases} \Rightarrow A\hat{I}H \sim B\hat{I}L \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{HI}{LI}$$

$$\Rightarrow AI.LI = BI.HI \quad (I)$$



$$\begin{cases}\hat{K}_1 = \hat{H}_2 = \frac{\pi}{2} \\ \hat{I}_3 = \hat{I}_4\end{cases} \Rightarrow H\hat{I}C \sim K\hat{I}B$$

$$\Rightarrow BI.HI = CI.KI \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow AI.LI = BI.HI = CI.KI$$

ویژگی نهم:

طول اضلاع مثلث ارتفاعیه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

طبق قضیه سینوسها:
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$

R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC و R' شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه است)

$$\frac{KL}{\sin\hat{H}} = \frac{HL}{\sin\hat{K}} = \frac{HK}{\sin\hat{L}} = 2R'$$

$$\Rightarrow \frac{KL}{\sin 2\hat{B}} = \frac{HL}{\sin 2\hat{C}} = \frac{HK}{\sin 2\hat{A}} = R$$

$$HK = R\sin 2\hat{A} \quad KL = R\sin 2\hat{B} \quad HL = R\sin 2\hat{C}$$

ویژگی دهم:

اگر S مساحت مثلث ABC و P_h نصف محیط مثلث ارتفاعیه باشد داریم:
$$P_h = \frac{S}{R}$$

$$P_h = \frac{1}{2}(HK+LK+LH)$$

$$= \frac{R}{2}\left(\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}\right)$$

طبق رابطهٔ
$$\sin\hat{P} + \sin\hat{q} = 2\sin\left(\frac{\hat{p}+\hat{q}}{2}\right).\cos\left(\frac{\hat{p}-\hat{q}}{2}\right)$$
خواهیم داشت:

$$\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} = 2\left(\frac{2\hat{A}+2\hat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{2\hat{A}-2\hat{B}}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right)$$

لذا:

$$P_h = \frac{R}{2}\left[2\sin\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\right.$$

$$\left.\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right) + 2\sin\hat{C}\cos\hat{C}\right]$$

$$P_h = R\left[\sin\hat{C}\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right) + 2\sin\hat{C}\cos\hat{C}\right]$$

طبق رابطهٔ:

$$\cos\hat{p} + \cos\hat{q} = 2\cos\left(\frac{\hat{p}+\hat{q}}{2}\right) . \cos\left(\frac{\hat{p}-\hat{q}}{2}\right)$$

خواهیم داشت:

$$P_h = R\sin\hat{C}\left[2\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}+\hat{C}}{2} . \cos\frac{\hat{A}-\hat{B}-\hat{C}}{2}\right]$$

$$P_h = 2R\sin\hat{C}\cos\left(\frac{\pi-2\hat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{2\hat{A}-\pi}{2}\right)$$

$$P_h = 2R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C} \quad (I)$$

از طرفی در هر مثلث داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{abc}{4R} = \frac{8R^3\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{4R}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = 2R^2\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C} \quad (II)$$

$$(I),(II) \quad \Rightarrow \; P_h = \frac{S}{R}$$

از طرفی از رابطهٔ (I) می‌توان نتیجه گرفت:

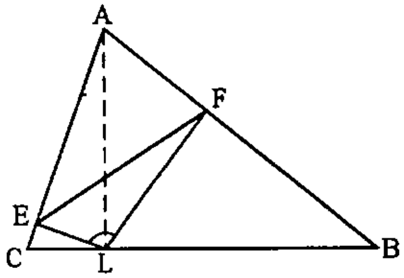
$$2P_h = 4R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$ (محیط مثلث ارتفاعیه)

ویژگی یازدهم:

اگر از یک رأس مثلث ارتفاعیه دو عمود بر دو ضلع مثلث *ABC* فرود آوریم آنگاه طول پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند برابر نصف محیط مثلث ارتفاعیه می‌باشد.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{AL.BC}{2} = \frac{AL.\,2R\sin\hat{A}}{2} = R.AL.\sin\hat{A}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{R} = AL.\sin\hat{A}$$



