وضعیت رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی•

مایکل اشباخر*
ترجمهٔ علیرضا جمالی

عقیدهٔ رایج این است که قضیهٔ رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی در حوالی ۱۹۸۰ ثابت شده است. ولی برهان قضیهٔ رده‌بندی به دلیل طولانی بودن و پیچیدگی آن یک برهان معمولی نیست، و حتی در دههٔ هشتاد تا حدودی محل مناقشه بود. اندکی بعد از اثبات قضیه، گورنشتاین، لیونز، و سالومن (GLS) برنامه‌ای را به‌منظور ساده‌ترکردن بخشهای وسیعی از برهان، و شاید مهم‌تر از آن برای نوشتنِ روشن و دقیق آن در یک‌جا، تنها با توسل به چند کتاب مقدماتی درسی در گروههای متناهی و جبری، و نیز به‌منظور فراهم آوردن برهانِ نتیجه‌های «معروفِ» به‌کار رفته در برهان اصلی آغاز کردند، زیرا این برهانها در متون مربوط پراکنده بود، یا بدتر از آن، در آن متون نیامده بود. ولی برنامهٔ GLS هنوز کاملاً اجرا نشده است، و در طول بیست سال گذشته شکافهایی در برهان اصلی رده‌بندی کشف شده است. بیشتر این شکافها به سرعت از بین رفته‌اند، ولی یکی از آنها مشکلات جدی پدید آورده است. من بحث را با بیان مقدمه‌ای بر این مسأله و قدری زمینه‌چینی شروع می‌کنم.

یادآوری می‌کنیم که گروه G ساده است هرگاه ۱ و G تنها زیرگروههای نرمال G باشند؛ یا معادل آن، $G \cong G/۱$ و $G/G \cong ۱$ تنها گروههای عاملی [خارج‌قسمتی] G باشند.

فرض می‌کنیم G متناهی باشد، و نرمال بودن زیرگروه H از G را به‌صورت $H \trianglelefteq G$ نشان می‌دهیم. یک سری نرمال برای G عبارت است از دنباله‌ای مانند

$$۱ = G_۰ \triangleleft G_۱ \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$$

و خانوادهٔ عاملهای این سری یعنی خانوادهٔ

$$(G_{i+۱}/G_i : ۰ \leq i < n)$$

مرکب از گروههای عاملی که از دنباله حاصل می‌شوند. ملاحظه کنید که سریْ ماکسیمال است (یعنی، نمی‌توان جمله‌ای اضافی را بین G_i و $G_{i+۱}$ درج کرد) دقیقاً وقتی که هر عامل ساده باشد. این سری ماکسیمال را، سری ترکیبی می‌نامند، و قضیهٔ زیر را دربارهٔ آن داریم:

قضیهٔ ژوردان-هولدر. همهٔ سریهای ترکیبی برای G دارای طول یکسان و خانوادهٔ عاملهای ساده (نامرتب) یکسان‌اند.

عاملهای ساده در یک سری ترکیبی از G را عاملهای ترکیبی گروه می‌گویند. این عاملها G را با تقریب یکریختی مشخص نمی‌کنند، ولی ساختار کلی G را تا حد زیادی تعیین می‌کنند. از این‌رو گروههای ساده شبیه اعداد اول در نظریهٔ اعداداند، اگرچه در اینجا «تجزیهٔ یکتا» را به‌طور کامل نداریم.

