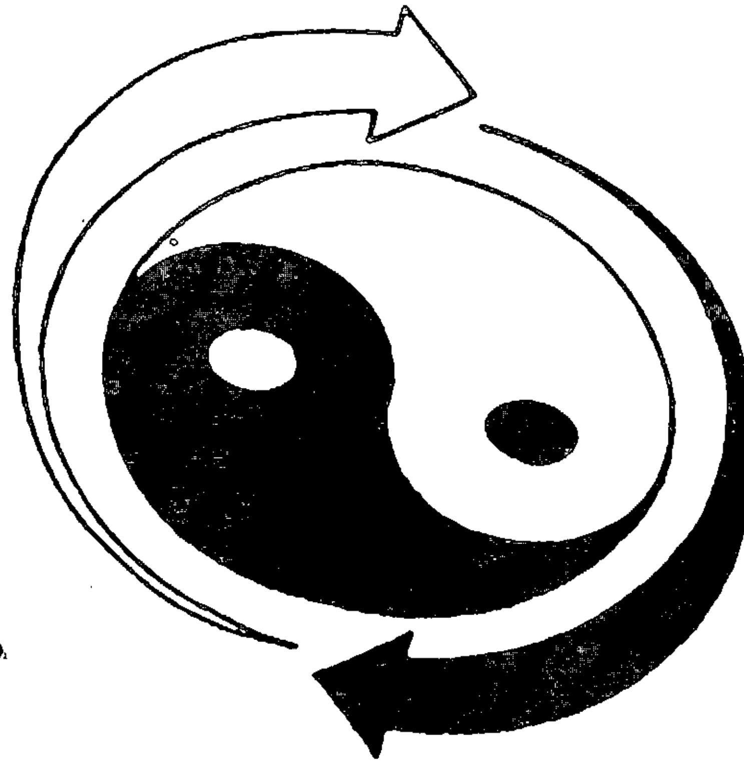
ماکزیمم و مینیمم



● امیرمنصور خان محمّد و مجید اعتماد سعید
(دبیرستان سروش)

بحث ماکزیمم و مینیمم یکی از جالب‌ترین و کارامدترین مباحث ریاضی است که در تمامی شاخه‌های ریاضی چون هندسه، جبر و ... کارآمد است و به کمک آن می‌توان مسایل متعددی در زمینه‌های مختلف ریاضی حل کرده و به نتایج جالبی دست یافت.

◄ تعریف:

گویند تابع به معادله $y=f(x)$ به ازای $x=a$ ماکزیمم نسبی است به شرطی که برای مقادیر بسیار کوچک α داشته باشیم:

$$f(a+\alpha)<f(a)\ ,\ \ f(a-\alpha)<f(a)$$

در واقع در منحنی نمایش تغییرات $y=f(x)$ عرض نقطه‌ای که به ازای $x=a$ به‌دست آمده است از نقاط مجاور بیشتر است. همچنین تابع به معادله $y=f(x)$ به ازای $x=b$ مینیمم نسبی است وقتی که برای مقادیر بسیار کوچک α داشته باشیم:

$$f(b+\alpha)>f(b)\ ,\ \ f(b-\alpha)>f(b)$$

وقتی که می‌گوییم تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $a\le x\le b$ به ازای $x=m$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق است به این معناست که به ازای $x=m$ حداکثر یا حداقل مقدار برای y به دست می‌آید.

به زبان ساده‌تر اگر عبارت جبری $P(x,y,\cdots,z)$ و مقدار معین m وجود داشته باشد که نابرابری $P\le m$ به ازای هر مقدار دلخواه متغیرها برقرار باشد در این صورت مقدار m را ماکزیمم مطلق عبارت P گویند. و اگر نابرابری $P\ge m$ برقرار شود m را مینیمم مطلق عبارت P نامند.

◄ قضایای ماکزیمم حاصلضرب:

برای حل ماکزیمم و مینیمم معمولاً به قضایایی رجوع می‌شود که در این باره ارائه شده‌اند. اکنون به ذکر و اثبات آنها می‌پردازیم:

۱ــ اگر مجموع چند متغیر مقدار ثابت باشد حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که آن متغیرها با هم برابر باشند.

اثبات اول: فرض کنیم n متغیر مثبت x ، y ، z ، ...، و t مجموع ثابتی داشته باشند:

$$x+y+z+\cdots+t=na$$

همان متغیرها را به‌صورت حاصل‌ضرب در نظر می‌گیریم:

$$P=xyz\cdots t$$

چون مجموع را na گرفته‌ایم وقتی که این متغیرها برابر نباشند لااقل یکی از آنها از a بزرگتر و یکی دیگر از a کوچکتر است. اگر $x>a$ و $y<a$ باشد و فرض کنیم $x=a+\alpha$ حاصلضرب:

$$P_1=a(y+\alpha)z\ldots t$$

همان مجموع na را داراست یعنی باز هم مجموع آنها مقدار ثابتی است. (چون از x به اندازهٔ α کم کرده‌ایم و به y به همان اندازه افزوده‌ایم.)

حال عبارت $P_1 - P$ را تشکیل می‌دهیم:

$$P_1 - P = Z \dots t[a(y+\alpha) - (a+\alpha)y]$$

$$P_1 - P = Z \dots t[(a-y)\alpha]$$

مقدار داخل کروشه مثبت است زیرا فرض کردیم $y < a$ باشد بنابراین داریم:

$$P_1 - P > 0 \Rightarrow P_1 > P$$

معلوم شد که اگر یکی از متغیرها برابر a شود حاصل‌ضرب بزرگ می‌شود. با این استدلال درمی‌یابیم که اگر همهٔ متغیرها برابر با a شوند حاصل‌ضرب حداکثر خواهد بود.

۲ــ اگر x، y، z، ... و t متغیرهای مثبت به مجموع ثابت باشند حاصلضرب

$$x^m.y^n.z^p. \dots . t^q$$

وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \dots = \frac{t}{q}$$

(این قضیه در حقیقت تعمیم‌یافته ای از قضیهٔ قبل است.)

اثبات دوم: مقادیری از x، y، z، ... و t که عبارت $x^m.y^n.z^p. \dots . t^q$ را ماکزیمم کنند عبارت $\frac{x^m}{m^m}.\frac{y^n}{n^n}.\frac{z^p}{p^p} \dots \frac{t^q}{q^q}$ را هم ماکزیمم خواهند کرد، ولی عبارت اخیر را می توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(\frac{x}{m}.\frac{x}{m}.\dots.\frac{x}{m})(\frac{y}{n}.\frac{y}{n}.\dots.\frac{y}{n})(\frac{z}{p}.\frac{z}{p}.\dots.\frac{z}{p}).\dots.(\frac{t}{q}.\frac{t}{q}.\dots.\frac{t}{q})$$

این عبارت شامل $m+n+p+\dots+q$ جملهٔ مثبت است که شامل m جملهٔ شامل $\frac{x}{m}$، n جملهٔ شامل $\frac{y}{n}$، p جملهٔ شامل $\frac{z}{p}$، ... و q جملهٔ شامل $\frac{t}{q}$ است و بنابراین مجموع آنها برابر است با:

$$m \times \frac{x}{m} + n \times \frac{y}{n} + p \times \frac{z}{p} + \dots + q \times \frac{t}{q} = x+y+z+\dots+t$$

که این مقدار ثابت است. پس بر طبق قضیهٔ ۱ وقتی ماکزیمم است که:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \dots = \frac{t}{q}$$

مثال:

۱ــ اگر α، β، θ سه زاویهٔ حاده و مثبت به مجموع $\frac{\pi}{2}$ باشند، ماکزیمم عبارت $y = tg\alpha tg\beta tg\theta$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\alpha+\beta+\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\theta + tg\theta tg\alpha = 1$$

این حاصل جمع سه عامل برابر مقدار ثابت ۱ است پس حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که

$$tg\alpha tg\beta = tg\beta tg\theta = tg\theta tg\alpha$$

که درنتیجه حاصل می‌شود:

$$\alpha = \beta = \theta = \frac{\pi}{6}$$

به ازای این مقادیر عبارت $tg^2\alpha tg^2\beta tg^2\theta$ ماکزیمم خواهد بود و چون $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\theta$ مثبت هستند هنگامی که این عبارت ماکزیمم باشد عبارت زیر هم ماکزیمم است.

$$y = tg\alpha, tg\beta, tg\theta$$

$$Max(y) = (tg^3 \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

۲ــ پاره‌خط $AB = a$ را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که حاصل‌ضرب قطعهٔ اوّل در مربع قطعهٔ دوّم در مکعب قطعه سوّم ماکزیمم باشد.

حل: اگر سه قطعه را x، y، z فرض کنیم مطلوبست ماکزیمم xy^2x^3 و چون $x+y+z=a$ مقداری است ثابت، بنابراین، ماکزیمم وقتی حاصل می‌شود که داشته باشیم:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

یعنی باید پاره خط را به نسبتهای ۱ و ۲ و ۳ تقسیم کنیم در این صورت مقادیر قطعه ها از دستگاه زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \\ x+y+z=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{6} \\ y = \frac{a}{3} \\ z = \frac{a}{2} \end{cases}$$

و مقدار ماکزیمم مساوی $\frac{a^6}{432}$ خواهد بود.

▶ **قضایای مینیمم مجموع:**

۳ـ اگر حاصل‌ضرب چند متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد مجموع آنها وقتی مینیمم است که این متغیرها با هم برابر باشند.

اثبات سوم: فرض می‌کنیم که داشته باشیم:

$x.y.z.\dots.t = a^n$

اگر همهٔ متغیرها برابر a نباشند لااقل یکی از آنها از a بزرگتر و دیگری از a کوچکتر است. با شرط $(q>1)$ و این‌که $x>a$ و $y<a$، می‌توان داشت: $x = aq$

در این صورت اگر مجموع متغیرها را S بگیریم داریم:

$S = aq + y + z + \dots + t$

اولین جمله را مساوی a می‌گیریم و برای این‌که حاصل‌ضرب متغیرها تغییر نکند بجای جملهٔ دوم $\frac{y}{q}$ می‌گیریم:

$$S' = a + \frac{y}{q} + z + \dots + t$$

در این صورت داریم:

$$S - S' = a(q-1) + y(1-\frac{1}{q})$$

که با توجه به این‌که $q>1$ فرض شد $S-S'>0$ و درنتیجه $S>S'$ می‌شود.

به این ترتیب اگر یکی از متغیرها را برابر a بگیریم مجموع کوچک می‌شود و اگر این استدلال را ادامه دهیم درحالتی که همهٔ متغیرها برابر a باشند مینیمم مجموع به‌دست می‌آید.

۴ـ اگر برای متغیرهای مثبت x، y، z، ...، و t حاصلضرب $x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{\gamma}.\dots.t^{\lambda}$ مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی مینیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \dots = \frac{t}{\lambda}$$

اثبات چهارم[1]: وقتی که حاصلضرب $x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{\gamma}.\dots.t^{\lambda}$ ثابت باشد حاصلضرب

$$(\frac{x}{\alpha})^{\alpha}.(\frac{y}{\beta})^{\beta}.(\frac{z}{\gamma})^{\gamma}.\dots.(\frac{t}{\lambda})^{\lambda}$$

نیز ثابت خواهد بود. در عبارت اخیر $(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda)$ عامل وجود دارد.

α عامل مساوی $\frac{x}{\alpha}$، β عامل مساوی $\frac{y}{\beta}$، ...، λ عامل مساوی $\frac{t}{\lambda}$. پس مجموع آنها برابر است با:

$$\alpha.\frac{x}{\alpha} + \beta.\frac{y}{\beta} + \gamma.\frac{z}{\gamma} + \dots + \lambda.\frac{t}{\lambda} =$$

$$x + y + z + \dots + t$$

که در حالت تساوی آنها مینیمم می‌شود یعنی:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \dots = \frac{t}{\lambda}$$

مثال:

۳ـ از بین چهارضلعی‌های محاطی با سطح ثابت، محیط کدامیک مینیمم است؟

حل:

اگر اضلاع چهارضلعی را a، b، c، d و محیط آن‌را $2P$ فرض کنیم باید مینیمم عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$2P = a + b + c + d =$$

$$(p-a) + (p-b) + (p-c) + (p-d)$$

ولی می‌دانیم:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

پس چهار متغیر مثبت دارای حاصل‌ضرب ثابت هستند پس حاصل جمع وقتی مینیمم است که داشته باشیم:

$$p-a = p-b = p-c = p-d \Rightarrow a = b = c = d$$

پس چهارضلعی جواب مربع است.

۱ـ این قضایا به ویژه قضایای ۱ و ۳ از راههای مختلفی اثبات می‌شوند. از جمله با استفاده از اتحادها، نابرابریها، جبر تحلیلی، ... . در اینجا یکی از اثباتها را که به کمک نابرابری واسطه های حسابی و هندسی ارائه شده است می‌آوریم:

اثبات: بر طبق نابرابری فوق برای هر چند متغیر مثبت داریم:

$x_1.x_2.x_3.\dots.x_n = a \Leftrightarrow$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}$$

قضیهٔ ۱: $x_1+x_2+x_3+\dots+x_n = a \Leftrightarrow x_1.x_2.\dots.x_n \leq (\frac{a}{n})^n$ و $x_i>0$ و چون برابری (یعنی حداکثر مقدار) وقتی به‌وقوع می‌پیوندد که متغیرها برابر باشند قضیه ثابت است.

قضیهٔ ۲: $x_1.x_2.\dots.x_n = b \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+\dots+x_n \geq n\sqrt[n]{b}$ و $x_i>0$ تذکر این‌که این نابرابری به کمک روش استقرای ریاضی قابل استفاده و اثبات است.

۴ــ بدون استفاده از مشتق معلوم کنید که تابع $y=\frac{x^m+a}{x^n}$ به فرض $m>n$ به ازای چه مقدار از x ماکزیمم یا مینیمم است و مقدار این ماکزیمم یا مینیمم را به‌دست آورید.

حل: برای حل، تابع را به‌صورت $y=x^{m-n}+\frac{a}{x^n}$ می‌نویسیم و چون حاصلضرب

$$(x^{m-n})^n\times(\frac{a}{x^n})^{m-n}=a^{m-n}$$

مقدار ثابت است پس مجموع دو عامل x^{m-n} و $\frac{a}{x^n}$ یعنی y وقتی مینیمم است که :

$$\frac{x^{m-n}}{n}=\frac{\frac{a}{x^n}}{m-n}\Rightarrow x=\sqrt[m]{\frac{an}{m-n}}$$

و با توجه به این مقدار از x، مینیمم y مشخص می‌شود :

$$y=\frac{m}{n}\sqrt[m]{\frac{(an)^{m-n}}{(m-n)^{m-n}}}$$

تذکر: این مسایل حالت کلی مسایل مختلفی است که با این روش حل می‌شوند. از این‌رو از آن مانند بسیاری از حالات کلی حل مسایل به عنوان فرمول ذکر می شود.

