# دستگاههای دینامیکی: ورود به قرن بیست‌ویکم*

مارسلو ویانا**

ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی

گمان می‌کنم این سخن از ولتر باشد که «حتی ماهرترین پیشگویان نمی‌توانند اشتباه نکنند.» فهرست بلند بالای پیشگوییهای نادرستِ قدیم و جدید در مورد پدیده‌های طبیعی و تحولات جوامع بشری، شکی در درستی نظر وی باقی نمی‌گذارد.

با این حال، پیش‌بینی سیر تحول یک مبحث علمی نباید کار مشکلی باشد، چون دانش علمی نوعی انسجام درونی دارد و معمولاً چالشهای جدید از حل مسائل قدیم ناشی می‌شوند. این گزاره در مورد ریاضیات شاید بیشتر صادق باشد زیرا این علم در سراسر تاریخ خود به‌هم پیوستگی قابل‌ملاحظه‌ای داشته است. سخنرانی مشهور هیلبرت در سال ۱۹۰۰ در کنگرهٔ جهانی ریاضیدانان شامل پیش‌بینیهایی دربارهٔ هدفهای دوردست بود و تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای هم بر مسیرهای تحقیق ریاضی در قرن بیستم داشته است. با این حال، او نتوانست تولد و توسعهٔ خارق‌العادهٔ مبحث دستگاههای دینامیکی را پیش‌بینی کند هر چند دو مسألهٔ وی (مسأله‌های ۱۶ و ۲۱) با آن ارتباط دارند.

پوانکاره که با تحقیقات بنیادی خود در مکانیک سماویْ دینامیک را به‌صورت یک شاخهٔ ریاضی بنا نهاد، البته می‌دانست که cette étude aura par elle-même un intérêt du premier ordre (این مطالعات به‌خودی خود دارای فایدهٔ درجهٔ اول هستند.) میراث وی چند دهه بعد به برکاف رسید که مسائل مهمی را که بولتسمان و ماکسول مطرح کرده بودند روشن ساخت. در اواسط قرن، کولموگوروف، آرنولد، و موزر به حل مسألهٔ مهمی پرداختند که (صرف‌نظر از نیوتن) از لاپلاس و لوریه[1] به‌جا مانده و پوانکاره دقیقاً آن را فرمولبندی کرده بود: همگرایی سری لیندستد[2] که از حل صوری معادلات گرانش به‌دست آمده بود. نتایج حاصل از مسألهٔ پایداری منظومهٔ شمسی که انگیزه اولیهٔ طرح مسأله بود بسیار فراتر رفت. از آن زمان تاکنون، نظریهٔ کولموگوروف، آرنولد، و موزر به یمن کارهای اساسی هرمان[3]، مدر[4]، روسمان[5]، زندر[6] و ریاضیدانان بسیار دیگر همواره یکی از پررونق‌ترین شاخه‌ها در مبحث دستگاههای دینامیکی بوده است.

دستگاههای شبه‌گرادیان و مدت‌کوتاهی پس از آن «نعل اسب»، اولین مفاهیمی بودند که الگویی کلی فراهم کردند که برای بسیاری از دستگاههای دینامیکی معتبر بود. یکی از اهداف نظریهٔ دستگاههای یکنواختْ‌هذلولوی که اسمِیل آن را در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ معرفی کرد و دانشجویان و همکاران وی و نیز ریاضیدانانی از شوروی سابق آن را توسعه دادند، شناسایی مفهوم پایداری ساختاری بود که در دههٔ ۱۹۳۰ به‌وسیلهٔ آندرونوف[1] و پونتریاگین[2] مطرح شده بود. این هدف در مورد دستگاههایی که یک بار مشتق‌پذیرند (اساساً، پایداری معادل یکنواختْ‌هذلولوی بودن است) به‌دست آمد. قسمتهای نهایی مهم این اثبات را مانیه[3] در اواسط دههٔ ۱۹۸۰ و هایاشی[4] در حدود ده سال بعد عرضه کردند.

ویژگی هذلولوی بودن مفهومی اساسی در راه‌حل آنوسوف[5] برای مسألهٔ کلاسیک ارگودیک‌بودن جریانهای ژئودزیک روی خمینه‌های با انحنای منفی بود؛ هدلوند[6] و هوپف[7] قبلاً مسأله را در مورد رویه‌ها حل کرده بودند. به‌علاوه، با استعانت از مفاهیمی از مکانیک آماری در حوزهٔ رفتار دینامیکی هموار، سینایی[8]، روئل[9] و بوئن[10] ثابت کردند که دستگاههای یکنواختْ‌هذلولوی قابل توصیف دقیق به زبان آماری هستند (تحول نوعیِ بیشتر حالتهای اولیه)؛ با این حال، امکان دارد در سطح مدارهای منفرد پیچیدگی زیادی داشته باشند.

از طرف دیگر، به‌زودی آشکار شد که ویژگی یکنواختْ‌هذلولوی بودن بسیار انعطاف‌ناپذیر است و برای اکثر دستگاههای دینامیکی نمی‌تواند معتبر باشد: نگاشتها و جریانهای هموار وجود دارند که حتی به تقریب هذلولوی نیستند. پارادایمی جدید و کلی‌تر مورد نیاز بود...

پیشرفتهای بعدی در عرصه‌های مختلف به وقوع پیوست: نظریهٔ انشعاب، به‌ویژه پدیده‌های هم‌تخت[11] (نیوهاوس، پَلیس، تاکنز[12]، یوکوز، موریرا[13])؛ الگوهای ویژهٔ رفتار غیرهذلولوی، نظیر نگاشتهای هنون[14] (بِندیکس، کارلسون[15]، مورا، ویانا، یانگ[16]) یا جریانهای لورنتس (افرائیموویچ[17]، شیلنیکوف[18]، گوکنهایمر[19]، ویلیامز)؛ گسترشهای گوناگون مفهوم دستگاه

1. Leverrier 2. Lindsted 3. Herman 4. Mather 5. Rüssman 6. Zehnder

1. Andronov 2. Pontryagin 3. Mañé 4. Hayashi 5. Anosov 6. Hedlund 7. Hopf 8. Sinai 9. Ruelle 10. Bowen 11. homoclinic 12. Takens 13. Moreira 14. Hénon 15. Carleson 16. Young 17. Afraimovich 18. Shilnikov 19. Cuckenheimer

هذلولوی، به‌ویژه نظریهٔ پسین در مورد دستگاههای نایکنواختْ‌هذلولوی (پسین، کاتوک[1]، لدراپیر[2]، یانگ)؛ دستگاههای کم‌بُعد نظیر نگاشتهای بازه (یاکوبسون، میلنر، ترستن، دوملو[3]، ون استرین[4]، مانیه، سالیوان، یوکوز، مک‌مالن[5]، لیوبیچ، اشویاتک[6]) یا کرهٔ مختلط (دوآدی[7]، هوبارد[8]، ساد[9]، و بسیاری از پیشینیان).