مثال. یادآوری می‌کنیم G حل‌پذیر است هرگاه مرتبهٔ هر یک از عاملهای ترکیبی آن اول باشد. همچنین یادآوری می‌کنیم که بنابر قضیهٔ گالوا ردهٔ این گروهها، ردهٔ گروههای متناظر با چندجمله‌ای‌هایی است که با رادیکال قابل حل‌اند. به‌علاوه، به موجب نتیجه‌ای از فیلیپ هال، گروههای حل‌پذیر در تعمیم مهمی از قضیهٔ سیلو صدق می‌کنند، و در واقع این ویژگیْ گروههای حل‌پذیر را مشخص می‌کند. این تعمیم بدین قرار است: اگر G حل‌پذیر از مرتبهٔ n، و m مقسوم‌علیهی از n باشد به‌طوری که $(m, n/m) = ۱$ آنگاه G زیرگروهی از مرتبهٔ m دارد، همهٔ زیرگروههای G از مرتبهٔ m در G مزدوج‌اند، و هر زیرگروه از مرتبهٔ مقسوم‌علیهی از m جزء زیرگروهی از مرتبهٔ m است.

می‌توان تحلیلی از گروههای متناهی بر اساس حل دو مسأله زیر ارائه داد:

مسألهٔ رده‌بندی. همهٔ گروههای سادهٔ متناهی را مشخص کنید.

مسألهٔ توسیع. گروههای X و Y مفروض‌اند، همهٔ توسیعهای X با Y را مشخص کنید؛ یعنی همهٔ گروههای G را که دارای زیرگروه نرمالی مانند Hاند که $H \cong X$ و $G/H \cong Y$، معین کنید.

در عمل، مسألهٔ توسیع جز در حالتهای خاص، بسیار دشوار است. بهتر است هنگام مواجه شدن با مسأله‌ای دربارهٔ گروههای متناهی، به‌طور خیلی دقیق به گروه متناهی عام نپردازیم، بلکه به‌جای آن کوشش کنیم تا مسأله یا مسألهٔ وابسته‌ای را به سؤالاتی دربارهٔ گروههای ساده یا گروههای کاملاً مرتبط با گروههای ساده تقلیل دهیم. سپس با استفاده از رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی و اطلاعات موجود دربارهٔ گروههای ساده، مسألهٔ تقلیل‌یافته را حل کنیم. توضیح آنکه این روش تنها زمانی عملی است که معلومات کافی دربارهٔ گروههای ساده داشته باشیم تا مسأله را برای این گروهها حل کنیم؛ در همین‌جاست که رده‌بندی درکار می‌آید: این قضیه فهرست گروههایی را به‌طور صریح به‌دست می‌دهد که با استفاده از توصیف مؤثر این گروهها که با رده‌بندی فراهم آمده، به تفصیل قابل مطالعه‌اند.

این رهیافت به حل مسائل نظریهٔ گروهی از حوالی ۱۹۸۰ که رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی انجام‌یافته تلقی شد، به‌کار گرفته شده است. این رهیافت بی‌اندازه موفقیت‌آمیز بوده است: تقریباً همهٔ مسائل عمدهٔ حل‌نشده در نظریه گروههای متناهی تا پیش از ۱۹۸۰، اکنون حل شده‌اند. به‌علاوه، نظریهٔ گروههای متناهی برای حل مسائل بسیاری از شاخه‌های ریاضیات به‌کار رفته است.

خلاصه اینکه، رده‌بندی مهم‌ترین نتیجه در نظریهٔ گروههای متناهی است، و اهمیت روزافزونی در سایر حوزه‌های ریاضیات کسب کرده است.

اینک نوبت بیانِ قضیهٔ رده‌بندی است:

قضیهٔ رده‌بندی. هر گروه متناهی ساده با یکی از گروههای زیر یکریخت است:

۱. یک گروه از مرتبهٔ اول.
۲. یک گروه متناوب.
۳. یک گروه از نوع لی.
۴. یکی از ۲۶ گروه پراکنده.