◄ ماکزیمم و مینیمم در هندسه:

برخلاف آنچه که در ابتدا به نظر می رسد، ماکزیمم و مینیمم تنها در تابع و بدست آوردن مقدار عددی کاربرد ندارند بلکه همانطور که در ابتدا ذکر شد در موارد زیادی وارد می‌شوند. از آنجا که از این موارد هندسه بیش از همه نقش دارد و مسایل مطرح در این زمینه بسیار زیاد است، این بخش نیز به مقاله اضافه شد.

طبق سنت کهن هندسه ابتدا مسایل مهمی از آن، که برخورد زیادی با آنها خواهیم داشت را به‌عنوان قضیه مطرح می کنیم :

۱ــ مساحت مثلث قایم‌الزاویه با وتر مفروض، وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که مثلث متساوی‌الساقین باشد.

اثبات:

a را طول وتر، x را طول یک ضلع و y را طول ضلع دیگر فرض می کنیم. معلوم است که :

$$a^2=x^2+y^2$$

پس مجموع دو متغیر x^2 و y^2 مقدار ثابت a^2 است.

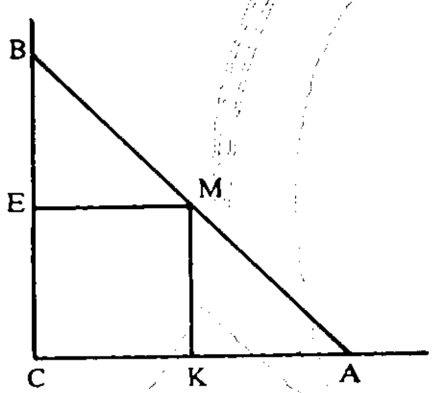
$$S=\frac{1}{2}xy\Rightarrow 4s^2=x^2y^2$$

مشخص است که ماکزیمم S با ماکزیمم $4S^2$ همراه است و $4S^2$ وقتی ماکزیمم است که :

$$x^2=y^2\Rightarrow x=y$$

پس مثلث مورد سؤال مثلث قایم‌الزاویه‌ای است که متساوی‌الساقین است.

۲ــ از رأس M در مربع CEMK خط راستی بگذرانید که خط‌های راست CK و CE را در نقطه‌های A و B قطع کند و مساحت مثلث ABC حداقل مقدار ممکن باشد.



اثبات:

ضلع مربع مفروض را واحد می‌گیریم. طول پاره‌خط AK را x می‌گیریم. چون مثلث‌های ΔAMK و ΔBEM متشابهند، پس داریم $BE=\frac{1}{x}$. واضح است که :

$$S(A\hat{B}C)=\frac{1}{2}BC.AC$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)(1+\frac{1}{x})=1+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$$

با توجه به رابطه، مینیمم $S(A\hat{B}C)$ همراه با مینیمم $x+\frac{1}{x}$ است. چون حاصلضرب این دو مساوی مقدار ثابت ۱ است پس حاصل جمع وقتی مینیمم است که $x=\frac{1}{x}$ باشد که درنتیجه داریم $x=1$:

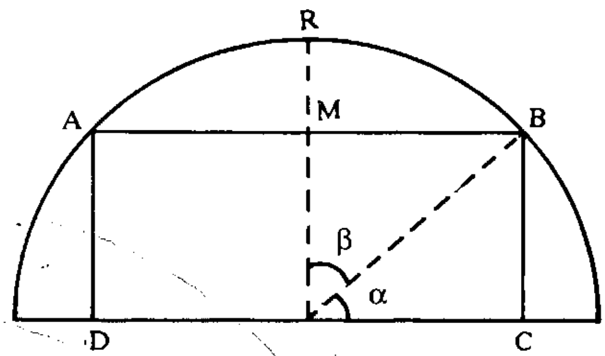
پس باید مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد.

۳ــ در نیم‌دایرهٔ مفروض، مستطیل ABCD را با حداکثر مساحت محاط کنید.

اثبات:

واضح است که مستطیل مذکور نسبت به قطر عمود متقارن است. پس در هر ربع دایره مستطیلهای دیگری پدید

می‌آید که ما دنبال ماکزیمم آنها نیز هستیم. اگر از B به O وصل کنیم زوایای α و β حاصل می‌شود.



اگر γ شعاع دایره باشند واضح است که :

$$\left.\begin{array}{l} BC = \gamma \sin\alpha \\ BM = \gamma \sin\beta \\ \beta = \frac{\pi}{۲} - \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow BC^{۲} + OC^{۲} = \gamma^{۲}$$

پس مجموع این دو متغیر مقدار ثابت است.

$S(OCBM) = OC.BC$

مشخص است که ماکزیمم OC.BC با ماکزیمم $OC^{۲}.OB^{۲}$ همراه است. بر طبق قضیه چون حاصل جمع آن دو ثابت است حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که برابر باشند :

$$BC = OC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = ۲$$

◄ ماکزیمم و مینیمم در فیزیک:

ماکزیمم و مینیمم در فیزیک و به‌خصوص در مکانیک نقش بسیاری بازی می‌کند. این قسمت حتی می‌تواند به ما نشان دهد که این بحث درزندگی روزمره نیز کاراست. در اینجا به حل مسأله‌ای جالب از این دست می‌پردازیم :

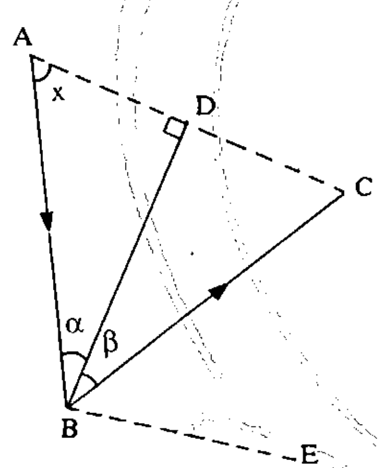
◄ مقابله با باد مخالف:

برای اینکه یک قایق بادبانی، با حداکثر سرعت به سمت شمال حرکت کند، چگونه باید با باد شمال مقابله کند؟

در اینجا به حل این مسأله می‌پردازیم ونشان می‌دهیم که مقابله با باد مخالف یعنی چه و یک قایق بادبانی چگونه در جهت مخالف باد حرکت می‌کند؟

(برای روشن بودن موقعیت فرض می‌کنیم که باد به‌طور مداوم از شمال بوزد :) در شکل جهت حرکت باد را با بردار $\vec{AB}$ و جهت حرکت قایق را با بردار $\vec{BC}$ نشان داده‌ایم. BC مسیر قایق را مشخص می کند. قایقران می‌تواند با استفاده از سکان و دیرک کف قایق آن را در این مسیر نگه دارد. برای این که نیروی باد از طریق بادبان به قایق منتقل شود و آن را در جهت BC به حرکت درآورد بادبان را در راستای BD در نظر گرفته‌ایم. جهت بادبان هم بوسیلهٔ قایقران کنترل می‌شود. مسأله این است : جهت‌های BD و BC برای بادبان و مسیر قایق چگونه باشند تا قایق با حداکثر سرعت ممکن به سمت شمال حرکت کند؟

(هر خواننده‌ای که با قایق‌رانی آشنایی داشته باشد متوجه می‌شود که ما در اینجا مسأله را ساده کرده‌ایم و بسیاری از جنبه‌های آن‌را کنار گذاشته‌ایم. درواقع با این ساده کردن خواسته‌ایم به نخستین مرحله از حل مسأله نزدیک شویم.)

