تعریف آنالیز عددی •

لویدترفتن *
ترجمهٔ نظام‌الدین مهدوی امیری

آنالیز عددی چیست؟ من معتقدم که این سؤال فقط یک سؤال فلسفی نیست. مدتها در میان اهل این رشته و افرادِ خارج از آن پاسخ نادرستی به این سؤال رواج داشته که چهرهٔ موضوعی را که در قلب علوم ریاضی جای دارد، مخدوش کرده است.

این پاسخ نادرست چنین است:

(ت ۱) آنالیز عددی، مطالعهٔ خطاهای گردکردن است.

خواننده حتماً موافق است که مشکل بتوان توصیفی *بیروح‌تر* از (ت ۱) از یک موضوع ارائه کرد. بله، از خطاهای گردکردن نمی‌توان اجتناب کرد ولی مطالعهٔ آنها پیچیده و خسته کننده است و *اهمیت بنیادی ندارد*. اگر این تعریف پذیرفته شود، تعجب‌آور نیست که آنالیز عددی در نظر خیلیها موضوع پیش پاافتاده‌ای است. در حقیقت، ریاضیدانان، فیزیکدانان، و متخصصان علوم کامپیوتر عموماً برای آنالیز عددی منزلتی قائل نبوده‌اند و این اجماع نظر بسیار غیرعادی است.

البته هیچ‌کس آنالیز عددی را واقعاً به این بدی تعریف نمی‌کند، اما بد نیست به سرفصلهای آغازین برخی ازکتابهای درسی متعارف آنالیز عددی توجه کنید:

آیزکسن و کلر (۱۹۶۶): ۱. نرمها، حساب، و محاسبات خوشتعریف

هَمینگ (۱۹۷۱): ۱. گردکردن و محاسبهٔ مقدار تابع

دالکویست و بیورک (۱۹۷۴): ۱. برخی از اصول کلی محاسبهٔ عددی، ۲. چگونه دقت را به‌دست آوریم و برآورد کنیم.

اشتوئروبولرش (۱۹۸۰): ۱. آنالیز خطا

کونت‌ودبور (۱۹۸۰): ۱. دستگاههای اعداد و خطاها

اتکینسن .(۱۹۸۷): خطا: منشأ، انتشار، و آنالیز آن

کاهانر، مولر، و نَش (۱۹۸۷): ۱. مقدمه، ۲. حساب کامپیوتری و خطاهای محاسباتی.

«خطا» ... «گردکردن» ... «حساب کامپیوتری»، اینها کلماتی هستند که بارها تکرار می‌شوند. یک دانشجوی تیزبین از بازکردن چنین کتابهایی چه احساسی پیدا می‌کند؟ حال تعریف آنالیز عددی را در بعضی از لغت‌نامه‌ها در نظر بگیرید:

فرهنگ *دانشگاهی جدید وبستر* (۱۹۷۳): «*مطالعهٔ تقریبهای کمّی جوابهای مسائل ریاضی شامل بررسی خطاها وکرانهای آنها*.»

فرهنگ *قرن بیستم چمبرز* (۱۹۸۳): «*مطالعهٔ روشهای تقریب و دقت آنها، و غیره*.»

فرهنگ *آمریکایی هریتیج* (۱۹۹۲): *مطالعهٔ جوابهای تقریبی مسائل ریاضی با به‌حساب آوردن دامنهٔ خطاهای ممکن*».

باز هم «تقریبها» ... «دقت» ... «خطاها». به نظر من این تعاریف، فرد کنجکاو را ازکندوکاو بیشتر باز می‌دارند.