ملاحظه کنید که بیان قضیهٔ رده‌بندی به‌صورت بالا، سادگی فریبنده‌ای دارد. برای اینکه مضمون واقعی آن روشن شود، باید منظور از «گروه از نوع لی» و «گروه پراکنده» را تعریف کرد. محدودیت جا در اینجا مانع از تعریف چنین گروههایی است. بنابراین ملاحظات زیر را به‌جای آن می‌آوریم: با چند مورد استثنا در گروههای پراکنده، هر گروه G را که در قضیه ظاهر می‌شود می‌توان اساساً به‌عنوان گروه خودریختی‌های شیء ریاضیِ نسبتاً قابل‌فهمی مانند X در نظر گرفت. وجود X برهانی از وجود G را به‌دست می‌دهد، ولی، مهم‌تر آنکه، نمایش G بر X، ابزار مطالعهٔ G و کسبِ اطلاعات دربارهٔ نمایشهای گروههای ساده را در مقولات مختلف، به‌خصوص نمایشهای آنها به‌صورت گروههای جایگشتی (یعنی ساختار زیرگروهی G) و گروههای خطی، فراهم می‌کند. بررسی ویژگی خاصی از این‌گونه نمایشها معمولاً نوعی ورودی اضافی است که برای به‌کار بردن رده‌بندی در حل مسألهٔ مفروضی لازم است.

در واقع برخی از این‌گونه اطلاعات برای اثبات قضیهٔ رده‌بندی در وهلهٔ اول لازم بود. به عبارت دیگر، در اثبات قضیهٔ رده‌بندی، از فهرست $\mathcal{K}$ متشکل از گروههای ساده‌ای که در صورت قضیه ذکر شد شروع می‌کنیم و مثال نقض مینیمالی را برای قضیهٔ رده‌بندی در نظر می‌گیریم: یک گروه سادهٔ متناهی مانند G که با شرط $G \notin \mathcal{K}$ مینیمال است. بنابراین هر زیرگروه سرهٔ J از G یک $\mathcal{K}$ـگروه است: اگر $J \leq H \trianglelefteq K$ و H/K ساده باشد، آنگاه بخش H/K در $\mathcal{K}$ است. برهان رده‌بندی تا حد زیادی به حقایقی دربارهٔ ساختار زیرگروهی و نمایشهای خطیِ $\mathcal{K}$ـگروهها وابسته است.

در طول این مقاله در مورد دو اقدام مختلف بحث خواهیم کرد: «برهان اصلی» رده‌بندی و کارهای انجام‌شده از حدود سال ۱۹۸۰ که با هدف اصلاح، خلاصه کردن، و آوردن برهانِ دقیق قضیهٔ رده‌بندی در یک‌جا صورت گرفته است. برهان اصلی تنها در پی حصول اطمینان از این بود که متون موجود واقعاً مشتمل بر همهٔ اجزای برنامه‌ای است که برای اثبات قضیهٔ رده‌بندی در نظر گرفته شده است. هدف اقدام دوم این است که شرحی خواندنی‌تر ارائه دهد که موجد سطح بالاتری از اطمینان باشد.

متنی دو جلدی در تشریح بخشی از برهان اصلی از گورنشتاین ([G1] و [G2]) در دست است. کتابهای گورنشتاین سعی در ارائه جزئیات برهان ندارند، بلکه تنها کلیاتی از آنچه لازم است به‌دست می‌دهند. گورنشتاین پیش از تکمیل جلد سوم این سلسله کتابها درگذشت.

بخش اعظم اقدام دوم برنامه‌ای است که گورنشتاین، لیون، و سالومون (GLS) اجرای آن را شروع کردند. هر چند این برنامه سعی در مطرح کردن همهٔ بخشهای برهان ندارد، اگر همان‌طور که پیش‌بینی می‌شود به انجام برسد به بیشتر بخشها خواهد پرداخت. این سلسله آثار را انجمن ریاضی آمریکا (AMS) در دست انتشار دارد، و در حال حاضر که مشغول نوشتن این مقاله هستم، پنج جلد از آنها در سری [GLS] منتشر شده است. در [GLS] مراجعی مربوط به سایر بخشهای اقدام دوم نیز خواهید یافت.