اگر R_1 شعاع دایره محیطی مثلث EFL باشد خواهیم داشت:

$$EF = 2R_1\sin\hat{L} = 2R_1\sin\left(\pi-\hat{A}\right) = 2R_1\sin\hat{A}$$

از طرفی شعاع دایره محیطی چهارضلعی محاطی EAFL نیز R_1 می‌شود، پس خواهیم داشت:

$AL = 2R_1 \Rightarrow EF = AL.\sin\hat{A}$ (AL قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی EAFL است)

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{R} = AL.\sin\hat{A} \quad \Rightarrow \; EF = P_h$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{R} = P_h$$

اگر L را رأس‌مثلث ارتفاعیه درنظرنگیریم‌به‌عبارت دیگر AL بر BC عمود نباشد نیز رابطهٔ EF = AL. sinA صادق می‌باشد. حال چون $\sin\hat{A}$ عدد ثابتی است کمترین مقدار برای EF وقتی به‌دست می‌آید که AL عمود بر BC باشد پس با تغییر نقطهٔ L بر روی ضلع BC خواهیم داشت:

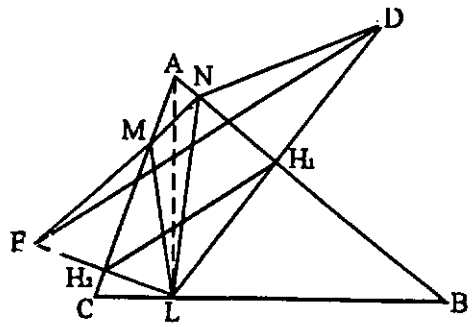
$$EF \geq P_h$$

ویژگی دوازدهم:

در هر مثلث حادّالزاویه بین تمامی مثلثهای محاط در آن، مثلث ارتفاعیه کمترین محیط را داراست.

مثلث دلخواه MNL را محاط در مثلث ABC درنظر می‌گیریم. E و D به‌ترتیب قرینهٔ نقطه L نسبت به اضلاع AC و AB می‌باشند. حال H_1 را به H_2 و E را به D وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} EH_{۲}=LH_{۲} \\ DH_{۱}=LH_{۱} \end{array}\right. \Rightarrow H_{۱}H_{۲} \parallel ED \ , \ H_{۱}H_{۲}=\frac{ED}{۲}$$



طول خط شکستهٔ EMND از طول خط ED بیشتر است، از طرفی طول خط شکستهٔ EMND برابر محیط مثلث MND است و همچنین:

ED وقتی به حداقل خود می‌رسد که $H_{۱}H_{۲}$ به حداقل خود برسد و در ویژگی قبل دیدیم وقتی $H_{۱}H_{۲}$ به حداقل خود می‌رسد که L پای عمود باشد پس حدّاقل اندازه ED می‌تواند برابر محیط مثلث ارتفاعیه باشد لذا اگر L پای عمود نباشد داریم: $ED > ۲P_h$

از طرفی داریم: $ED < P_{\overset{\triangle}{MND}}$ نتیجه می‌شود: $۲P_h < P_{\overset{\triangle}{MND}}$

ویژگی سیزدهم:

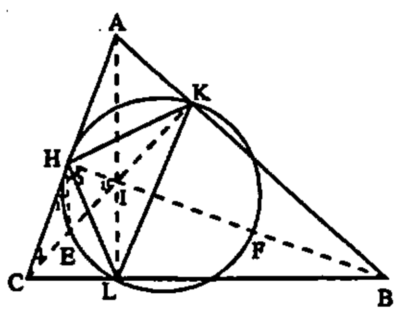
دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه از وسط *AI*، *BI* و *CI* می‌گذرد.

$$\hat{H}_{۲}=\frac{۱}{۲}(EL+LF) \quad (I)$$

$$\hat{I}_{۱}=\frac{۱}{۲}(HE+KF) \quad (II)$$

طبق ویژگی اوّل خواهیم داشت:

$KF=LF$ و $EL=HE$ (III)



$$(I),(II),(III) \Rightarrow \hat{H}_{۲}=\hat{I}_{۱} \Rightarrow EH=EI$$

$$\begin{cases} \hat{I}_{۱}+\hat{C}_{۱}=\frac{\pi}{۲} \\ \hat{H}_{۱}+\hat{H}_{۲}=\frac{\pi}{۲} \quad \Rightarrow \quad \hat{H}_{۱}=\hat{C}_{۱} \quad \Rightarrow \\ \hat{H}_{۲}=\hat{I}_{۱} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} EH=EC \\ EH=EI \end{array}\right. \Rightarrow \quad EC=EI$$

یعنی نقطهٔ E وسط CI است.