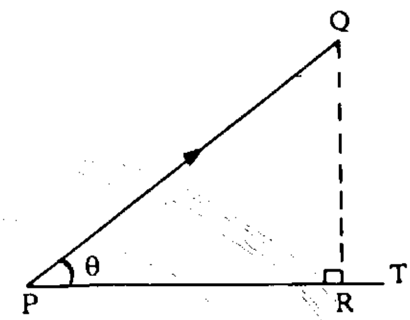


نکتهٔ مهم در اینجا داشتن تصور دوستی از مؤلفه‌های نیرو و سرعت است. اگر نیروی F را با بردار $\vec{PQ}$ نشان دهیم آن‌وقت مؤلفهٔ این نیرو در راستای PT با تصویر PQ بر PT نشان داده می‌شود ($\vec{PR}$). اندازهٔ این مؤلفه به زبان سادهٔ مثلثاتی برابر است با $F.\cos\theta$ که در آن θ برابر است با زاویهٔ بین نیرو و مؤلفه. مؤلفهٔ سرعت را هم می‌توان به همان طریق تقسیم کرد. در شکل اول زاویه های $A\hat{B}D$ و $D\hat{B}C$ را به ترتیب α و β می‌نامیم. اگر نیروی باد را با f نشان دهیم ضربهٔ باد بر بادبان عبارت است از مؤلفهٔ F در راستای AD، عمود بر بادبان. این مؤلفه برابر است با :

$$f.\cos\lambda = f.\cos(۹۰^{\circ} - \alpha) = f.\sin\alpha$$

نیروی $F.\sin\alpha$ جز این که قایق را در جهت BC به حرکت درآورد اثر دیگری ندارد. بنابراین باید مؤلفهٔ $F.\sin\alpha$ را در راستای BC پیدا کنیم. زاویه بین AD (امتداد $F.\sin\alpha$) و BC(امتداد مسیر قایق) برابر است با $90^\circ - \beta$. بنابراین برای پیدا کردن مؤلفهٔ $F.\sin\alpha$ در راستای BC باید $F.\sin\alpha$ را در $\cos(90^\circ - \beta)$ ضرب کرد:

$$f.\sin\alpha.\cos(90^\circ - \beta) = f\sin\alpha\sin\beta$$



و این همان نیروی مؤثر باد بر قایق است که از طریق بادبان منتقل می‌شود و سرعت قایق در طول مسیر خود متناسب با همین نیروی مؤثر است. اگر شدت حرکت باد را ثابت بگیریم F مقداری ثابت می‌شود که درنتیجه سرعت حرکت قایق در مسیر BC متناسبْ با $\sin\alpha\sin\beta$ خواهد بود. این استدلال نشان می‌دهد که قایق بادبانی می‌تواند برخلاف جهت باد حرکت کند اگرچه این حرکت بطورمستقیم در جهت مخالف حرکت باد نیست. برای حل مسئله نباید به دنبال حداکثر مقدار $\sin\alpha\sin\beta$ برویم زیرا هدف ما افزایش مؤلفهٔ سرعت قایق در راستای شمال است. حرکت روی مسیر BC انجام می‌گیرد و زاویهٔ $A\hat{B}C$ برابر $\alpha+\beta$ است. بنابراین مؤلفهٔ سرعت در راستای شمال با $\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta$ متناسب است. اگر فرض کنیم $\gamma = 90^\circ - \alpha - \beta$ آنگاه مسئله این‌طور می شود که: α و β و γ را طوری انتخاب کنیم که $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ماکزیمم باشد. و این درحالی است که می‌دانیم $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$. پس با توجه به آنچه گفته شده ماکزیمم وقتی حاصل می‌شود که $\alpha=\beta=\gamma=30^\circ$ باشد. (اثبات بر عهدهٔ خواننده)

به این ترتیب برای اینکه حرکت قایق به طرف شمال با حداکثر سرعت ممکن انجام گیرد باید مسیری برای آن انتخاب کرد که با سمت شمال زاویهٔ 60° بسازد (چه در طرف شمال باختری و چه در طرف شمال خاوری) و بادبان را بین جهت باد و جهت حرکت قایق تنظیم کرد.

ماکزیمم و مینیمم در مثلثات

برای مشخص شدن نقش ماکزیمم و مینیمم در مثلثات در مورد دو تا از اتحادهای مثلثاتی (که به کمک ماکزیمم و مینیمم و این اتحادها بسیاری از مسایل قابل حل است) بررسی می کنیم.

اتحادهای مثلثاتی زیر واضح است:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad , \quad tg\alpha.\cot g\alpha = 1$$

در اولی مجموع دو متغیر برابر مقدار ثابت یک است و در دومی حاصل ضرب دو متغیر، در هر دو اتحاد برای بدست آوردن ماکزیمم و مینیمم می‌توان به سرعت به قضایا رجوع کرد. به طور مثال برای اتحاد اوّلی می‌توان به قضایای ۱ و ۲ و برای دومی به قضایای ۳ و ۴ که در آنها به ترتیب مجموع ثابت فرض شده و حاصل ضرب ثابت فرض شده رجوع کرد. البته این بدان معنا نیست که ماکزیمم و مینیمم در مسایل نامربوط به این دو اتحاد کارآیی نداشته باشد. بلکه در آنها نیز بسته به نوع مسأله می‌توان تدابیری برگزید. در اینجا مسأله‌ای را در حالت کلی حل می‌کنیم که خود راه حلّ تمام مسایل مشابه است:

مسئله: مطلوبست ماکزیمم و مینیمم عبارت:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha$$

حل: می‌خواهیم ثابت کنیم ماکزیمم عبارت فوق برابر $\sqrt{a^2+b^2}$ و مینیمم آن برابر $-\sqrt{a^2+b^2}$ می‌باشد. برای حل آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$$

برای هر عدد حقیقی a و b از آنجا که می‌دانیم

$$-1 \le \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1 \ , \ -1 \le \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$$

پس فرض می کنیم:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta \ , \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta$$

بنابراین رابطهٔ ذکر شده به صورت زیر در می‌آید:

$$\sqrt{a^2+b^2}(\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$$

برای این که این عبارت به حداکثر مقدار خود برسد لازم

است-که $\sin(\alpha+\beta)=1$ باشد که در این صورت داریم:

$$\mathrm{Max}(a\sin\alpha+b\cos\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}$$

و به‌دلیل مشابه داریم:

$$\mathrm{Min}(a\sin\alpha+b\cos\alpha)=-\sqrt{a^2+b^2}$$

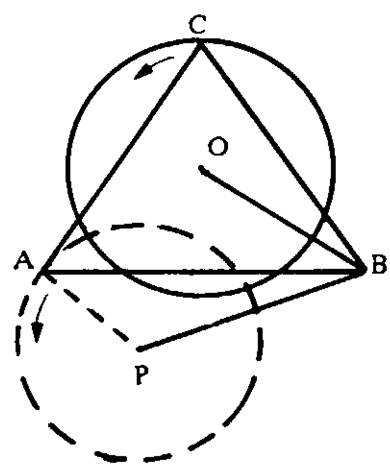
ماکزیمم و مینیمم در المپیادهای ریاضی:

ما در این قسمت به بحث و بررسی مسایل ماکزیمم و مینیممی می‌پردازیم که در المپیادهای ریاضی معتبر در دنیا مطرح گردیده است. در ابتدا به المپیادهای ریاضی شوروی از سال ۱۹۶۱ تا سال ۱۹۷۹ رفته و به بحث و بررسی مسایل مورد نظر می‌پردازیم:

المپیادهای ریاضی شوروی:

سال ۱۹۶۱ (مسکو)؛ سؤال b۶ : فاصلهٔ نقطه ثابت P واقع در صفحهٔ مثلث ABC، تا دو رأس A و B از این مثلث برابر است با $AP=2$ و $BP=3$. حداکثر مقدار فاصلهٔ CP چقدر است؟

حل: نقطهٔ B را به فاصلهٔ ۳ از P تثبیت می‌کنیم. ضمن حرکت A روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲ و به مرکز P رأس C روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲، که مرکز آن به فاصلهٔ $OP=3$ از P قرار دارد، حرکت می‌کند (مثلث OPB متساوی الاضلاع است). دورترین نقطهٔ محیط این دایره از P به فاصلهٔ $OC+OP$ یعنی ۵، قرار دارد، در نابرابری $PC\le AP+PB$ هم (برای هر مثلث متساوی الاضلاع ABC و هر نقطه P)، وقتی به برابری می‌رسیم که نقطهٔ P روی کمان AB از دایره محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل رأس C نیست) باشد.



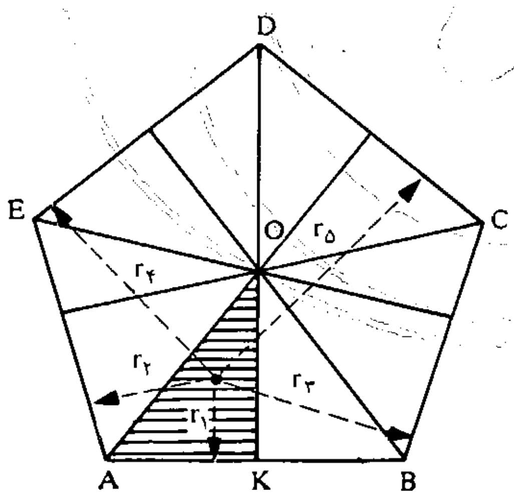
سال ۱۹۶۲ (مسکو)؛ سؤال ۸ : پنج ضلعی منتظمی داده شده است. M ، نقطهٔ دلخواهی واقع در درون یا روی محیط این پنج ضلعی است. فاصله‌های نقطهٔ M را از ضلع‌های پنج ضلعی (و یا امتداد آنها) به ترتیب مقدارهای صعودی آنها شماره‌گذاری می‌کنیم:

$$r_1\le r_2\le r_3\le r_4\le r_5$$

* همهٔ موضع‌های نقطهٔ M را پیدا کنید که، به ازای آنها، r_3 مینیمم مقدار ممکن را قبول کند.
* همهٔ موضع‌های نقطهٔ M را پیدا کنید که، برای آنها، r_3 ماکزیمم مقدار ممکن را قبول کند.

حل: پنج ضلعی منتظم ABCDE را به وسیلهٔ محورهای تقارن آن، به ۱۰ مثلث تقسیم می‌کنیم. کافی است نقطهٔ M را تنها در درون یکی از این مثلث‌ها، و به طور مثال مثلث AOK مورد بررسی قرار دهیم. برای این که فاصلهٔ نقطهٔ M واقع در درون زاویه‌ای را تا ضلع‌های آن با هم مقایسه کنیم کافی است روشن کنیم که، نقطهٔ M در کدام طرف نیمساز این زاویه قرار دارد. با توجه به این نکته، قانع می‌شویم که فاصلهٔ نقطهٔ M ، تا ضلع‌های پنج ضلعی : AB، AE، BC، DE و CD به ترتیب صعودی است:

$$r_1\le r_2\le r_3\le r_4\le r_5$$



اکنون دیگر روشن است که فاصلهٔ r_3 وقتی به حداکثر خود می‌رسد که نقطهٔ M روی رأس A قرار گیرد، و وقتی به حداقل خود می‌رسد که نقطهٔ M روی نقطه K قرار گیرد.

سال ۱۹۶۲ (مسکو)؛ سؤال ۱۱ : حداکثر مساحت مثلثی

را پیدا کنید که برای ضلعهای آن a، b و c، داشته باشیم:

$$0 \le a \le 1 \le b \le 2 \le c \le 3$$

(حل بر عهدهٔ دانش‌آموزان)

سال ۱۹۶۳ (مسکو) : سؤال ۶ : مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد مفروض است. حداقل مقدار d را پیدا کنید که، به ازای آن، پاره خط راست به طول d، در حالی که دو انتهای آن، روی ضلعهای مثلث است بتواند تمامی سطح مثلث را جارو کند.

(حل بر عهدهٔ دانش‌آموزان)

سال ۱۹۶۵ (مسکو) : سؤال ۱ (a: هر یک از عددهای x_1، x_2، ....، x_n، می‌تواند بدون ارتباط با بقیه، مقدار ۱ و ۰ یا ۱− را قبول کند. حداقل مجموع حاصلضربهای دو به دوی این n عدد، چقدر می‌تواند باشد؟

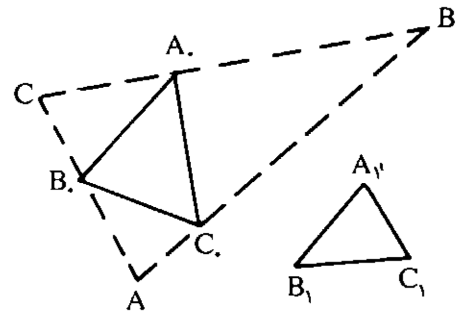
b) حداقل مقدار مجموع همهٔ حاصلضربهای دو به دوی x عدد x_1، x_2، ....، x_n چقدر است، به شرطی که قدرمطلق هیچ کدام از این عددها، از واحد تجاوز نکند؟

(حل بر عهدهٔ دانش‌آموزان)

◀ المپیادهای بین‌المللی ریاضی:

سال ۱۹۶۷ (نهمین دوره) : سؤال ۴ : فرض می‌کنیم $A_0\overset{\Delta}{B_0}C_0$ و $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ دو مثلث حاده الزوایا باشند. تمام مثلث‌های ABC را که مشابه $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ (چنانکه رئوس A_1 و B_1 و C_1 به ترتیب با رئوس A و B و C متناظر باشند) و محیط بر مثلث $A_0B_0C_0$ (به طوری که A_0 بر BC و B_0 بر CA و C_0 بر AB واقع باشد) می‌باشند در نظر می‌گیریم. از بین چنین مثلث‌های ممکنی، مثلث با مساحت ماکزیمم را معین و آن را رسم کنید.