با پایان یافتن قرن بیستم به نظر می‌رسد که زمان طرح نظریه‌ای سراسری که متناسب با اکثر دستگاههای دینامیکی باشد فرا رسیده است. چشم‌انداز جدیدی از این نظریه پدیدار شده است و اکنون پیشرفت هیجان‌انگیزی در حال وقوع است. میل دارم در این مورد چند کلمه‌ای حرف بزنم و چالشهای پیش‌رو را بیان کنم.

## ۱. چارچوب اصلی

توجه خود را به دو الگوی اصلی قانون تحول معطوف می‌کنم (مطالب مختصری دربارهٔ سایر الگوها در بخش پایانی آمده است). اولی متناظر است با تبدیلات $f : M \to M$ یک فضای $M$، که نقاط آن حالتهای مختلف دستگاه را توصیف می‌کنند. مدار هر نقطهٔ $x_0 \in M$ دنبالهٔ $(x_n)$ است که به‌صورت $x_n = f(x_{n-1})$ به‌ازای $n \geq 1$، تعریف می‌شود. غالباً فرض می‌کنیم که $f$ وارون‌پذیر است و بنابراین $x_n = f^{-1}(x_{n+1})$ به‌ازای $n < 0$ نیز توصیف می‌شود.

الگوی دیگر، جریانهای زمانْ‌پیوستهٔ $f^t : M \to M$، $t \in \mathbb{R}$، هستند، یعنی خانواده‌های یک پارامتریِ تبدیلات $M$ که در $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ به‌ازای $t, s \in \mathbb{R}$، و $f^0 = id$ صدق می‌کنند. مدار $x_0 \in M$ خم $x_t = f^t(x_0)$، $t \in \mathbb{R}$ است. با این فرض که جریان به‌طور هموار به زمان $t$ بستگی دارد، یک میدان برداری $F$ روی $M$ با تعریف

$$F(x) = \frac{d}{dt} f^t(x)\Big|_{t=0}$$

به آن وابسته می‌شود. در واقع همواره فرض بر این است که $M$ یک خمینه (فشرده) و دستگاه هم‌نسبت به زمان و هم نسبت به فضای $M$ هموار است.

در هر زمینه، هدف کلی دو جنبه دارد:

ـ توصیف رفتار بیشتر مدارها در مورد بیشتر دستگاهها، به‌ویژه وقتی زمان به بینهایت میل می‌کند.

ـ درک این نکته که آیا این رفتار تحت تغییرات کوچک قانون تحول پایدار است یا نه.

تأکید می‌کنم که، به‌طور کلی، توصیف تمام مدارها یا دستگاهها هدف واقع‌بینانه‌ای نیست، زیرا انواع بسیار زیادی از رفتارهای استثنایی وجود دارد. همچنین در مورد مسئلهٔ دوم فوق، باید توجه کنیم که الگوهای ریاضی فقط تقریبهایی از پدیده‌هایی هستند که آن الگوها توصیفشان می‌کنند.

## ۲. ربایندهها: متناهی بودن

رباینده یا جاذب مجموعه‌ای فشرده و ناوردا چون $\Lambda \subset M$ است که پهنهٔ ربایش آن، یعنی

$$B(\Lambda) := \{\text{نقاطی در } M \text{ که مدارهای پیشرو آنها به } \Lambda \text{ همگرایند}\}$$

1. Katok 2. Ledrappier 3. de Melo 4. van Strien 5. McMullen 6. Swiatek 7. Douady 8. Hubbard 9. Sad

دارای احتمال لبگ (حجم) مثبت است. چنانکه بعداً شرح خواهم داد، ممکن است دستگاه دینامیکی بینهایت رباینده داشته باشد که این امر توصیف دینامیک را قدری مشکل می‌سازد.

برای دور زدن این مشکل و رفع سایر موانع موجود بر سر راهِ درک رفتار دینامیکی مختلط، برنامهٔ بلندپروازانه‌ای مطرح شده که مبنای آن حدس زیر از پَلیس است[۴۴]: هر دستگاه دینامیکی (جریان یا دیفئومورفیسم) را می‌توان با دستگاه دینامیکی دیگری تقریب زد که دارای تعداد متناهی رباینده و پهنهٔ ربایش آن شامل تقریباً تمام مدارها باشد. به‌علاوه، این ربایندهها باید ویژگیهای ارگودیکِ خوبی چون وجود اندازه‌های فیزیکی و پایداری تصادفی (پایداری تحت نوفهٔ تصادفی کوچک) داشته باشند. بعداً به این موضوع می‌پردازم.

صورتی بسیار قوی از حدس متناهی بودن را لیوبیچ برای نگاشتهای درجهٔ دوم حقیقی $x \mapsto a + x^2$ ثابت کرده است[۳۴]: به‌ازای تقریباً هر مقدار پارامتر $a$ ربایندهٔ یکتایی وجود دارد که یا دوره‌ای است یا «آشوبناک» (نایکنواختْ‌هذلولوی). تعمیم پیشرفته‌ای از این قضیه برای خانواده‌های نسبتاً کلی از نگاشتهای تکمدیِ بازه توسط لیوبیچ و دوملو به‌دست آمده است. قبل از آن اشویاتک به کمک گراچیک[۲۶] و لیوبیچ[۳۵] ثابت کرده بود که مجموعهٔ پارامترهای متناظر با ربایندههای دوره‌ایْ چگال است. اخیراً کوزلوسکی این قضیه را به خانوادهٔ نگاشتهای تکمدی بسیار کلی تعمیم داده است[۳۳]. از طرف دیگر قضیه‌ای پیشگامانه از یاکوبسون[۳۰] حاکی است که دینامیکِ نایکنواختْ‌هذلولوی، با مجموعه‌ای از پارامترها متناظر است که اندازهٔ احتمال لبگ مثبت دارد.

پیشرفت قابل‌ملاحظه‌ای نیز در مورد دستگاههای دینامیکی در ابعاد بالا به‌دست آمده است که به قسمتی از آن در بخشهای بعدی این مقاله اشاره خواهد شد. به‌علاوه، متناهی بودن ربایندهها، و ویژگیهای آماری متناظر با آنها، برای دستگاههای دینامیکی «کلی» با نوفهٔ تصادفی ثابت شده‌اند[۳].

## ۳. بینهایت چاه

دستگاههای دینامیکی با بینهایت رباینده وجود دارند؛ چنانکه نیوهاوس ثابت کرده است[۴۳]، هم‌وجودیِ [وجود همزمانِ] بینهایت مدار دوره‌ای رباینده در برخی زیرمجموعه‌های باز فضای $\mathrm{Diff}^k(M^2)$ متشکل از $C^k$ـدیفئومورفیسمهای رویهٔ $M^2$ به‌ازای $k \geq 2$ یک ویژگی عام (به‌معنای ردهٔ دوم بئر) است. این مجموعه‌های باز پدیده‌های پیچیدهٔ گوناگون دیگری، نظیر سایش[1]های هم‌تخت[۵۱]، همراه با تمام نتایج دینامیکی آنها [۴۵، فصل ۷] و نیز رشد فوق‌نمایی تعداد مدارات دوره‌ای[۳۱] را به نمایش می‌گذارند.