برای دو حالت دیگر نیز به همین روش اثبات می‌کنیم.

(تذکر: دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه همان دایرهٔ نه نقطه مثلث ABC است.)

ویژگی چهاردهم:

مساحت مثلث ارتفاعیه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

در هر مثلث داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\ (\text{حاصل ضرب دو ضلع})\ .\ \sin\ (\text{زاویه بین دو ضلع})$$

$$S_{\overset{\triangle}{HKL}}=\frac{۱}{۲}R\sin ۲\hat{B}\,R\sin ۲\hat{C}\sin ۲\hat{A}$$

$$S_{\overset{\triangle}{HKL}}=\frac{۱}{۲}R^{۲}\sin ۲\hat{A}\sin ۲\hat{B}\sin ۲\hat{C}$$

ویژگی پانزدهم:

در هر مثلث حادّالزاویه مساحت مثلث ارتفاعیه از ربع مساحت مثلث *ABC* کوچکتر یا مساوی آن است.

در هر مثلث داریم:

$$\sin ۲\hat{A}\sin ۲\hat{B}\sin ۲\hat{C} \le \sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

پس:

$$۲R^{۲}\sin ۲\hat{A}\sin ۲\hat{B}\sin ۲\hat{C} \le ۲R^{۲}\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

$$۴S_{\overset{\triangle}{HKL}} \le S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{HKL}} \le \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{۴}$$

حالت تساوی مربوط به وقتی است که: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\frac{\pi}{۳}$

ویژگی شانزدهم:

در هر مثلث حادّالزاویه، محیط مثلث ارتفاعیه از نصف محیط مثلث اصلی کوچکتر یا مساوی آن است.

در هر مثلث داریم:

$$\sin\hat{A}\sin\hat{B}+\sin\hat{B}\sin\hat{C}+\sin\hat{C}\sin\hat{A}\le\frac{۹}{۴}\quad (I)$$

و در بحث نامساویها داریم:

$$(a+b+c)\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)\ge ۹\quad (II)$$

$$(I),(II)\Rightarrow \sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}\ge ۴\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

$$۲R\sin\hat{A}+۲R\sin\hat{B}+۲R\sin\hat{C}\ge ۲\times ۴R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

طبق ویژگی دهم خواهیم داشت:

$$P_{\overset{\Delta}{ABC}}\ge ۴P_h\ \Rightarrow\ ۲P_h\le\frac{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{۲}$$

تساوی مربوط به وقتی است که: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\frac{\pi}{۳}$

ویژگی هفدهم:

در هر مثلث رابطه روبه‌رو برقرار است:

$$\frac{AI}{bc}+\frac{BI}{ac}+\frac{CI}{ab}=\frac{۱}{R}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{abc}{۴R}\quad\Rightarrow abc=۴R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

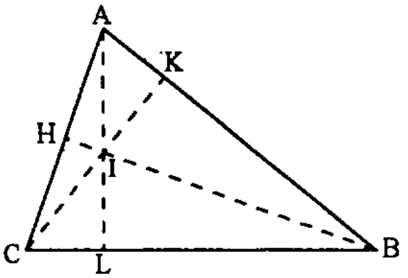
$$\frac{AI}{bc}+\frac{BI}{ac}+\frac{CI}{ab}$$

$$=\frac{a.AI+b.BI+c.CI}{abc}$$

$$=\frac{a(AL-IL)+b(BH-IH)+c(CK-IK)}{۴R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

$$=\frac{۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}-۲S_{\overset{\Delta}{IBC}}+۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}-۲S_{\overset{\Delta}{IAC}}+۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}-۲S_{\overset{\Delta}{IAB}}}{۴R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