حل: از A_0 و B_0 و C_0 خطوطی به ترتیب موازی B_1C_1 و C_1A_1 و A_1B_1 رسم می‌کنیم: این کار اضلاع BC و AC و AB از $A\overset{\Delta}{B}C$ را که مشابه مثلث $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ است تشکیل می‌دهد. اکنون فرض می‌کنیم هر یک از خطوطی را که به این ترتیب رسم کرده‌ایم به ترتیب حول A_0 و B_0 و C_0 و با یک اندازه دوران بدهیم. در این صورت آنها با همان زوایای قبلی با

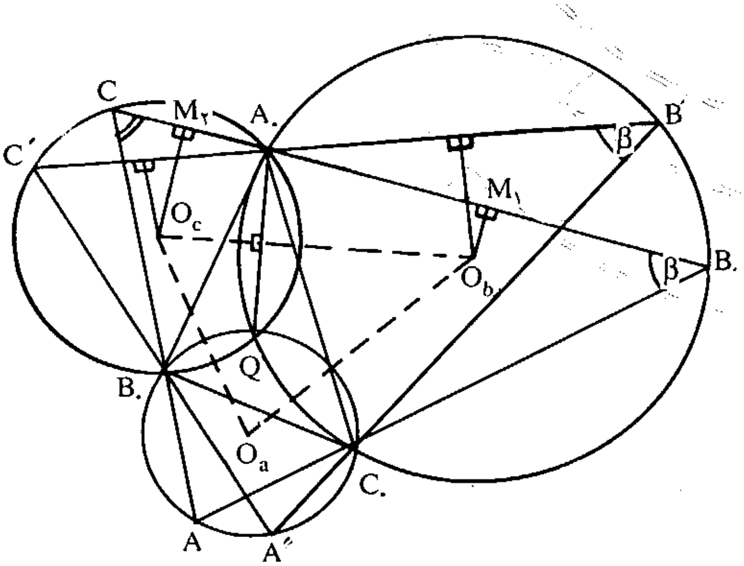


یکدیگر تلاقی می‌کنند و مثلث‌هایی مشابه با $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ می‌سازند و در میان آنها مثلث به مساحت ماکزیمم مثلثی است که اضلاع ماکزیمم داشته باشد. برای یافتن این مثلث بخاطر می‌آوریم که مکان هندسی تمام نقاط مانند B که در آنها $A_0\hat{B}C_0$ دارای مقدار معلوم β است کمانی از دایره‌ای با وتر A_0C_0 می‌باشد.

این مطلب مطرح می‌کند که دوایر محیطی مثلث‌های $A_0\overset{\Delta}{B}C_0$ و $A\overset{\Delta}{B_0}C_0$ و $A_0\overset{\Delta}{B_0}C$ را رسم کنیم. مراکز این دوایر را به ترتیب O_b و O_a و O_c نشان می‌دهیم. اثبات اینکه این دوایر محیطی دارای نقطهٔ مشترک Q می‌باشند آسان است.*

حال نشان می‌دهیم $\hat{C} = \frac{1}{2}A_0\hat{Q}B_0$ و $O_a\hat{O}_cO_b = \frac{1}{2}\widehat{A_0Q} + \frac{1}{2}\widehat{QB_0}$ زیرا O_cO_a و O_cO_b به ترتیب کمانهای B_0Q و A_0Q را نصف می‌کنند. بنابراین $\hat{C} = O_a\hat{O}_cO_b$ می‌شود. به همین ترتیب ثابت می‌شود $\hat{A} = O_b\hat{O}_aO_c$ و $\hat{B} = O_a\hat{O}_bO_c$ بنابراین:

$$O_a\overset{\Delta}{O_b}O_c \sim A\overset{\Delta}{B}C \sim A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$$



* اثبات در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه ـ مثلثهای ناپلئون

سرانجام نشان می‌دهیم که بزرگترین مثلث ABC ی گذرنده از نقاط .A و .B و .C مثلثی است که اضلاعش موازی اضلاع $\overset{\Delta}{O_aO_bO_c}$ باشد.

اثبات: از آنجا که عمودهای از O_b و O_c وترهای .BA و .CA را در M_1 و M_2 نصف می‌کنند داریم: $M_1M_2=\frac{1}{2}BC$ اما M_1M_2 تصویر قایم O_bO_c بر BC است و زمانی ماکزیمم است که $BC \parallel O_bO_c$ باشد. از آنجا که $\overset{\Delta}{O_aO_bO_c} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ است، جمیع اضلاع مثلث به مساحت ماکزیمم یا بزرگترین مورد بحث، موازی اضلاع نظیرشان از $\overset{\Delta}{O_aO_bO_c}$ هستند.

به این ترتیب برای رسم مثلث بزرگترین مذکور ابتدا از .A و .B و .C مثلثی متشابه با $\overset{\Delta}{A_1B_1C_1}$ رسم می‌کنیم. بعد O_a و O_b و O_c مراکز دوایر محیطی مثلث‌های $\overset{\Delta}{AB.C.}$ و $\overset{\Delta}{A.B.C}$ و $\overset{\Delta}{A.B\,C.}$ را رسم می‌کنیم و سرانجام از .A و .B و .C به ترتیب خطوطی موازی O_bO_c و O_aO_c و O_aO_b می‌کشیم. این خطوط اضلاع BC و AC و AB از مثلث بزرگترین مطلوب را تشکیل می‌دهند.

سال ۱۹۷۴ (پانزدهمین دوره): سؤال ۳: فرض می‌کنیم a و b اعدادی حقیقی باشند که به ازای آنها معادلهٔ:

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

حداقل یک جواب حقیقی داشته باشد. به ازای جمیع ازواج (b و a)، مینیمم مقدار a^2+b^2 را بیابید.

حل: ابتدا معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=y$ به ازای y حقیقی را در نظر می‌گیریم. این معادله معادل $x^2-yx+1=0$ است که معادلهٔ درجه دومی بر حسب x است که دارای ریشه‌های حقیقی است اگر و فقط اگر بین آن y^2-4 بزرگتر یا مساوی با صفر باشد. یعنی اگر و فقط اگر $|y|\geq 2$ باشد. اکنون برای حل:

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

آن را بر x^2 تقسیم می‌کنیم و سپس y را مساوی $x+\frac{1}{x}$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$y^2+ay+(b-2)=0$$

ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم عبارتند از:

$$y=x+\frac{1}{x}=\frac{-a\mp\sqrt{a^2-4(b-2)}}{2}$$

و در این صورت این شرط که قدرمطلق حداقل یکی از آنها بزرگتر از یا مساوی با ۲ باشد این است که:

$$|a|+\sqrt{a^2-4(b-2)}\geq 4$$

این شرط معادل:

$$\sqrt{a^2-4(b-2)}\geq 4-|a|$$

است. پس از مربع کردن دو طرف و تفریق a^2:

$$8|a|\geq 4b+8$$

را خواهیم داشت. تقسیم این نامساوی بر ۴ و مربع کردن آن:

$$4a^2\geq b^2+4b+4$$

را به دست می‌دهد که با افزودن $4b^2$ به دو طرف آن:

$$4a^2+4b^2\geq 5b^2+4b+4$$

و بنابراین:

$$a^2+b^2\geq\frac{5}{4}(b^2+\frac{4}{5}b+\frac{4}{5})$$

و به دنبال آن:

$$a^2+b^2\geq\frac{5}{4}(b+\frac{2}{5})^2+\frac{4}{5}$$

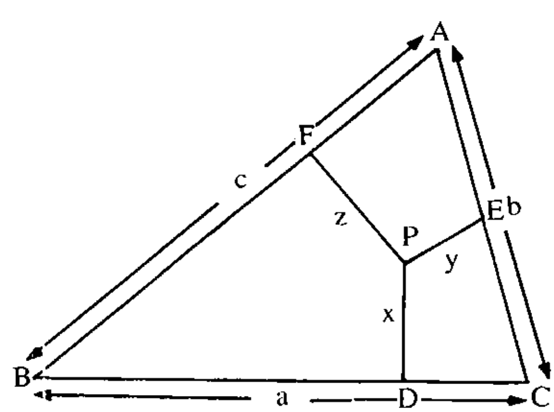
را خواهیم داشت. کمترین مقدار عضو سمت راست این نامساوی وقتی $b=-\frac{2}{5}$ باشد رخ می‌دهد و برابر $\frac{4}{5}$ است. بنابراین کمترین مقدار a^2+b^2 برابر $\frac{4}{5}$ است.