من رده‌بندی را قضیه قلمداد کرده‌ام و اینک بر این باورم که چنین است. بیست سال پیش نیز رده‌بندی را قضیه به‌شمار می‌آوردم. ولی ده سال پیش، وقتی از رده‌بندی به‌عنوان قضیه یاد می‌کردم، می‌دانستم که دقیقاً چنین نیست، زیرا متخصصان تا آن موقع آگاه شده بودند که بخش مهمی از اثبات به‌طور کامل انجام و نوشته نشده است. به عبارت دقیق‌تر، گروههای موسوم به «گروههای شبه تُنُک» به اندازهٔ کافی در برهان اصلی مورد بررسی قرار نگرفته بودند. استیو اسمیت[1] و من با هفت سال کار سرانجام گروههای شبه تنک را رده‌بندی کردیم و این شکاف را در برهان قضیهٔ رده‌بندی پر کردیم. نوشتن قضیهٔ خود را سال پیش به اتمام رساندیم که (احتمالاً در ۲۰۰۴) به‌وسیلهٔ انجمن ریاضی آمریکا منتشر خواهد شد. بعداً این نتیجه را بیان خواهم کرد؛ باید به آن به‌عنوان جزئی از برهان اصلی و اقدام دوم نگریست.

اکنون نوبت ذکرِ بعضی جزئیات است: برهان رده‌بندی با مطالعهٔ زیرگروههای موسوم به زیرگروههای موضعی G شروع می‌شود. فرض کنیم p یک عدد اول باشد. یک زیرگروه pـموضعی G عبارت است از نرمالساز یک pـزیرگروه غیربدیهی G.

فرض کنیم G مثال نقض مینیمال ما باشد. می‌توان چنین تصور کرد که برهان رده‌بندی از دو گام زیر تشکیل شده است:

گام ۱. ثابت کنید ساختار موضعی G شبیه ساختار موضعی عضوی از $\mathcal{K}$ مانند $\overline{G}$ است.

گام ۲. با استفاده از شباهت موجود در گام ۱ ثابت کنید که $G \cong \overline{G}$.

برداشتن گام ۲ برای گروههای پراکنده یکی از بخشهای اقدام دوم است که [GLS] به آن نمی‌پردازد. اما، پس از برهان اصلی پیشرفت بسیار زیادی در مورد گام ۲ حاصل شده است. بسیاری از برهانهای اصلی وجود و یکتایی گروههای پراکنده به کمک رایانه صورت گرفته و ریاضیات به‌کار رفته در آنها

1. Steve Smith

اغلب بی‌جهت و پیچیده بود. در بیست سال گذشته، روشهایی مجهز به ابزارهای نظریهٔ ترکیبیاتی گروهها و یا توپولوژی جبری پیدا شده‌اند که بررسی یکتایی در گام ۲ را به‌نحوی ساده‌تر و مفهومی‌تر میسر می‌سازند و تقریباً همهٔ محاسبات رایانه‌ای را کنار می‌گذارند. ولی به عقیدهٔ من برای برخی از برهانهای وجودی و یکتایی قدیمی که به کمک رایانه صورت گرفته‌اند، جانشینی پیدا نشده است؛ به‌عنوان مثال، برهان یکتایی گروه تامسن[1] و برهان وجود گروه اونان[2] هنوز احتمالاً به کمک ماشین نیاز دارند. بیش از این دربارهٔ گام ۲ صحبت نمی‌کنم و به‌جای آن به گام ۱ می‌پردازم.

گروه سادهٔ متناهی عام یک گروه متناهی از نوع لی است. چنین گروهی با نمایشی به‌صورت یک گروه خطی توصیف می‌شود، مثلاً به‌صورت $G \leq GL(V)$ که در آن V یک فضای برداری متناهی‌بعد روی میدانی متناهی مانند F است. بنابراین G مشخصه‌ای چون عدد اول p دارد که همان مشخصهٔ میدان F است. همین‌طور، رتبهٔ لیِ G مبین «اندازهٔ» G است، و برای مقصودی که داریم می‌توانیم رتبهٔ لی را تقریباً همان بعد V بگیریم. بالاخره، به‌ازای عدد اول مفروض r، ساختار موضعی G در حالتی که $r = p$ با حالتی که $r \neq p$ از لحاظ کیفی متفاوت است. برای اجرای گام ۱ این مفاهیم مربوط به گروههای خطی را باید به مفاهیم وابسته در گروههای مجرد ترجمه کنیم.