تجزیهٔ مقدار تکین (SVD) مثال دیگری است از این تصور که آنالیز عددی علم گردکردن خطاهاست. اگرچه ریشه‌های SVD به پیش از ۱۰۰ سال پیش بر می‌گردد، اهمیت امروزی خود را عمدتاً از سالهای ۱۹۶۰ با تحقیقات جین گولاب (Gene Golub) و آنالیزدانهای عددی دیگر یافته است. SVD به‌همان اندازهٔ تجزیهٔ مقدار ویژه، مفهومی اساسی است و چارچوبی طبیعی است برای بحث در بارهٔ انواع مسائل مربوط به نرمها و اکسترممها در ارتباط با ماتریسهای نامتقارن یا عملگرها. ولی امروزه، پس از ۳۰ سال، بیشتر دانشمندان علوم ریاضی و حتی بسیاری از ریاضیدانان کاربردی، حداقل اطلاعات لازم را در بارهٔ SVD ندارند. بیشتر آنها چیزی در بارهٔ آن شنیده‌اند، ولی ظاهراً برداشت رایج این است که SVD فقط وسیله‌ای است برای مقابله با خطاهای گردکردن. با یک نگاه سطحی به چند کتاب درسی آنالیز عددی دلیل این امر روشن می‌شود. در این کتابها SVD در لابه‌لای صفحات کتاب گم شده و معمولاً در مبحثی پیشرفته راجع به مسائل کمترین مربعات با رتبهٔ ناقص آمده و استفاده از آن عمدتاً به علت خواص پایداریش توصیه شده است.

من متقاعد شده‌ام که بسیاری از افراد، آگاهانه یا ناآگاهانه، معتقدند که (ت ۱) حداقل نیمی از حقیقت را بیان می‌کند؛ ولی در واقع این تعریف تنها قسمت بسیار کوچکی از حقیقت است. اگرچه دلایلی تاریخی برای رواج و نفوذ (ت ۱) درگذشته می‌توان ذکر کرد، این تعریف امروز چندان مناسبتی ندارد و در آینده قطعاً از این هم نامناسبتر می‌شود.

من تعریف زیر را در آستانهٔ قرن جدید پیشنهاد می‌کنم:

(ت ۲) *آنالیز عددی، مطالعهٔ الگوریتمها برای مسائل ریاضیات پیوسته است.*

مرز بین رشته‌های علمی همواره نامشخص است؛ هیچ تعریفی نمی‌تواند کامل باشد. اما به نظر من (ت ۲) به اندازهٔ توصیفی که از اغلب رشته‌های دیگر می‌شود، دقت دارد.

در این تعریف، کلمهٔ اساسی «الگوریتمها»ست. جایگاه این کلمه در آن

سرفصلها و تعریفهای لغت‌نامه‌ای کجا بود؟ با خوش‌بینانه‌ترین نظر، در لابه‌لای سطور گم شده بود، در حالی که اساس و عصارهٔ کار آنالیز عددی همین است: طرح کردن و تحلیل الگوریتمها برای حل دستهٔ مشخصی از مسائل.

این مسائل به *ریاضیات* پیوسته تعلق دارند. منظور از «پیوسته» این است که این نوع ریاضیات با متغیرهای حقیقی یا مختلط سروکار دارد، و مخالف آن، «گسسته» است. صرفنظر از توصیفات متعدد دیگری که از آنالیز عددی شده است، آنالیزدانهای عددی عمدتاً با مسائل پیوسته سروکار دارند و الگوریتمهای مسائل گسسته مورد توجه دانشمندان علوم کامپیوتر است.

حال بیایید پیامدهای (ت ۲) را بررسی کنیم. در وهلهٔ اول، روشن است که چون اعداد حقیقی و مختلط را نمی‌توان به‌دقت در کامپیوتر نشان داد، از (ت ۲) نتیجه می‌گیریم که قسمتی از کار آنالیز عددی باید تقریب زدن آنها باشد. اینجاست که خطای گردکردن وارد کار می‌شود. حال برای دسته‌ای از مسائل، یعنی مسائلی که با الگوریتمهایی حل می‌شوند که تعداد مراحلشان محدود است، همهٔ مطلب همین است. برجسته‌ترین مثال در این زمینه، روش حذفی گاوسی برای حل دستگاهی از معادلات خطی چون $Ax = b$ است. برای درک روش حذفی گاوسی باید موضوعاتی از علوم کامپیوتر مانند شمار عملیات و معماری ماشین و همچنین انتشار خطاهای گردکردن (پایداری) را درک کرد. تمام مطالبی که باید درک شود همینهاست و اگر کسی مدعی شود که (ت ۲) فقط شکل ظریفتری از (ت ۱) است، درستی یا نادرستی حرف او را نمی‌توان با مثال روش حذفی گاوسی ثابت کرد.