قضیه‌های نیوهاوس به ابعاد دلخواه[۴۶]، به دستگاههای پایستار[۲۴]، و به نگاشتهای تمامریخت خاصی[۱۹] تعمیم داده شده‌اند. گونه‌ای از آنها برای ربایندههای غیرهذلولوی (شبه‌هنون) در [۲۰] و سازوکار دیگری که بینهایت چاه را به‌دست می‌دهد در[۱۲] توصیف شده است که به‌ازای $d \geq 3$ در مورد $\mathrm{Diff}^1(M^d)$ نیز صادق است.

با این حال، سه دهه پس از اثبات نخستین قضیه‌ها، این پدیده هنوز هم به‌طور عمیق درک نشده است. حتی هیچ‌کس نمی‌داند که آیا هم‌وجودیِ تعداد نامتناهی از ربایندههای دوره‌ای به‌صورت استوار یعنی برای مجموعهٔ کامل بازی از دستگاهها (نه فقط برای یک زیرمجموعهٔ نوعیِ آن) برقرار است یا نه. اما، با توجه به انگاره‌هایی که قبلاً بیان شدند، کسی انتظار ندارد چنین

1. tangency

چیزی امکان داشته باشد. فراتر از آن: آیا هم‌وجودیِ بینهایتِ رباینده متناظر است با مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر در فضای پارامترها (اندازهٔ لبگ صفر روی خانواده‌های نوعی با تعداد متناهی یا شمارایی از پارامترها)؟ به هر حال، آیا توصیفی نمادین از دستگاههایی که بینهایت رباینده دارند میسر است؟

## ۴. تجزیه‌های دینامیکی

مجموعهٔ حدی دیفئومورفیسم $f : M \to M$ عبارت است از مجموعهٔ نقاط انباشتگی تمام مدارات $f$ یعنی

$$L := (\{\lim_k f^{n_k}(x) : x \in M, \quad n_k \to \pm\infty\}) \text{ بستار}$$

این دیفئومورفیسم را یکنواختْ‌هذلولوی (یا اصل A [۴۲، ۵۴]) می‌نامند هرگاه $L$ مجموعه‌ای یکنواختْ‌هذلولوی باشد، یعنی، اگر روی آن، فضای مماس به دو زیرکلاف $E^u$ و $E^s$ به‌صورت $T_L M = E^u \oplus E^s$ تجزیه شود چنانکه مشتق $f$ هر دو زیرکلاف را حفظ کند، و با سرعتهای یکنواخت $E^u$ را بسط دهد و $E^s$ را منقبض کند. در این حالت، بنابر [۵۴] می‌توان مجموعهٔ حدی را به تعدادی متناهی قطعهٔ بنیادی دوبه‌دو مجزا تجزیه کرد

$$L = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_N \qquad (۱)$$

که هر یک از آنها فشرده، ناوردا و تجزیه‌ناپذیر دینامیکی یعنی شامل مدارهای چگال است. چون بعضی از قطعه‌های مهم رباینده‌اند، وجود تعداد متناهی رباینده فوراً نتیجه می‌شود. آیا به‌ازای هر دستگاه بسیار کلی (غیرهذلولوی) تجزیه‌ای متناظر وجود دارد؟

در این جهت چند پیشرفت دلگرم‌کننده به‌دست آمده است. این امر ناشی از این واقعیت است که هر قطعهٔ بنیادی $\Lambda_j$ در (۱) مجموعه‌ای استوار است: همسایگیهای $U$ از $\Lambda_j$ و $\mathcal{U}$ از $f$ در $\mathrm{Diff}^1(M)$ وجود دارند، به‌طوری که $\Lambda_f = \Lambda_j$، و به‌ازای هر دستگاه $g \in \mathcal{U}$، $\Lambda_g$ تجزیه‌ناپذیر دینامیکی است که در آن

$$\Lambda_g := \{x \in M : g^n(x) \in U, n \in \mathbb{Z} \text{ به‌ازای هر }\}$$

مجموعهٔ ناوردای ماکسیمال $g$ در داخل $U$ است. بنابراین می‌توانیم مطالب زیادی دربارهٔ مجموعه‌های استوار دیفئومورفیسمها بگوییم. هرگاه $M$ دوبعدی باشد، یکنواختْ‌هذلولوی بودن از استواری نتیجه می‌شود[۳۶]. بوناتی، دیاز، پوژالس و اورس[۱۳، ۲۱] به‌طور کلی ثابت کرده‌اند که هر مجموعهٔ استوار در یک شرط ضعیف‌تر (اما باز هم یکنواختِ) هذلولوی بودن صدق می‌کند: تجزیهٔ مغلوب، یا حتی هذلولوی بودن جزئی.

تجزیهٔ مغلوب برای یک مجموعهٔ فشرده و ناوردای $\Lambda \subset M$ تجزیهٔ فضای مماسی به‌صورت $T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2$ است به‌طوری که مشتقْ هر دو زیرکلاف $E^1$ و $E^2$ را حفظ می‌کند، و روی اولی انبساطی‌تر است/روی دومی انقباضی‌تر است تا روی اولی: $\sigma > 1$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in \Lambda$ و هر دو بردار با نرم۱ چون $v^1 \in E^1$ و $v^2 \in E^2$ داریم

$$||Df(x)v^1|| \geq \sigma ||Df(x)v^2||. \qquad (۲)$$

هرگاه $Df$ یا $E^1$ را منبسط یا $E^2$ را منقبض کند می‌گوییم $\Lambda$ جزئاً هذلولوی است. یک دلیلِ اهمیت زیادِ این ویژگیها آن است که اطلاعات هندسی بسیار مفیدی دربارهٔ دینامیک $\Lambda$ به‌دست می‌دهند، مثل وجود برگ‌بندی‌های ناوردا.

حداقل در فضای ۳ بعدی، قضیه‌های متناظری در مورد جریانها ثابت شده است. مجموعه‌های استواری که شامل نقاط تعادل نباشند هذلولوی‌اند [۲۸]. جالب‌تر اینکه بنا به قضیه‌ای از مورالس، پاسیفیکو و پوژالس [۴۱]، مجموعه‌های استواری که شامل نقاط تعادل باشند لزوماً رباینده یا دافع هستند، و جزئاً هذلولویِ از نوعِ لورنتس‌اند. این نظریه که در[۴۱] ارائه شده است به زیبایی با نتایج توکر همخوانی دارد[۵۵]؛ توکر اخیراً این حدس قدیمی را ثابت کرده که معادلات مشهور لورنتس شامل یک ربایندهٔ «غریب» هستند.

مجموعهٔ ناوردای جزئاً هذلولوی در هیچ‌یک از دو حالت زمانْ گسسته و زمانْ پیوسته لزوماً استوار نیست. شرایط اضافی مناسبی که استواری را تضمین می‌کنند کدام‌اند؟ پوژالس و سامبارینو اخیراً ثابت کرده‌اند که برای دیفئومورفیسمهای رویه‌ای، مجموعه‌های ناوردا با تجزیه‌ای مغلوب، تجزیه‌ای دینامیکی به تعدادی متناهی قطعهٔ بنیادی را می‌پذیرند.