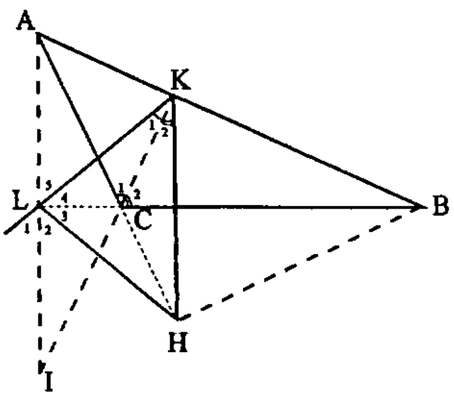
$$=\frac{۴S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{۴R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۱}{R}$$



ویژگی هجدهم:

در هر مثلث با یک زاویه منفرجه مرکز ارتفاعیه بر مرکز یکی از دوایر محاطی خارجی مثلث ارتفاعیه منطبق است.

$$\begin{cases}\hat{L}_۳=\hat{L}_۴\\ \hat{L}_۴+\hat{L}_۵=\frac{\pi}{۲}\\ \hat{L}_۲+\hat{L}_۳=\frac{\pi}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{L}_۵=\hat{L}_۲\\ \hat{L}_۵=\hat{L}_۱\end{cases}\Rightarrow \hat{L}_۱=\hat{L}_۲\,,\ \hat{K}_۱=\hat{K}_۲$$



پس محلّ تلاقی نیمساز خارجی زاویه L و نیمساز داخلی زاویه K که مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث $\overset{\Delta}{HKL}$ می‌باشد، بر مرکز ارتفاعیهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ منطبق است.

ویژگی نوزدهم:

شعاع دایره محاطی مثلث ارتفاعیه از رابطه روبه‌رو به‌دست می‌آید:

$$r'=۲R\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم در هر مثلث رابطهٔ روبه‌رو صادق است:

$$r=\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{P_{\overset{\triangle}{ABC}}}$$

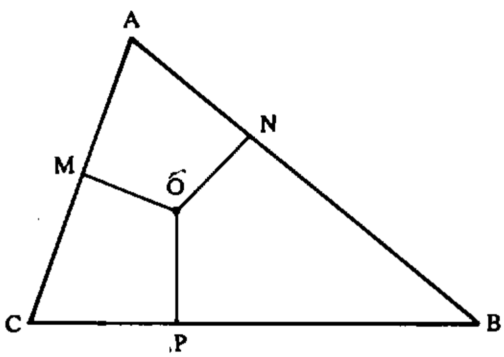
($P_{\overset{\triangle}{ABC}}$ را نصف محیط $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌گیریم و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC است.)

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{OCB}}+S_{\overset{\triangle}{OAB}}+S_{\overset{\triangle}{OAC}}$$

$$=\frac{OM.AC+OP.BC+ON.AB}{2}$$

$$=\frac{r(BC+AC+AB)}{2}$$

$$=\frac{2r.P_{\overset{\triangle}{ABC}}}{2}$$



و در مثلث ارتفاعیه داریم:

$$r=\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{P_{\overset{\triangle}{ABC}}}$$

$$r'=\frac{S_{\overset{\triangle}{HKL}}}{P_h}=\frac{\frac{1}{2}R^2\sin 2\hat{A}\sin 2\hat{B}\sin 2\hat{C}}{2R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}}$$

$$=2R\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

ویژگی بیستم:

الف) اگر l، h و k اضلاع مثلث ارتفاعیه باشند داریم:

$$\frac{l}{a^2}+\frac{h}{b^2}+\frac{k}{c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$=\frac{R\sin 2\hat{A}}{4R^2\sin^2\hat{A}}+\frac{R\sin 2\hat{B}}{4R^2\sin^2\hat{B}}+\frac{R\sin 2\hat{C}}{4R^2\sin^2\hat{C}}$$

$$=\frac{\cos\hat{A}}{a}+\frac{\cos\hat{B}}{b}+\frac{\cos\hat{C}}{c}$$

با توجّه به رابطه کسینوسها در هر مثلث داریم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}\quad\Rightarrow\quad bc\cos\hat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

$$\frac{l}{a^2}+\frac{h}{b^2}+\frac{k}{c^2}=\frac{bc.\cos\hat{A}+ac.\cos\hat{B}+ab.\cos\hat{C}}{abc}$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)+\left(a^2+c^2-b^2\right)+\left(c^2+b^2-a^2\right)}{2abc}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