فرض کنیم p عددی اول، G گروهی متناهی، و H یک زیرگروه pـموضعی G باشد. زیرگروه H را دارای مشخصهٔ p گوییم در صورتی‌که

$$C_H(O_p(H)) \leq O_p(H)$$

که در آن $O_p(H)$ عبارت است از بزرگ‌ترین pـزیرگروه نرمال H، و به‌ازای $U \subseteq G$، $C_H(U)$ زیرگروه متشکل از همهٔ اعضایی از G است که با هر عضو U تعویض‌پذیرند. گوییم G با مشخصهٔ pـنوع است هرگاه هر زیرگروه pـموضعی G با مشخصهٔ p باشد، و گوییم G با مشخصهٔ زوج است هرگاه به‌ازای هر زیرگروه ۲ـموضعی H از G که حاوی یک ۲ـزیرگروه سیلوی G است، H با مشخصهٔ ۲ باشد. نتیجه می‌شود که هر گروه از نوع لی و با مشخصهٔ p دارای مشخصهٔ pـنوع است.

به دلایلی که وارد آن نمی‌شوم، عدد اول ۲ نقش خاصی در نظریهٔ موضعی گروههای سادهٔ متناهی دارد (به‌عنوان مثال، بنابر قضیهٔ فایت‌ـتامسن [FT] گروههای سادهٔ غیرآبلی از مرتبهٔ زوج‌اند.) بنابراین در برهان اصلی تقسیم‌بندی زیر پیش می‌آید:

حالت I. مثال نقض مینیمالِ G با مشخصهٔ ۲ـنوع است.
حالت II. G با مشخصهٔ ۲ـنوع نیست.

گروه عام که در حالت I ظاهر می‌شود گروهی از نوع لی با مشخصهٔ ۲ است، در حالی‌که تقریباً همهٔ گروههای سادهٔ دیگر در حالت II نمایان می‌شوند.

یک تقسیم‌بندی هم برحسب اندازه وجود دارد که تقریباً با مفهوم اندازه برای گروههایِ از نوع لی متناظر است: به‌ازای عدد اول مفروض p، و گروه متناهی G، pـرتبه G که با $m_p(G)$ نشان داده می‌شود، بنابر تعریف، بُعد ماکسیمال یک زیرگروه آبلی G با نمای p است که به‌عنوان یک فضای برداری روی میدانی از مرتبهٔ p در نظر گرفته می‌شود. در حالت II، «اندازهٔ» G را می‌توان ۲ـرتبهٔ G یعنی $m_2(G)$ گرفت. در حالت I، اندازه عبارت است از پارامتر $e(G)$ که تامسن آن را در مقالهٔ nـگروه [T] تعریف کرده است (الگوی تمام تحقیقاتِ بعدی در حالت I):

$$e(G) = \max \left\{ m_p(H) : \begin{array}{r} \text{یک [زیرگروه] ۲ـموضعی } G \text{، } H \\ \text{و } p \text{ یک عدد اول است} \end{array} \right\}.$$

گروه G را شبه‌تُنُک می‌نامیم هرگاه $e(G) \leq 2$. گروههای «کوچک» در حالت I گروههای شبه‌تُنُک هستند. بنابراین در برهان اصلی، در تقسیم‌بندیِ خود چهار دسته داریم که متناظرند با گروههای بزرگ و کوچک با مشخصهٔ ۲ـنوع و گروههای بزرگ و کوچکی که دارای مشخصهٔ ۲ـنوع نیستند. گروههای شبه‌تنک با مشخصهٔ ۲ـنوع یکی از چهار دسته را تشکیل می‌دهند.