مسألهٔ وابستهٔ دیگر راجع به ویژگی تعقیب[1] است. گزاره‌ای کلاسیک در مورد دستگاههای یکنواختْ‌هذلولوی[۱۵] حاکی است که نزدیک هر شبه‌مدار، یعنی دنباله‌ای چون $(x_n)$ به‌طوری که $\mathrm{dist}(f(x_n), x_{n+1})$ به‌ازای هر $n$ کوچک باشد، مداری واقعی از دستگاه قرار دارد. نمی‌توان انتظار داشت که گزاره‌ای با این قوت در خارج از چارچوب هذلولوی با میزان قابل‌قبولی از کلیت برقرار باشد؛ نگاه کنید به[۱۱، ۶۱]. از طرف دیگر، ویژگیهای تعقیب زمانْ‌متناهی برای بسیاری از مدارها در موقعیتهای مهمی به‌طور ضمنی مطرح شده‌اند، مثلاً در اثبات پایداری تصادفی دستگاههای غیرهذلولی نظیر نگاشتهای هنون[۷]. آیا لم مفیدی در مورد تعقیب برای دستگاههای نایکنواختْ‌هذلولوی بسیار کلی وجود دارد؟

## ۵. هذلولوی بودنِ نایکنواخت

در نظریهٔ پِسین فرض می‌کنند که یک اندازهٔ احتمال ناوردای $\mu$ تثبیت شده است؛ یک حالت جالب این است که $\mu$ برابر با حجم (اندازهٔ لبگ) باشد. مقادیر $\lambda_1(x)$، ...، $\lambda_m(x)$ که از حد

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x)v||$$

به‌دست می‌آیند، وقتی $v$ روی همهٔ بردارهای مماس در $x$ تغییر می‌کند، نماهای لیاپونوف $f$ در نقطهٔ $x \in M$اند. بنابر قضیه‌ای از اوسلدتس[2]، این حد به‌ازای هر $v \in T_x M \setminus \{0\}$ و تقریباً هر $x$ وجود دارد (با تقریب $\mu$ـاندازه، یعنی $\mu$ـاندازهٔ مجموعهٔ $x$هایی که حد به‌ازای آنها وجود ندارد صفر است). اگر $\mu$ ارگودیک باشد، آنگاه $\lambda_j(.)$ها، $1 \leq j \leq m$، روی یک مجموعه با $\mu$ـاندازهٔ کامل ثابت‌اند. مفاهیم و حکمهای مشابهی در مورد جریانها برقرارند.

هذلولوی بودن نایکنواخت که به معنای غیرصفر بودن نماهای لیاپونوف است، تضمین می‌کندکه دستگاه دارای بعضی ازویژگیهای اساسی دستگاههای یکنواختْ‌هذلولوی، نظیر خمینه‌های موضعی پایدار یا خمینه‌های ناپایداری که قرصهای نشان داده شدهٔ هموارند[۴۸]، باشد. در مقابل، دربارهٔ دستگاههایی که نماهای صفر دارند اطلاعات چندانی در دست نیست. آیا نماهای لیاپونوفِ جریانها و دیفئومورفیسمها نوعاً غیرصفرند؟

1. shadowing property 2. Oseledets

پاسخ اقلاً برای دستگاههای پایستار نمی‌تواند بدون قید و شرط مثبت باشد. هرمان [۶۰] مجموعه‌های بازی از نگاشتهای هموار حجم‌نگهدار ساخت که مجموعه‌های ناوردای با حجم مثبت می‌پذیرند و مرکب از چنبره‌های ناوردایی هستند که دیفئومورفیسم بر آنها به‌صورت انتقال صلب

$$f(\theta_1, \ldots, \theta_d) = (\theta_1+\omega_1, \ldots, \theta_d+\omega_d)$$
به‌ازای تمام $(\theta_1, \ldots, \theta_d)$ها، (۳)

عمل می‌کند. برای دستگاههای (اتلافی) کلی کسی نمی‌داند که نماهای لیاپونوف می‌توانند به‌صورت استوار صفر شوند یا نه. از طرف دیگر، زاید بودن فرضِ هذلولوی بودنِ نایکنواخت در چند الگوی مهم نظیر خانوادهٔ هنون [۶] و همتاهای چندبعدی آن [۵۸] ثابت شده است. اخیراً دالگوپیات[1] عام بودن نماهای غیرصفر لیاپونوف را در میان دیفئومورفیسمهای جزئاً هذلولویِ قویِ[2] حجم‌نگهدار (تعریف بعداً داده می‌شود) در بعد ۳ ثابت کرده است.

قرار دادن این مسائل در یک زمینهٔ کلی یعنی در چارچوب دوگان دورها[3]ی خطی روی یک نگاشت (یا جریان) مفید است. در اینجا همراه با تبدیل $f : M \to M$، نگاشتی چون $A : M \to SL(k, \mathbb{R})$ را نیز در نظر می‌گیرند. تکرار $n$ام $A$ به‌صورت $A^n(x) = A(f^n(x)) \cdots A(f(x))A(x)$ به‌ازای هر $n \geq 1$ تعریف می‌شود. با فرض وارون‌پذیر بودن $f$، $A^{-n}(x)$ را به‌صورت وارون $A^n(f^{-n}(x))$ تعریف می‌کنند. نماهای لیاپونوف $(f, A)$ در نقطهٔ $x \in M$ مقادیر

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log ||A^n(x)v||$$

به‌ازای هر $v \in T_xM \setminus \{0\}$ هستند (در این زمینه قضیهٔ اوسلدتس به‌کار می‌آید).

چندین روش برای مطالعهٔ نماهای لیاپونوف در این چارچوب طراحی شده است؛ روشهای فورستنبرگ [۲۵]، هرمان [۲۹]، و کوتانی [۳۲] از جملهٔ آنها هستند. اجمالاً می‌توان گفت که شرایطی ضعیف برای اطمینان از غیرصفر بودن نماها معمولاً کافی است. برای نمونه، در مورد حاصلضربهای ماتریسهای تصادفی متعلق به $SL(2, \mathbb{R})$ (که مستقل و هم‌توزیع با توزیع احتمال $\nu$ باشند) شرط مذکور در [۲۵] فقط نبودِ اندازهٔ احتمال در فضای تصویری $\mathbb{RP}^1$ است که تحت هر ماتریس متعلق به تکیه‌گاه $\nu$ ناوردا باشد.