سال ۱۹۸۱ (بیست و دومین دوره): سؤال ۱: P نقطه‌ای واقع در داخل مثلث مفروض $\overset{\Delta}{ABC}$ است. D و E و F به ترتیب پاهای عمودهای مرسوم از P به خطوط BC و AC و AB هستند. تمام Pهایی را که به ازای آنها:

$$\frac{BC}{PD}+\frac{AC}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

مینیمم است را بیابید.

حل: طول اضلاع مقابل به A و B و C را به ترتیب a و b و c و از آن پاره‌خطهای PD و PE و PF را با x و y و z نمایش می‌دهیم.



k مساحت مثلث در رابطهٔ :

$$2k = ax + by + cz \qquad (1)$$

صدق می کند. می‌خواهیم کمترین مقدار :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \qquad (2)$$

را تحت قید (۱) به دست آوریم. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم. ساده‌ترین راه احتمالاً استفاده از نامساوی کوشی[1] است :

$$(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 \le (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)$$

با $\sqrt{ax}$ و $\sqrt{by}$ و $\sqrt{cz}$ به جای u ها و $\sqrt{\frac{a}{x}}$ و $\sqrt{\frac{b}{y}}$ و $\sqrt{\frac{c}{z}}$ به جای v ها از نابرابری فوق استفاده می کنیم :

$$(a+b+c)^2 \le (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

$$=2k\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

و یا :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2k}$$

تساوی اگر و فقط اگر سه‌تایی‌های $(\frac{a}{x},\frac{b}{y},\frac{c}{z})$ و (ax, by, cz) متناسب باشند یعنی اگر و فقط اگر : $x = y = z$ باشد برقرار است. بنابراین کمترین مقدار (۲) وقتی رخ می‌دهد که P مرکز دایرهٔ محاطی داخلی $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد.

سال ۱۹۸۵ (بیست و ششمین دوره) : مسأله تمرینی برای آمادگی : به ازای هر نقطهٔ P واقع در داخل مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ فرض می‌کنیم. D و E و F به ترتیب نقاط تقاطع خطوط AP و BP و CP به اضلاع مقابل A و B و C باشند. P را به طریقی تعیین کنید که مساحت مثلث $\overset{\Delta}{DEF}$ ماکزیمم مقدار ممکن باشد.

حل: واضح است که :

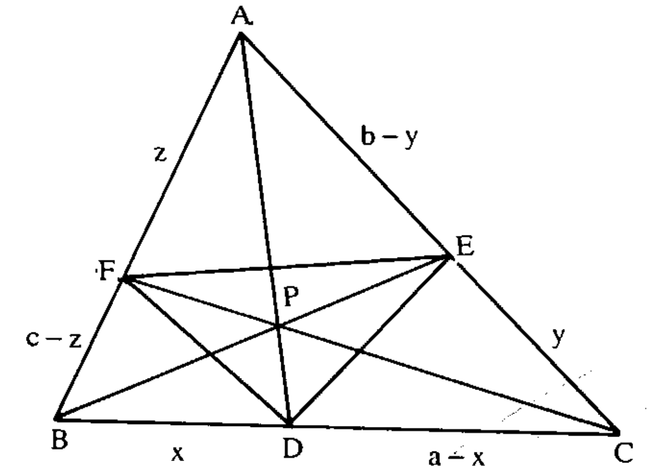
$$S(\overset{\Delta}{DEF}) = S(\overset{\Delta}{ABC}) - S(\overset{\Delta}{AFE}) - S(\overset{\Delta}{BDF}) - S(\overset{\Delta}{CED})$$

همچنین اثبات می‌شود :

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2}ac\sin B$$

است پس داریم :

$$\frac{1}{2}\sin B = \frac{S(\overset{\Delta}{ABC})}{ac}$$



در نتیجه :

$$S(\overset{\Delta}{BDF}) = \frac{1}{2}x(c-z)\sin B = \frac{S(\overset{\Delta}{ABC})x(c-z)}{ac}$$

عبارات مشابهی برای مثلثهای دیگر به دست می‌آید. با قرار دادن این روابط در رابطهٔ اصلی داریم :

$$S(\overset{\Delta}{BDF}) = S(\overset{\Delta}{ABC})\left[1-\frac{x(c-z)}{ac}-\frac{y(a-x)}{ab}-\frac{z(b-y)}{bc}\right]$$

$$= S(\overset{\Delta}{ABC})\left[1-u(1-w)-v(1-u)-w(1-v)\right]$$

که در آن $u=\frac{x}{a}$ و $v=\frac{y}{b}$ و $w=\frac{z}{c}$ است. می‌خواهیم عامل سمت راست را که می‌توان به صورت زیر نوشت ماکزیمم کنیم :

$$F=(1-u)(1-v)(1-w)+uvw$$

بنا به قضیه سوا[2] u و v و w در رابطهٔ :

$$uvw=(1-u)(1-v)(1-w)$$

صدق می‌کنند. اگر $G=uwv$ باشد بنا به رابطهٔ قبل $F=2G$ و F وقتی به ماکزیمم خود می‌رسد که G برسد. و G وقتی ماکزیمم می‌شود که G^2 باشد یعنی :

$$G^2=u(1-u)v(1-v)w(1-w)$$

ماکزیمم شود. ملاحظهٔ ماکزیمم G^2 از این حقیقت که $s(1-s)\le\frac{1}{4}$ است، یا از نامساوی تصاعد حسابی و هندسی که قبلاً گفته ($G^{\frac{1}{3}}\le\frac{1}{2}$) حاصل می‌شود و وقتی تساوی به وجود می‌آید که :

$$u=v=w=\frac{1}{2}$$

---

۱ ــ اثبات در کتاب عبارتهای جبری ــ بخش نابرابریهای معروف

۲ــ اثبات در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه

بنابراین :

$$\text{Max}\ S\left[\overset{\Delta}{DEF}\right]=\frac{1}{2}S\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]$$

و این نتیجه وقتی به وجود می‌آید که P مرکز ثقل مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد.

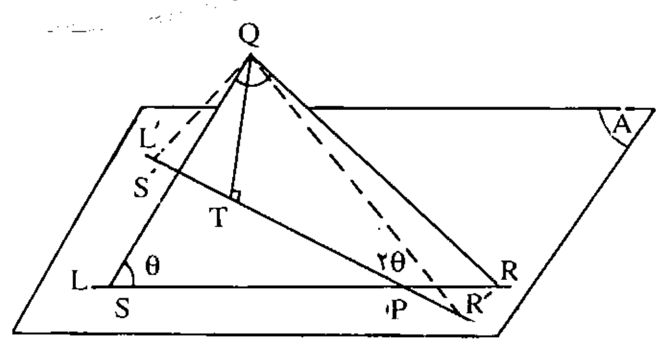
سال ۱۹۷۹ (بیست و یکمین دوره) : سؤال ۴ : صفحهٔ A، نقطه P در این صفحه و نقطهٔ Q غیر واقع در A مفروضند. جمیع نقاط R در A را چنانکه نسبت $\frac{QP+PR}{QR}$ ماکزیمم باشد، بیابید.