در برنامهٔ GLS، یکی از تقسیم‌بندیها با تغییر تعریف «مشخصه» عوض می‌شود. چون تعریف GLS فنی است، آن را نمی‌آورم. ولی استیواسمیت و من در بررسی گروههای شبه‌تنک برای آنکه تعریف تغییریافتهٔ GLS را در کار آوریم، با مفهوم متفاوتی از مشخصه نیز کار می‌کنیم. توضیح اینکه G دارای مشخصهٔ زوج است هرگاه به‌ازای هر [زیرگروه] ۲ـموضعیِ حاوی یک ۲ـزیرگروه سیلوی G، $C_H(O_2(H)) \leq O_2(H)$. بنابر تعریف گوییم G یک QTKEـگروه است هرگاه G شبه‌تنک با مشخصهٔ زوج، و هر بخش سادهٔ سرهٔ G در $\mathcal{K}$ باشد.

رده‌بندی QTKEـگروهها. (اشباخرـاسمیت) فرض کنیم G یک QTKEـگروه سادهٔ غیرآبلی باشد. در این‌صورت G با یکی از گروههای زیر یکریخت است:

۱. گروهی از نوع لی با مشخصهٔ ۲ و رتبهٔ لیِ حداکثر ۲، غیر از $U_5(q)$.
۲. $L_4(2)$، $L_5(2)$، $Sp_6(2)$، یا $U_5(4)$.
۳. گروه متناوب A_9.
۴. $L_2(p)$ که در آن p یک عدد اول مرسن یا فرماست، $L_3(3)$، $U_3(3)$، $L_4(3)$، $U_4(3)$، یا $G_2(3)$.
۵. یکی از ۱۱ گروه پراکنده: یک گروه ماتیو، یک گروه یانکو[1] به استثنای J_1، HS، He، یا Ru.

برهان این قضیه را انجمن ریاضی آمریکا در [AS] در دو جلد منتشر خواهد کرد. این برهان تقریباً ۱۲۰۰ صفحه است. طولانی بودن برهان تا اندازه‌ای ناشی از پیچیدگی آن است، ولی ضمناً ناشی از سبکی است که در توصیف موضوع در پیش گرفته‌ایم که نسبت به آنچه معمولاً در برهان اصلی قضیهٔ رده‌بندی دیده می‌شود، مشروح‌تر است، و نیز حاکی از تصمیم ماست که خواستار خودکفا بودن بحثمان تا حد امکان هستیم. در واقع، یکی از دو مجلد به زیربنای نظریهٔ گروهی، مانند برهانهای قضایا و حکمهای سنتی مربوط به $\mathcal{K}$ـگروهها اختصاص دارد.

تا جایی که اطلاع دارم، قضیهٔ اصلی [AS] آخرین شکاف را در برهان اصلی پرمی کند، بنابراین (عجالتاً) قضیهٔ رده‌بندی را می‌توان یک قضیه تلقی کرد. از طرف دیگر، امیدوارم در مورد اهمیت این موضوع قانع شده باشید که برنامهٔ رده‌بندی باید با نوشتن برهان دقیق و قابل اعتمادتری تکمیل شود تا احتمال بروز شکافهای دیگری در آینده کم شود. بنابراین بحث از وضعیت رده‌بندی بدون ذکر اینکه چه کارهایی در این برنامه باید انجام شود کامل نخواهد شد.