ولی اغلب مسائل ریاضیات پیوسته را نمی‌توان با الگوریتمهای متناهی حل کرد! برخلاف مورد $Ax = b$ و برخلاف مسائل گسستهٔ علوم کامپیوتر، اغلب مسائل آنالیز عددی را نمی‌توان به‌طور دقیق حل کرد حتی اگر بتوان از «حساب دقیق» استفاده کرد. متخصصان آنالیز عددی به این حقیقت واقف‌اند و آن را در زمان ارائهٔ الگوریتم برای محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس (به همراه چند کلمه در خصوص آبل و گالوا) متذکر می‌شوند. ولی اغلب فراموش می‌کنند یادآور شوند که همین نتیجه‌گیری تقریباً در مورد هر مسأله‌ای که شامل جملهٔ غیرخطی یا مشتق باشد ـ از قبیل ریشه‌یابی، انتگرالگیری معین، معادله‌های انتگرالی، بهینه‌سازی و . . . ـ صادق است[1].

حتی اگر خطاهای گردکردن از میان بروند، آنالیز عددی باقی می‌ماند. تقریب زدن اعداد معلوم، کاری که به‌وسیلهٔ حساب ممیز شناور انجام می‌شود، در واقع مبحثی نسبتاً کوچک و شاید کسالت‌آور است. کار عمیقتر آنالیز عددی تقریب زدن مجهولهاست نه معلومها. هدف، همگرایی سریع تقریبهاست و افتخار رشتهٔ ما در این است که برای بسیاری از مسائل، الگوریتمهایی با همگرایی فوق‌العاده سریع ابداع کرده‌ایم.

این نکته‌ها گاهی از نظر علاقه‌مندان محاسبهٔ نمادی ـ به‌خصوص طرفداران جدید آن که فکر می‌کنند وجود میپل (Maple) یا ماتماتیکا دلیلی است برای کنارگذاشتن متلب (Matlap) و فرترن ـ اغلب دور می‌ماند. درست است که خطاهای گردکردن را می‌توان از میان برد به این معنی که علی‌الاصول به کمک عملیات نمادی مناسب می‌توان هر رشتهٔ متناهی از عملیات جبری را به‌طور دقیق در یک کامپیوتر نشان داد، ولی بجز در مواردی که مسألهٔ موردنظر متناهی است، این‌کار باعث می‌شود تقریبهای اجتناب‌ناپذیر به انتهای محاسبات یعنی جایی که کمیات مربوطه ممکن است خیلی دست و پاگیر شده باشند، رانده شوند. حساب ممیز شناور نامی است برای این عادتِ آنالیزدانهای عددی که تقریبها را در هر مرحله از مسیر محاسبات انجام می‌دهند و به انتهای کار موکول نمی‌کنند. ولی هر راهی انتخاب شود، عملیاتِ ممیز شناور یا نمادی، مسألهٔ اصلی یکی است و آن، یافتن الگوریتمی با همگرایی سریع است.

به‌طور خلاصه، یک نتیجهٔ (ت ۲) آن است که آنالیز عددی با خطاهای گردکردن و نیز خطاهای عمیقتر مربوط به همگرایی تقریبها که با نامهای مختلفی شناخته می‌شوند (بریدن، گسسته‌سازی، تکرار) سروکار دارد. البته می‌توان باافزودن کلماتی برای توصیف این تقریبها و خطاها، (ت ۲) را صریحتر کرد، ولی وقتی قرار به اضافه کردن این گونه کلمات باشد، تشخیص اینکه کجا باید توقف کرد مشکل می‌شود زیرا (ت ۲) برخی مطالب مهم دیگر را هم بیان نمی‌کند، از جمله اینکه این الگوریتمها در کامپیوترها (که معماری آنها ممکن است قسمت مهمی از مسأله باشد) کارگذاشته می‌شوند، اینکه کارایی و قابلیت اطمینان جزو مهمترین هدفها هستند، اینکه بعضی از آنالیزدانهای عددی برنامه می‌نویسند و بقیه، قضیه ثابت می‌کنند، و مهمتر از همه، اینکه همهٔ این کارها *کاربردی* است، بدین مفهوم که هر روز در مورد هزاران کاربرد به‌وسیلهٔ میلیونها کامپیوتر در سرتاسر جهان با موفقیت انجام می‌شوند.