با این حال، این مطلب باید با حکم دو حالتی زیر که اخیراً بوکی[4] آن را ثابت کرده است مقایسه شود: دوگان‌دورهای پیوستهٔ عام (به‌معنای رستهٔ دوم بئر) $SL(2, \mathbb{R})$ روی هر تبدیل ارگودیک نادوره‌ای $f : (M, \mu) \to (M, \mu)$ یا یکنواخت‌ْهذلولوی‌اند یا نماهای لیاپونوف صفر دارند (نادوره‌ای بودن به این معناست که نقاط دوره‌ای $f$ مجموعه‌ای با $\mu$ـاندازهٔ کامل نیست). چند سال پیش گزاره‌ای مشابه برای دیفئومورفیسمها توسط مانیه مطرح شد اما هیچ برهانی برای آن ارائه نشد. آیا دیفئومورفیسمهای رویه‌ای حجم‌نگهدار $C^1$ـعام یا یکنواخت‌ْهذلولوی‌اند یا تقریباً در هر نقطه با تقریب اندازهٔ لبگ دارای نماهای لیاپونوف صفرند؟ در مورد دیفئومورفیسمهای همتافته درابعاد مختلف چه می‌توان گفت؟

1. Dolgopyat 2. strongly partially hyperbolic 3. co-cycles
4. Bochi

## ۶. اندازه‌های فیزیکی

به‌ازای $f : M \to M$ و $x \in M$، میانگین زمانی تابع $\varphi : M \to \mathbb{R}$ روی مدار $x$ عبارت است از

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \left(\varphi(x) + \varphi(f(x)) + \cdots + \varphi(f^n(x))\right).$$

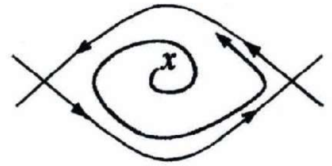
با فرض وجود حد به‌ازای هر تابع پیوستهٔ $\varphi$، این حد یک اندازهٔ احتمال $\mu_x$ روی $\sigma$ـجبر بورل $M$ تعریف می‌کند: انتگرال $\varphi$ نسبت به $\mu_x$ درست برابر است با میانگین زمانی $\varphi$ روی مدار $x$. این اندازهٔ رفتار مجانبی $x$ را به‌صورت کمّی توصیف می‌کند: به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $D \subset M$ که مرز آن دارای $\mu_x$ـاندازهٔ صفر است داریم

$$\mu_x(D) = \text{میانگین زمانی که مدار } x \text{ در } D \text{ صرف می‌کند}$$

احتمال $\mu$ یک اندازهٔ فیزیکی (یا سینایی‌ـروئل‌ـبوئن) برای $f$ نامیده می‌شود هرگاه برابری $\mu_x = \mu$ روی مجموعه‌ای از حالتهای اولیهٔ $x$ با اندازهٔ لبگ مثبت برقرار باشد. این مجموعه را با $B(\mu)$ نشان می‌دهند و آن را پهنهٔ $\mu$ می‌نامند. این مفاهیم به‌صورت سرراست به جریانها تعمیم می‌یابند.

قضیهٔ ارگودیک برکاف وجود میانگینهای زمانی در تقریباً تمام نقاط را با تقریب هر اندازهٔ متناهی ناوردا تضمین می‌کند. این موضوع به‌ویژه برای دستگاههای پایستار مهم است. به‌طور کلی، ممکن است میانگینهای زمانی به‌ازای مجموعه‌های بزرگی از حالتهای اولیهٔ $x \in M$ نسبت به اندازهٔ لبگ وجود نداشته باشند. یک مثال از این نوع، جریانی مسطح با هموستار[1] زینی مضاعف است که در شکل ۱ رسم شده است. آیا به‌ازای بیشتر دستگاههای دینامیکی، میانگینهای زمانی با تقریب اندازهٔ لبگ تقریباً همه‌جا همگرا هستند؟ آیا تقریباً هر نقطه در پهنهٔ یک اندازهٔ فیزیکی قرار دارد؟ آیا تعداد اندازه‌های فیزیکی متناهی است؟

معمولاً اثبات وجود یا متناهی بودن اندازه‌های فیزیکی بسیار مشکل است، اما این مطلب در چند حالت بسیار مهم به اثبات رسیده است. علاوه بر قضیه‌های کلاسیک سینائی، روئل، و بوئن [۱۶، ۵۲، ۵۳] در مورد دستگاههای هذلولوی، می‌توانم از کار یاکوبسون [۳۰] در مورد نگاشتهای تکمدی بازه، کار بندیکس و یانگ [۹] در مورد نگاشتهای نایکنواخت‌ْهذلولوی هنونِ ساختهٔ بندیکس، کار کارلسون [۶]، و آلوس، بوناتی، و ویانا [۱، ۲، ۱۴] در مورد رده‌های استوار نگاشتهای جزئاً هذلولوی نام ببرم. به‌ویژه [۲] فقط با مفروض گرفتن چند نکتهٔ کلی دربارهٔ نایکنواخت‌ْهذلولوی بودن (نمادهای لیاپونوف غیرصفر) به این انگاره می‌رسد: نایکنواخت‌ْهذلولوی بودن در تقریباً هر نقطه، با تقریب اندازهٔ لبگ، وجود اندازهٔ فیزیکی را ایجاب می‌کند.




**شکل ۱** دستگاهی بدون میانگین زمانی

1. connection

## ۷. پدیده‌های هم‌تخت

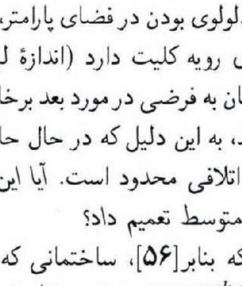
قضیهٔ جدیدی از پوژالس و سامبارینو[۵۱] حاکی است که هر دیفئومورفیسم رویه‌ای را می‌توان با $C^1$ـدیفئومورفیسمی که یا یکنواختْ‌هذلولوی است یا دارای سایش هم‌تخت است تقریب زد (تقریب یکنواخت نگاشت و مشتق اول آن). هر سایش هم‌تخت یک اشتراک نامتقاطع[1] بین خمینهٔ پایدار و خمینهٔ ناپایدارِ یک زین هذلولوی است. شکل ۲ حالتی را نشان می‌دهد که در آن خمینه‌های پایدار و ناپایدار دارای اشتراکهای متقاطع هستند. بنابراین سایشهای هم‌تخت ۲ بعدی مانع از هذلولوی بودن می‌شوند و فهم رفتار غیرهذلولوی باید متکی بر فهم شکلهایِ دینامیک پیچیده‌ای باشد که در نزدیکی سایشهای هم‌تخت رخ می‌دهد.

رابطهٔ نزدیکی بین پدیدهٔ سایشهای هم‌تخت و خانوادهٔ نگاشتهای هنون $f(x,y)=(1-ax^2+by,x)$ وجود دارد. در واقع اختلالات خانوادهٔ هنون الگوی بسیاری از رفتارهای سایشهای هم‌تخت است وقتی که در طول خانواده‌ای پارامتری از دیفئومورفیسمهای رویه باز گشوده شوند؛ نگاه کنید به [۴۵، فصل۳]. اثبات بندیکس و کارلسون[۶] از این حکم که نگاشتهای هنون به‌ازای مجموعه‌ای از مقادیر پارامتر با اندازهٔ لبگ مثبت، ربایندهٔ نایکنواختْ‌هذلولوی دارند راه را برای تکمیل تصویر دینامیک خانوادهٔ بزرگی از دستگاههای غیرهذلولوی هموار کرد. در مورد قرارگرفتن این مطالب در چارچوب کلی انشعاب، نگاه کنید به [۷ـ۱۰] و همچنین [۲۲، ۴۰، ۵۷].