ب)

$$\frac{\left(b^2-c^2\right)l}{a^2}+\frac{\left(c^2-a^2\right)h}{b^2}+\frac{\left(a^2-b^2\right)k}{c^2}=0$$

$$\frac{\left(b^2-c^2\right)l}{a^2}+\frac{\left(c^2-a^2\right)h}{b^2}+\frac{\left(a^2-b^2\right)k}{c^2}$$

$$=\frac{\left(b^2-c^2\right)R\sin 2\hat{A}}{4R^2\sin^2\hat{A}}+\frac{\left(c^2-a^2\right)R\sin 2\hat{B}}{4R^2\sin^2\hat{B}}$$

$$+\frac{\left(a^2-b^2\right)R\sin 2\hat{C}}{4R^2\sin^2\hat{C}}$$

$$=\frac{\left(b^{2}-c^{2}\right).bc.\cos\hat{A}+\left(c^{2}-a^{2}\right).ac.\cos\hat{B}+\left(a^{2}-b^{2}\right).ab.\cos\hat{C}}{abc}$$

با استفاده از رابطهٔ کسینوسها در مثلث نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\left(b^{2}-c^{2}\right)l}{a^{2}}+\frac{\left(c^{2}-a^{2}\right)h}{b^{2}}+\frac{\left(a^{2}-b^{2}\right)k}{c^{2}}$$

$$=\frac{\left(b^{2}+c^{2}-a^{2}\right)\left(b^{2}-c^{2}\right)+\left(a^{2}+c^{2}-b^{2}\right)\left(c^{2}-a^{2}\right)+\left(a^{2}+b^{2}-c^{2}\right)\left(a^{2}-b^{2}\right)}{2abc}$$

$$=\frac{b^{4}+b^{2}c^{2}-a^{2}b^{2}-b^{2}c^{2}-c^{4}+a^{2}c^{2}+a^{2}c^{2}+c^{4}-b^{2}c^{2}-a^{4}-a^{2}c^{2}+a^{2}b^{2}+a^{4}+a^{2}b^{2}-a^{2}c^{2}-a^{2}b^{2}-b^{4}+b^{2}c^{2}}{2abc}$$

$$=0$$

منابع:

۱) پرویز شهریاری کتاب آشنایی با ریاضیات، ج ۲۷. (انتشارات فردوس.)
۲) ه کوکس تیروس. گریتز بازآموزی و بازشناخت هندسه ـ ترجمه: عبدالحسین مصحفی. (انتشارات مدرسه.)
۳) جلیل‌الله قراگوزلو کتاب مثلثات پایه. (انتشارات فاطمی)
۴) مجله شمارهٔ هشت دوره چهارم از سری مجلات یکان.
۵) مجله شمارهٔ هشت دوره هفتم از سری مجلات یکان
۶) کتاب هندسه سال دوم ریاضی.
۷) کتاب مثلثات سال سوم ریاضی.

تفریح اندیشه ۵

بعد از سرقت، چهار کارمند بانک مشخصات سارق را به دست داده‌اند.

بنابه عقیدهٔ نگهبان بانک، سارق چشمانی آبی داشته، بلند بوده، و کلاه به سر و جلیقه به تن داشته است.

بنا به نظر مسؤول گیشه، چشمان سیاه داشته، کوتاه بوده و جلیقه و کلاه به تن و سر داشته است.

بنا به نظر منشی، چشمان سبز داشته، متوسط القامه بوده، و بارانی و کلاه داشته است.

بنابه عقیدهٔ رئیس بانک، چشمان خاکستری داشته، بلند بوده، جلیقه به تن داشته، اما بی‌کلاه بوده است. بعداً مشخص شد که هر یک از گواهان تنها یکی از چهار توصیف را به‌طور صحیح بیان کرده است و هر یک از جزئیات توسط حداقل یک گواه به درستی توصیف شده است.

توصیفهای مربوطه را در جدولی می‌آوریم:

	چشم	قد	پوشش	کلاه
نگهبان	آبی	بلند	جلیقه	بله
مسؤول گیشه	سیاه	کوتاه	جلیقه	بله
منشی	سبز	متوسط	بارانی	بله
رئیس بانک	خاکستری	بلند	جلیقه	نه

جواب در صفحهٔ ۸۸