حل: در مورد هر نقطهٔ R (که باید تعیین شود) خط گذرنده از R و P را با L نمایش و $Q\hat{P}R$ را با 2θ نمایش می دهیم. اکنون همانطور که در شکل نشان داده شده نقطهٔ S را روی L چنان مشخص می کنیم که $QP = SP$ باشد، در این صورت: $SR = QP + PR$ و بنا به قانون سینوسها در مثلث $\overset{\Delta}{SQR}$ داریم:

$$\alpha=\frac{SR}{aR}=\frac{\sin S\hat{Q}R}{\sin\theta}=\frac{QP+PR}{QR}$$

α به ازای جمیع نقاط R واقع بر L چون $S\hat{Q}R=90°$ باشد ماکزیمم می‌شود. اکنون باقی می‌ماند که ماکزیمم $\frac{1}{\sin\theta}$ را مشخص کنیم و به این منظور وقتی نائل می‌شود که 2θ مینیمم باشد و این هنگامی که L از P و T (پای عمود از Q بر صفحهٔ A) بگذرد رخ می‌دهد.

اگر T و P نقاط متمایزی باشند در این صورت R به طور منحصر به فرد معین می‌شود و اگر نباشد R می‌تواند هر نقطهٔ واقع بر دایرهٔ به شعاع OP و به مرکز P باشد.



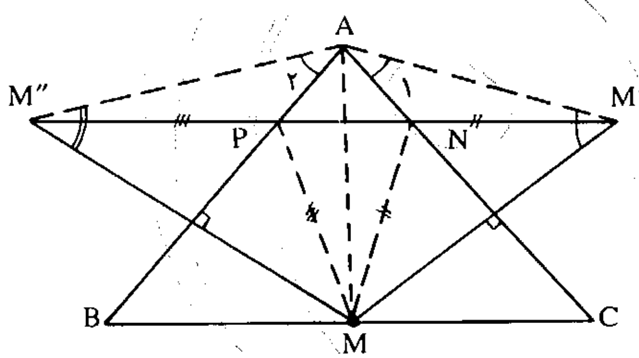
◀ المپیادهای کشوری:

سال ۱۳۶۵ (جلسهٔ بعدازظهر) : سؤال ۱ : مثلث ABC مفروض است. مثلثی در آن محاط کنید که محیطش مینیمم باشد.

حل: اگر نقطهٔ دلخواه M را روی BC انتخاب کنیم از بین مثلث‌هایی به رأس M که دو رأس دیگر آن روی دو ضلع دیگر مثلث باشند محیط مثلثی مینیمم است که به شرح زیر حاصل شود:

(توجه : $\hat{A} = B\hat{A}C$)

$$\hat{M}+\hat{A}=\pi \rightarrow (\hat{M}'+\hat{M}'')+\hat{A}=\pi$$
$$\Rightarrow (\frac{\pi}{2}-\hat{A}_1)+(\frac{\pi}{2}-\hat{A}_2)+\hat{A}=\pi$$
$$\rightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2=\hat{A}$$
$$\rightarrow M''\hat{A}M'=2\hat{A}$$



قرینه‌های نقطهٔ M را نسبت به اضلاع AC و AB به ترتیب M′ و M″ می‌نامیم. خط M′M″ دو ضلع AC و AB را به ترتیب در نقاط N و P قطع می‌کند. مثلث $\overset{\Delta}{MNP}$ با محیط M′M″ جواب این قسمت از مسئله است اما مثلث $\overset{\Delta}{AM'M''}$ متساوی‌الساقین به زاویه رأس $M'\hat{A}M''=2\hat{A}$ است. حال مسئله به تعیین نقطه M به طوری که قاعده مثلث حاصل (M′M″) مینیمم شود تبدیل می‌شود.

چون مثلثهای حاصل ($\overset{\Delta}{AM'M''}$) متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $2\hat{A}$ می‌باشند پس قاعده M′M″ در مثلثی مینیمم است که ساق آن مینیمم باشد. از طرفی $AM = AM' = AM''$ پس باید AM مینیمم باشد یعنی M پای ارتفاع از رأس A باشد. با تعویض M با نقاطی روی اضلاع AC و BC مثلث مورد نظر مثلث ارتفاعیه محاط در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ خواهد بود.

تمرین برای شما

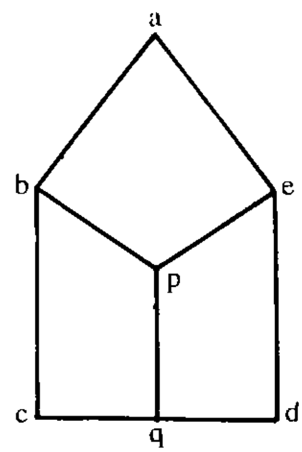
۱ــ اگر a، b، c، ...، l و x، y، z، ...، t اعدادی مثبت

و $ax + by + cz + \ldots + lt = k$ ثابت باشد. ثابت کنید حاصل ضرب $p = xyz\ldots t$ وقتی ماکزیمم است که :

$ax = by = cz = \ldots = lt$

۲ ــ ثابت کنید یک چهارضلعی با ضلعهای مفروض وقتی دارای ماکزیمم مساحت است که قابل محاط شدن در یک دایره باشد.

۳ ــ در شکل مقابل abcde نمای قایم خانه‌ای را نشان می‌دهد (دو نقطهٔ b و e ارتفاعهای برابر دارند). سازندهٔ خانه در نظر دارد مجرایی برای آبهای باران متشکل از سه ناودان مستقیم‌الخط bp و ep و pq ایجاد کند که مسیر از p به پایین قایم باشد. مکان نقطهٔ p کجا باشد تا طول کل ناودانها مینیمم باشد.



۴ ــ از میان همهٔ مثلثهای محاط در یک دایرهٔ مفروض کدام، یک ماکزیمم مساحت و کدام یک ماکزیمم محیط را داراست؟

۵ ــ ثابت کنید عبارت

$$(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$$

هرگاه $x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ باشد مینیمم است.

مأخذ:

۱ ــ روشهای جبر ــ پرویز شهریاری
۲ ــ عبارتهای جبری ــ عبدالحسین مصحفی
۳ ــ آشنایی با ریاضیات (جلد ۲۸) ــ پرویز شهریاری
۴ ــ مسائل جبر و آنالیز ــ علی حسن‌زاده ماکویی
۵ ــ بازآموزی و بازشناخت هندسه ــ عبدالحسین مصحفی
۶ ــ ماکزیمم و مینیمم بدون مشتق ــ ایوان نیون
۷ ــ نابرابری هندسی ــ محمد حسین بیژن‌زاده
۸ ــ المپیادهای ریاضی بین‌المللی ــ پرویز شهریاری
۹ ــ المپیادهای ریاضی کشوری ــ آرمان تقیان
۱۰ ــ المپیادهای ریاضی بلژیک ــ عبدالحسین مصحفی
۱۱ ــ المپیادهای ریاضی مجارستان ــ یوژف کورشاک
۱۲ ــ المپیادهای ریاضی شوروی ــ نیکلای یوری سوویچ واسیلیف، آندره آلکساندرویچ یه گوروف

«چنانکه ملاحظه می‌شود ... حساب احتمالات به واقع چیزی جز عقل سلیم نیست که به محاسبه درآمده است. این حساب، چیزی را که صاحبان فکر درست بدون آنکه متوجه باشند به غریزه درمی‌یابند با دقت و صحت بیان می‌دارد.

... این نکته درخور توجه است که این علم که با ملاحظات مربوط به بازیهای قمار و تصادف به وجود آمد، به درجه‌ای اهمیت یافته است که از مهمترین مسایل معرفت آدمی می‌باشد.»

پی‌یر سیمون لاپلاس