در این زمینه، اخیراً پَلیس و یوکوز نتیجهٔ مهمی به‌دست آورده‌اند [۴۷] که ثابت می‌کند نایکنواختْ‌هذلولوی بودن در فضای پارامتر، در نزدیکی سایشهای هم‌تخت دیفئومورفیسمهای رویه کلیت دارد (اندازهٔ لبگ نسبی نزدیک ۱ است). شکل ۲ را ببینید. آنان به فرضی در موردِ بعد برخالی مجموعهٔ هذلولویِ دخیل در سایش نیاز دارند، به این دلیل که در حال حاضر نظریهٔ نگاشتهای شبه هنون به حالت قویاً اتلافی محدود است. آیا این نظریه را می‌توان به دیفئومورفیسمهای اتلافی متوسط تعمیم داد؟

خاطر نشان می‌کنم که بنابر[۵۶]، ساختمانی که نیوهاوس[۴۳] برای زیرمجموعه‌های باز $\mathrm{Diff}^k(M^2)$، $k\geq 2$، متناظر با دینامیک غیرهذلولوی ارائه داده است در مورد دیفئومورفیسمهای $C^1$ صادق نیست. در حقیقت معلوم نیست که آیا دیفئومورفیسمهای هذلولوی (اصل A) در فضای $C^1$ از دیفئومورفیسمهای یک رویه چگال است یا نه (که بنابر قضیه‌ای از آبراهام و اسمیل در ابعاد بالاتر چنین نیست).

تعمیم زیر از[۵۱] به ابعاد دلخواه نیز حدسی از پَلیس است[۴۴]: هر دیفئومورفیسم را می‌توان به‌ازای هر $r\geq 1$ با یک $C^r$ـدیفئومورفیسم که یا هذلولوی است یا در غیر این‌صورت سایش هم‌تخت یا دور دگرتخت دارد تقریب زد. منظور از دور دگرتخت[2] مجموعه‌ای متناهی از نقاط دوری هذلولوی است که به‌صورت دوری به‌وسیلهٔ تقاطع بین خمینه‌های پایدار و ناپایدار باهم مرتبط‌اند، به‌طوری که همهٔ خمینه‌های پایدار آنها از بعد برابر برخوردار نیستند. این انگاره حتی به‌ازای $r=1$ ثابت نشده است.



شکل ۲ یک سایش هم‌تخت

1. non-transverse intersection  2. heteroclinic cycle

قضیه‌های مربوط به $C^r$ـتقریب به‌ازای $r>1$ بسیار مشکل‌اند. مثلاً: به‌ازای یک نقطهٔ بازگشتی $x$ از دیفئومورفیسم $f$، آیا در نزدیکی آن یک $C^r$ـدیفئومورفیسم وجود دارد که $x$ یک نقطهٔ دوری آن باشد؟ لم $C^1$ـهم‌بستن[1] پیو[۴۹] حاکی است که به‌ازای $r=1$ پاسخ مثبت است. این لم در مقالهٔ مشترکی از او و رابینسن به جریانها و رده‌های خاصی از دستگاهها، نظیر نگاشتهای همتافته و جریانهای همیلتنی تعمیم یافت. در مقابل، به‌ازای $r>1$ (حتی به‌ازای $r=1+\epsilon$!) بجز نتایج جزئی در مورد جریانهای روی رویه‌ها که پشوتو و اخیراً گوتیه‌رز[۲۷] به‌دست آورده‌اند، چیز چندانی اثبات نشده است. مثلاً معلوم نیست که دیفئومورفیسمهایِ با یک نقطهٔ دوری در $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^2)$ چگال باشند. اما هرمان[۶۰] ثابت کرد که لم $C^\infty$ـهم‌بستن برای نگاشتهای همتافته و جریانهای همیلتنی روی برخی خمینه‌ها در واقع نادرست است. در عین حال، بهسازیهای قابل‌توجهی در قضیهٔ پیو صورت گرفته و نتایجی نظیر لم $C^1$ـهم‌بستن ارگودیک مانیه[۳۷] و لم $C^1$ـالصاق[2] هایاشی[۲۸] به‌دست آمده است.

## ۸. دستگاههای پایستار

اهمیت رفتار دینامیکی بیضوی را، به‌ویژه در زمینهٔ دستگاههای پایستار، یعنی نگاشتهای همتافته (یا حجم‌نگهدار) و جریانهای همیلتنی نمی‌توان دست‌کم گرفت. قضیهٔ کولموگوروف، آرنولد و موزر در مورد نگاشتهای همتافته حاکی است که نزدیک هر نقطهٔ دوره‌ای بیضوی ناتباهیده (نرم تمام ویژه‌مقدارها ۱ است) مجموعه‌هایی با حجم مثبت مرکب از چنبره‌های ناوردا وجود دارند که وقتی نگاشت به آنها محدود شود مانند (۳) عمل می‌کند. به‌ویژه، در حضور یک چنین نقطهٔ بیضوی، دستگاه نمی‌تواند ارگودیک باشد. در حالت خاصی که خمینهٔ زمینه ($M$) دوبعدی است، چنبره‌ها خمهای ژوردان حول نقطهٔ بیضوی‌اند.

قضیه‌های مهمی، به‌ویژه قضیه‌های متعلق به هرمان و روسمان [۶۰] چشم‌انداز این نظریه را بسیار عمیق‌تر کرده‌اند. زندر[۶۲] ثابت کرد که در بعد ۲، رفتار هذلولوی در ناحیهٔ بین خمهای KAM به‌صورت اشتراکهای هم‌تخت متقاطع، وابسته به نقاط دوره‌ای هذلولوی رخ می‌دهد، و نظریهٔ مجموعه‌های آوبری‌ـمَدر[۵، ۳۸] تصویری چشمگیر از رفتار دینامیکی در نزدیکی نقطه بیضوی را با ارائهٔ جانشینی برای خمهای «گمشده» کامل کرد.

به‌طورکلی، فهم تعادل بین دینامیک هذلولوی و بیضوی هنوز دوراز دسترس است. در مورد خانوادهٔ متعارف نگاشتهای مساحت‌نگهدار چنبرهٔ ۲ بعدی

$$f_\kappa(x,y)=(-y+2x+\kappa\sin(2\pi x),x)\mod \mathbb{Z}^2$$

دوآرته ثابت کرده است[۲۳] که نقاط بیضوی و خمهای ناوردای KAM برای پارامترهای عام به‌قدرکافی بزرگ $\kappa\in\mathbb{R}$ فراوان‌اند (که «عام» به‌معنای رستهٔ دوم بئر است). با این حال، عقیدهٔ عمومی بر این است که باید غلبه با هذلولوی بودن نایکنواخت باشد؛ از دیدگاه احتمالاتی: آیا مجموعه‌ای از مقادیر $\kappa$ با اندازهٔ لبگ مثبت وجود دارد که به‌ازای آن $f_\kappa$، (i) نماهای لیاپونوف ناصفر روی مجموعه‌ای از نقاط با اندازهٔ لبگ مثبت (به‌ترتیب، کامل) داشته باشد؟ (ii) هیچ نقطهٔ دوری بیضوی نداشته باشد؟ و باز ارگودیک باشد؟ کاسیگین[3] و سینایی اعلام کرده‌اند

1. $C^1$-closing lemma  2. $C^1$-connecting lemma  3. Kosygin

که می‌توانند مجموعه‌ای ناشمارا از پارامترهای $\kappa$ بسازند که به‌ازای آنها (i) و (ii) برقرار باشند. همچنین آنها همین اواخر اعلام کردند که روشهایشان مجموعه‌ای با اندازهٔ لبگ مثبت به‌دست می‌دهد که به‌ازای $\kappa = \infty$ چگالی کامل دارد.