1. Thompson 2. O'Nan

1. Janko

یادآوری می‌کنیم این شرط که G دارای مشخصهٔ زوج باشد از این شرط که G دارای مشخصهٔ ۲ـنوع باشد ضعیف‌تر است؛ از این‌رو اگر به‌جای تقسیم‌بندی در برهان قضیهٔ اصلی یک تقسیم‌بندی مبتنی بر شرط مشخصهٔ زوج در نظر گرفته شود، گروههای بیشتری در حالت I ظاهر می‌شوند. GLS با گروههایی موسوم به نوع زوج سروکار دارد؛ و باز، این شرط ضعیف‌تر از شرط مشخصهٔ ۲ـنوع است، بنابراین گروههای زیادتری نیز در حالت I در تقسیم‌بندی آنها نمایان می‌شود، و در نتیجه این قسمت از مسأله مشکل‌تر می‌شود. اما استیواسمیت و من، به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ اصلی خود، گروههای شبه‌تنک از نوع زوج را نیز در [AS] مشخص می‌کنیم؛ این نتیجه در مورد گروههای شبه‌تنک در رهیافت GLS به رده‌بندی ضرروی است. بنابراین مشکلاتی که در بررسی ردهٔ وسیع‌تر گروهها در حالت توسعه‌یافتهٔ I پیش آمده‌اند دست‌کم در مورد گروههای کوچک حالت I از بین رفته است.

در برهان اصلی رده‌بندی، حالت II از نظر زمانی پیش از حالت I مورد بحث قرار گرفت، مدت زیادی برای حالت II صرف شد، و افراد متعددی در این حالت تحقیق کردند. احتمالاً در نتیجهٔ اینها، بحث مربوط به بررسی حالت II در برهان اصلی سرراست‌تر از بحث مربوط به حالت I است. مجلد ششم در سلسله کتابهای [GLS]، گروههای کوچک را (با تعریف مجدد) در حالت II بررسی می‌کند. GLS از مرحله‌ای به بعد، گروههای بزرگ را در حالتهای I و II با هم مورد بحث قرار می‌دهد؛ این کار در جلد پنجم آن آغاز می‌شود و در چند جلد آتی کامل خواهد شد. از این‌رو آن بخش از اقدام دوم که به این زودی تکمیل نخواهد شد مرحلهٔ اول حالت I است.

رهیافتی که برای بررسی گروههای بزرگ در حالت I به‌کار می‌رود عطف توجه به زیرگروههای pـموضعی به‌ازای اعداد اول فرد p، و در عین حال، در نظر داشتن زیرگروههای ۲ـموضعی است. این رهیافت به تعریفهای زیر منجر می‌شود: به‌ازای زیرگروه ۲ـموضعیِ مفروض H، $\sigma(H)$ را به‌صورتِ

$$\sigma(H) = \{p : m_p(H) > ۲ \text{ و } p \text{ یک عدد اول فرد است}\}$$

تعریف می‌کنیم، و σ را اجتماع همهٔ مجموعه‌های $\sigma(H)$ می‌گیریم، که در آن H در مجموعهٔ زیرگروههای ۲ـموضعی G تغییر می‌کند. با زیرگروههای pـموضعی، به‌ازای $p \in \sigma$، کار می‌کنیم.

در برهان اصلی، دو مسأله در حالت I مستلزم بررسی ویژه‌اند:

الف) حالت یکتایی: یک زیرگروه ۲ـموضعی مانند H وجود دارد که $\sigma(H) \neq \phi$ و H به‌ازای هر p از $\sigma(H)$، قویاً pـنشانده‌شده در G است؛ یعنی به‌ازای هر g از $G - H$، $|H \cap H^g|$ نسبت به p اول است.

ب) حالت $e(G) = ۳$.