«مسائل ریاضیات پیوسته» مسائلی هستند که علوم و مهندسی بر پایهٔ آنها بنا می‌شوند؛ اگر روشهای عددی برای حل این مسائل وجود نداشته باشد، رشد علوم و مهندسی به‌سرعت متوقف می‌شود. همچنین، اینها مسائلی هستند که ذهن بیشتر ریاضیدانان را از زمان نیوتن تا قرن بیستم به خود مشغول داشته‌اند. دانشمندان آنالیز عددی به همان اندازهٔ ریاضیدانان محض، وارث سنت ارزشمند اویلر، لاگرانژ، گاوس و دیگران هستند. اگر اویلر امروز زنده بود، سرگرم اثبات قضایای وجود نمی‌شد.

***

اگر ده سال پیش این مقاله را می‌نوشتم، در همین‌جا آن را پایان می‌دادم، اما با تکامل کامپیوتر در دههٔ گذشته تفاوت بین (ت ۱) و (ت ۲) از موضوعیت تازه‌ای برخوردار شده که باید توضیحی در بارهٔ آن بدهم.

بیایید به مسألهٔ $Ax = b$ برگردیم. بیشتر محاسبات عددی به جبر خطی وابستگی دارد و این موضوعِ بسیار توسعه یافته، از آغاز هستهٔ اصلی آنالیز عددی بوده است. مفاهیم متعارف کنونی از قبیل پایداری، شرطی‌سازی، و آنالیز خطای پسرو در چارچوب جبر خطی عددی تعریف شدند و صیقل یافتند، و نقش اصلی را در حصول این پیشرفتها، جیم ویلکینسن از دههٔ ۱۹۵۰ تا زمان مرگش در سال ۱۹۸۶ بر عهده داشت.

گفتم که دستگاه $Ax = b$ دارای این خصوصیت ویژه است که می‌توان آن را با دنباله‌ای متناهی از عملیات حل کرد. ولی، $Ax = b$ مشخصهٔ غیرعادیتری نیز دارد: الگوریتم متعارف برای حل آن یعنی روش حذفی گاوسی، اتفاقاً دارای خواص پایداریِ فوق‌العاده پیچیده‌ای است. فون نویمان در خصوص این مقوله ۱۸۰ صفحه مطلب ریاضی نوشت؛ تورینگ یکی از مقالات اصلیش را در همین زمینه نگاشت؛ و ویلکینسن نظریه‌ای ارائه کرد که دو کتاب و بقیهٔ زندگی علمیش را به آن اختصاص داد. ولی این مشکل همچنان باقی است که برای برخی از ماتریسهای $n \times n$، حذف گاوسی با محورگزینی جزئی، باعث می‌شود خطاهای گردکردن با ضریبی از مرتبهٔ 2^n افزایش یابند که در نتیجه، در بدترین حالت، سبب بیفایده شدن این الگوریتم می‌شود. به‌نظر می‌رسد دلیل مؤثر بودن روش حذف گاوسی در عمل، این

---

۱. در علوم کامپیوتر نظری، تعریف «الگوریتم» معمولاً متضمن پایان یافتن آن پس از عملیاتی محدود است. من در اینجا کلمهٔ الگوریتم را به این معنی به‌کار نبرده‌ام، بلکه از الگوریتمهای «متناهی» و «نامتناهی» سخن گفته‌ام؛ زیرا به نظر من، استفاده از کلمهٔ «الگوریتم» فقط برای مسائل گسسته و «روش» برای مسائل پیوسته تمایزی به ذهن القا می‌کند که بیش از حد واقع است زیرا این تمایز فقط جزئی از یک مسألهٔ بزرگتر است.