در مورد نگاشتهای همتافته با $d \geq ۲$ درجهٔ آزادی (بعد فضای زمینه $۲d \geq ۴$ است) چنبره‌های KAM نواحی را در فضای دینامیکی محدود نمی‌کنند، و بنابراین مدارهایی که در هیچ چنبرهٔ ناوردایی قرار ندارند ممکن است به بینهایت فرار کنند. از وقتی این امکان در[۴] مطرح شد، تلاشهایی برای اثبات اینکه پخش آرنولد در وضعیتهای نوعی رخ می‌دهد صورت گرفته است. در حال حاضر، به نظر می‌رسد که کلی‌ترین قضیه‌ها با روشهای وردشی مدر ارائه شود[۳۹]؛ همچنین نگاه کنید به[۵۹].

روش دسترس‌پذیری برای اثبات ارگودیک بودن دستگاههای حجم‌نگهدار به‌وسیلهٔ برین‌ـپسین[۱۷] ارائه شد، و با رشته مقالاتی به قلم پیو، شوب، ویلکینسن، برنز، نیتیکا[1]، توروک[2]، و دالگوپیات در چند سال اخیر به سطح جدیدی از کلیت رسید؛ برای کسب اطلاعات روزآمد، مقالهٔ مروری[۱۸] را ببینید. اجمالاً می‌توان گفت که فرض می‌شود دیفئومورفیسم $f$ جزئاً هذلولوی قوی[3] باشد: فضای مماس به سه زیرکلاف ناوردای $TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s$ تجزیه می‌شود به‌طوری که $Df|E^u$ یک انبساط، $Df|E^s$ یک انقباض، و $Df|E^c$ بین این دو به معنای (۲) است. در این‌صورت، دسترس‌پذیری به این معناست که هر دو نقطه (بجز تعداد متناهی نقطهٔ گوشه‌ای) را می‌توان با یک مسیر تکه‌ای هموار مماس بر $E^u$ یا $E^s$ به‌هم وصل کرد.

هر چند این مفهوم در مورد دستگاههای کلی (اتلافی) هم مفید است، ولی کارآمدی آن به‌خصوص در حالت پایستار به اثبات رسیده است. به‌ویژه قضیه‌ای از پیو و شوب[۵۰] حاکی است که در مورد دیفئومورفیسمهای حجم‌نگهدار، دسترس‌پذیری همراه با چند فرض تکنیکی، ارگودیک بودن پایدار را ایجاب می‌کند (تمام نگاشتهای حجم‌نگهدار در یک همسایگی از $f$ ارگودیک‌اند). نتایجی در جهت عکس نیز به‌دست آمده‌اند. اما، باید گفت که هذلولوی بودن جزئی برای ارگودیک بودن پایدار ضروری نیست[۱۴].

## ۹. نتیجه

ویژگی جذاب دستگاههای دینامیکی به نظر من این است که محل تلاقی رشته‌های مختلف ریاضی و نیز علوم تجربی است. آنالیز (حقیقی و مختلط)، توپولوژی (دیفرانسیل و جبری)، احتمال و نظریهٔ اندازه، هندسه (از انواع مختلف)، و نظریهٔ اعداد، همگی روشهای خود را به دینامیک داده‌اند (و غالباً از آن بهره‌مند شده‌اند)؛ و مسائل ملموسی در زمینه‌هایی چون مکانیک (کلاسیک یا سیالات)، الکترومغناطیس، ترمودینامیک، جمعیت‌شناسی، نظریهٔ اطلاع، و اقتصاد به برخی از مسائلی منجر شده‌اند که این حوزه از ریاضیات را شکل داده‌اند. به‌ویژه، منشأ الگوهای تحول را که دربارهٔ آنها با دقت بیشتری بحث کردم، و در رشتهٔ دستگاههای دینامیکی هدف بیشترین تحقیقات بوده‌اند، می‌توان در نظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل، و به‌خصوص در مکانیک سماوی باز جست.

بسیاری از پدیده‌های طبیعی دیگر را می‌توان با الگوهایی ریاضی نظیر معادلات دیفرانسیل جزئی یا نگاشتهای تصادفی و جریانها بهتر توصیف کرد. یک مثال شاخص، مکانیک سیالات، و به‌ویژه مسألهٔ تلاطم است. ایده‌هایی نظیر آنچه در بالا مورد بحث قرار دادم می‌توانند برای تعمیم نظریه به الگوهای بینهایت‌بعدی مفید باشند اگرچه چند مسألهٔ بسیار بنیادی مانند وجود جوابهای سراسری برای معادلهٔ ناویرـاستوکس حل‌نشده باقی می‌مانند. مسیری که می‌توان برای چنین تعمیمی در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی اتلافی در نظر گرفت عبارت است از تحویل دستگاه به یک خمینهٔ لختی ناوردا، با بعد متناهی، و ربایندهٔ جوابی که از تقریباً هر شرط اولیه می‌گذرد.

البته، همچنان چالشهای جدیدی مطرح می‌شوند. هم‌اکنون یکی در حال سر برآوردن است و آن، مسألهٔ شناخت دینامیک دستگاههای زیست‌شناختی بسیار پیچیده، نظیر محیط زیست اکولوژیکی یا مغز انسان است. آیا پارادایم‌های بنیادی ما دربارهٔ این وضعیتها صادق است، یا اجباراً باید ابزارها و مفاهیم اساساً جدیدی طراحی کنیم؟ بهتر است صبر کنیم و ببینیم.

1. Niţică  2. Török  3. strongly partially hyperbolic

**سپاسگزاری.** مترجم از آقای دکتر سیاوش شهشهانی به خاطر رفع بعضی از غوامض ترجمهٔ این مقاله سپاسگزار است.

## مراجع

1. J. F. Alves. SRB measures for non-hyperbolic systems with multidimensional expansion. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 33:1-32, 2000.

2. J. F. Alves, C. Bonatti, and M. Viana. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. *Invent. Math.* To appear.

3. V. Araújo. Attractors and time averages for random maps. *Annales de l'Inst. Henri Poincaré - Analyse Non-linéaire.* To appear.

4. V. I. Arnold. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Mathematical Surveys*, 18:85-191, 1963.

5. S. Aubry. The devil's staircase transformation in incommensurable lattices. In *The Riemann problem, complete integrability, and arithmetic applications*, volume 925 of *Lect. Notes in Math.*, pages 221-245. Springer Verlag, 1982.

6. M. Benedicks and L. Carleson. The dynamics of the Hénon map. *Annals of Math.*, 133:73-169, 1991.

7. M. Benedicks and M. Viana. Random perturbations and statistical properties of certain Hénon-like maps. To appear.

8. M. Benedicks and M. Viana. Solution of the basin problem for Hénon-like attractors. *Invent. Math.* To appear.

9. M. Benedicks and L.-S. Young. SBR-measures for certain Hénon maps. *Invent. Math.*, 112:541-576, 1993.

10. M. Benedicks and L.-S. Young. Markov extensions and decay of correlations for certain Hénon maps. *Astérisque*, 261:13-56, 2000.