گورنشتاین، لیونز، و سالومن در آغاز امیدوار بودند که بتوان روشهای جدیدی را که بعد از ۱۹۸۰ ابداع شدند (مانند روش موسوم به روش ملغمه[1]) برای بررسی هر دو حالتِ (الف) و (ب) برای ردهٔ وسیع‌تر گروههای نوع زوج به‌کار برد، و برنامهٔ آنها مبتنی بر این فرض بود که متخصصان این روشها از عهده هر دو حالت برخواهند آمد. اما، تاکنون چنین اتفاقی نیفتاده است، بنابراین بررسی حالتهای (الف) و (ب) در گروههای از نوع زوج شاید بزرگ‌ترین مانع در برابر تکمیل اقدام دوم باشد. نتایج کار در این حالت در گروههای با مشخصهٔ ۲ـنوع در برهان اصلی به‌صورت یک مدل در دست است، ولی روشن نیست که مسائل تا چه اندازه‌ای در گروههای نوع زوج دشوارند. گرنوت‌اشتروث[1] و اینا کورچاگینا[2]، به‌ترتیب، کارهایی اولیه در [حالتهای] (الف) و (ب)، با شرط اینکه G از نوع زوج است، انجام داده‌اند. حالت (ب) به بررسی ویژه‌ای نیاز دارد، زیرا تابعگونهای مشخص‌کنندهٔ متفاوتی (ر. ک. جلدهای ۱ و ۲ی [GLS]) در pـرتبهٔ ۳ و pـرتبهٔ بزرگ‌تر از ۳ به‌کار می‌روند.

بالاخره، علاوه بر برهان اصلی رده‌بندی و رهیافت نسل دوم یعنی GLS، یک برنامهٔ نسل سوم هم هست که محققان چندی درگیر آن هستند، به‌خصوص اولریش میرفرانکفلد[3]، برند اشتلماخر[4]، و گرنوت اشتروث که همهٔ گروههای با مشخصهٔ ۲ـنوع (و شاید سرانجام همهٔ گروههای با مشخصهٔ زوج) را به کمک روش ملغمه بررسی خواهند کرد. استیواسمیت و من درکار خود [AS] صورتهای گوناگونی از این روش را به‌کار برده‌ایم. احتمال دارد این رهیافت بررسی بهتری از حالت I را دست‌کم در حالت (ب) میسر سازد.

مراجع

[AS] M. ASCHBACHER and S. SMITH, *The Classification of Quasithin Groups*, Math. Surveys Monogr., Amer. Math. Soc., Providence, RI, to appear.

[FT] J. THOMPSON and W. FEIT, Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 775-1029.

[G1] D. GORENSTEIN, *Finite Simple Groups; An Introduction to Their Classification*, Plenum, New York, 1982.

[G2] ———, *The Classification of the Finite Simple Groups, Volume I*, Plenum, New York, 1983.

[GLS] D. GORENSTEIN, R. LYONS, and R. SOLOMON, *The Classification of the Finite Simple Groups*, vol. 40, Math. Surveys Monogr., Amer. Math. Soc., Providence, RI; Number 1: 1995, Number 2: 1996, Number 3: 1997, Number 4: 1999, Number 5: 2002.

[T] J. THOMPSON, Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **74** (1968), 383-437; II, *Pacific J. Math.* **33** (1970), 451-536; III, *Pacific J. Math.* **39** (1971), 483-534; IV, *Pacific J. Math.* **48** (1973), 511-592; V, *Pacific J. Math.* **50** (1974), 215-297; VI, *Pacific J. Math.* **51** (1974), 537-630.

* * * * * *

• Michael Aschbacher, "The status of the classification of the finite simple groups," *Notices Amer. Math. Soc.*, (7) **51** (2004) 736-740.

* مایکل اشباخر از معروف‌ترین متخصصان نظریهٔ گروهها و صاحب بسیاری از قضایای عمیقی است که به رده‌بندی گروههای متناهی ساده انجامیده‌اند. وی در حال حاضر استاد ریاضیاتِ مؤسسهٔ فناوری کالیفرنیا (کَلتِک) است. از جمله افتخارات اشباخر عضویت در آکادمی ملی علوم آمریکا و دریافت جایزهٔ کول (Cole) در سال ۱۹۸۰ است. نشانی اینترنتی او:

asch@its.caltech.edu

1. Gernot Stroth 2. Inna Korchagina 3. Ulrich Meierfrankefeld
4. Bernd Stellmacher

1. amalgam method