11. C. Bonatti, L. J. Díaz, and G. Turcat. Pas de shadowing lemma pour les dynamiques partiellement hyperboliques. *C. R. Acad. Sci. Paris.* To appear.

12. C. Bonatti and L. J. Díaz, Connexions heterocliniques et genericité d'une infinité de puits ou de sources. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 32:135-150, 1999.

13. C. Bonatti and L. J. Díaz, and E. Pujals. A $C^1$-generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources. Preprint, 1999.

14. C. Bonatti and M. Viana. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. *Israel Journal Math.*, 115:157-193, 2000.

15. R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470 of *Lect. Notes in Math.* Springer Verlag, 1975.

16. R. Bowen and D. Ruelle. The ergodic theory of Axiom A flows. *Invent. Math.*, 29:181-202, 1975.

17. M. Brin and Ya. Pesin. Partially hyperbolic dynamical systems. *Izv. Acad. Nouk. SSSR*, 1:177-212, 1974.

18. K. Burns, C. Pugh, M. Shub, and A. Wilkinson. Recent results about stable ergodicity. Preprint, 2000.

19. G. Buzzard. Infinitely many periodic attractors for holomorphic maps. *Annals of Math.*, 145:389-417, 1997.

20. E. Colli. Infinitely many coexisting strange attractors. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 15:539-579, 1998.

21. L. J. Díaz. E. Pujals, and R. Ures. Partial hyperbolicity and robust transitivity. *Acta Math.*, 1999. To appear.

22. L. J. Díaz, J. Rocha, and M. Viana. Strange attractors in saddle-node cycles: prevalence and globality. *Invent. Math.*, 125:37-74, 1996.

23. P. Duarte. Plenty of elliptic islands for the standard family of area preserving maps. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Linéaire*, 11:359-409, 1994.

24. P. Duarte. Abundance of elliptic islands at conservative bifurcations. *Dynam. Stability Systems*, 14:339-356, 1999.

25. H. Furstenberg. Non-commuting random products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:377-428, 1963.

26. J. Graczyk and G. Swiatek. Generic hyperbolicity in the logistic family. *Annals of Math.*, 146:1-52, 1997.

27. C. Gutierrez. On $C^r$-closing for flows on 2-manifolds. *Nonlinearity*. To appear.

28. S. Hayashi. Connecting invariant manifolds and the solution of the $C^1$-stability and $\Omega$-stability conjectures for flows. *Annals of Math.*, 145:81-137, 1997.

29. M. Herman. Sur les courbes invariantes par les diffeomorphismes de l'anneau. *Astérisque*, 103-104, 1983.

30. M. Jakobson. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.*, 81:39-88, 1981.

31. V. Kaloshin. Generic diffeomorphisms with superexponential growth of the number of periodic orbits. *Comm. Math. Phys.* To appear.

32. S. Kotani. Lyapunov indices determine absolutely continuous spectra of stationary random one-dimensional Schrödinger operators. In *Stochastic analysis*, pages 225-248. North Holland, 1984.

33. O. Kozlovski. *Structural stability in one-dimensional dynamics.* PhD thesis, Univ. Amsterdam, 1998.

34. M. Lyubich. Almost every real quadratic map is either regular or stochastic. Preprint, 1997.

35. M. Lyubich. Dynamics of quadratic maps I-II. *Acta Math.*, 178:185-297, 1997.

36. R. Mañé. Contributions to the stability conjecture. *Topology*, 17:383-396, 1978.

37. R. Mañé. An ergodic closing lemma. *Annals of Math.*, 116:503-540, 1982.

38. J. Mather. The existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus. *Topology*, 21:457-467, 1982.

39. J. Mather. A variational construction of connecting orbits. *Ann. Inst. Fourier*, 435:219-240, 1993.

40. L. Mora and M. Viana. Abundance of strange attractors. *Acta Math.*, 171:1-71, 1993.

41. C. Morales, M. J. Pacifico, and E. Pujals. On $C^1$ robust singular transitive sets for three-dimensional flows. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 326, Série I:81-86, 1998.

42. S. Newhouse. Hyperbolic limit sets. *Trans. A.M.S.*, 167:125-150, 1972.

43. S. Newhouse. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. I.H.E.S*, 50:101-151, 1979.

44. J. Palis. A global view of Dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors. *Astérisque*, 261:335-347, 2000.

45. J. Palis and F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive-chaotic dynamics at homoclinic bifurcations.* Cambridge University Press, 1993.

46. J. Palis and M. Viana. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors. *Annals of Math.*, 140:207-250, 1994.

47. J. Palis and J.-C. Yoccoz. Non-uniformly hyperbolic horseshoes unleashed by homoclinic bifurcations. *C. R. Acad. Sci. Paris.* To appear.

48. Ya. Pesin. Families of invariant manifolds corresponding to non-zero characteristic exponents. *Math. USSR. Izv.*, 10:1261-1302, 1976.

49. C. Pugh. The closing lemma. *Amer. J. of Math.*, 89:956-1009, 1967.

50. C. Pugh and M. Shub. Stably ergodic dynamical systems and partial hyperbolicity. *J. Complexity*, 13:125-179, 1997.

51. E. Pujals and M. Sambarino. Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms: a conjecture of Palis. *Annals of Math.* To appear.

52. D. Ruelle. A measure associated with Axiom A attractors. *Amer. J. Math.*, 98:619-654, 1976.

53. Ya. Sinai. Dynamical systems with elastic reflections: ergodic properties of scattering billiards. *Russian Math. Surveys*, 25:137-189, 1970.

54. S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Am. Math. Soc.*, 73:747-817, 1967.

55. W. Tucker. The Lorenz attractor exists. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328, Série I:1197-1202, 1999.

56. R. Ures. Abundance of hyperbolicity in the $C^1$ topology. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 28:747-760, 1995.

57. M. Viana. Strange attractors in higher dimensions. *Bull. Braz. Math. Soc.*, 24:13-62, 1993.

58. M. Viana. Multidimensional nonhyperbolic attractors. *Publ. Math. IHES*, 85:69-96, 1997.

59. Z. Xia. Arnold diffusion: a variational construction. In *Procs. International Congress of Mathematicians ICM98-Berlin*, Documenta Mathematica, vol II, pages 867-877. DMV, 1998.

60. J.-C. Yoccoz. Travaux de Herman sur les tores invariants. *Astérisque*, 206:311-344, 1992.

61. G.-C. Yuan and J. Yorke. An open set of maps for which every point is absolutely nonshadowable. *Procs. Amer. Math. Soc.*, 128:909-918, 2000.

62. E. Zehnder. Homoclinic points near elliptic fixed points. *Comm. Pure Appl. Math.*, 26:131-182, 1973.

******

• Marcelo Viana, "Dynamical systems: Moving into the next century", in *Mathematics Unlimited 2001 and Beyond*, B. Engquist and W. Schmid (eds), Springer (2001) 1167-1178.

* مارسلو ویانا، ایمپا، برزیل