است که مجموعهٔ ماتریسهایی که چنین رفتاری دارند بسیار کوچک است ولی تا به امروز، هیچکس توضیح قانع‌کننده‌ای در این باره نداده است.

پس به دلایلی چند، روش حذفی گاوسی روشی غیرعادی است. الگوریتمهای عددی معدودی چنین خواص پایداری ظریفی دارند و مسلماً هیچ روش دیگری به‌وسیلهٔ فون نویمان، تورینگ، و ویلکینسن با چنین عمق و دقتی بررسی نشده است. نتیجهٔ کار چه بوده است؟ روش حذفی گاوسی که باید یک موضوع جنبی به‌شمار می‌آمده در عنفوان جوانی رشتهٔ ما در مرکز صحنه قرار گرفت و در سیر تکاملی خود به‌الگوریتم متعارف آنالیز عددی تبدیل شد. روش حذفی گاوسی برنامه را مشخص کرد، و ویلکینسن آهنگ کار را تنظیم نمود، و نتیجهٔ ناگواری به‌بار آورد که همان (ت ۱) است.

البته، تاریخچهٔ مقبولیت و رواج یافتن (ت ۱) مفصلتر از اینهاست. در سالهای نخستین پیدایش کامپیوتر، توجه متمرکز به موضوعات حساب غیرقابل اجتناب بود. محاسبه به روش ممیز ثابت نیاز به تفکر دقیق و سخت افزار جدید داشت؛ محاسبه به روش ممیز شناور چند سال بعد به عنوان انقلاب دوم پدیدار شد. طبیعتاً تا شناخت کامل این مطالب، موضوعات حساب، مبحث مرکزی آنالیز عددی را تشکیل می‌دادند و به‌علاوه، نیروی دیگری نیز درکار بود. یک اصل کلی در محاسبه با کامپیوتر وجود دارد که ظاهراً نامی ندارد: هرچه *کامپیوتر سریعتر عمل کند، سرعت الگوریتمها اهمیت بیشتری می‌یابد*. در آن سالهای اولیه، با کامپیوترهای اولیه، خطرات ناپایداری تقریباً به میزان فعلی ولی بسیار ناشناخته‌تر بود. ولی اختلاف بین الگوریتمهای کند و سریع کمتر بود.

در سالهای اخیر تحولی روی داده است که میزان پیشرفتمان نسبت به آن زمان را نشان می‌دهد. در مواردی دیده شده است که علی‌رغم وجود الگوریتم متناهی برای یک مسأله، یک الگوریتم نامتناهی ممکن است بهتر باشد. تمایزی که از دیدگاه منطقی مطلق به‌نظر می‌رسید، عملاً کم‌اهمیت شده است و در حقیقت، علی‌رغم اکتشافات آبل‌وگالوا، مسائل مقدار ویژهٔ ماتریسهای بزرگ تقریباً به همان آسانی دستگاههای معادلات خطی حل می‌شوند. برای حل $Ax = b$، با افزایش سرعت کامپیوترها، بزرگ شدن و کمتر تُنُک بودن ماتریسها (به‌خاطر پیشرفت شبیه‌سازی از حالت دو بعدی به سه بعدی)، و دشواری ناشی از شمار عملیات (با مرتبهٔ $(O(N^3))$ در الگوریتمهای مستقیم (متناهی) متداول، بیش از بیش از روشهای تکراری استفاده می‌شود. نام این شیوهٔ جدید، *تکرار با بیش شرط‌گذاری* است. بیش از پیش دیده می‌شود که حل دقیق مسأله در یک مرحله، بهینه نیست. به‌جای آن، مسأله را به‌طور تقریبی حل می‌کنند و سپس روش تکراری را به کار می‌گیرند. روشهای چند شبکه‌ای که شاید مهمترین پدیده در محاسبات عددی در طی ۲۰ سال گذشته باشند، مبتنی بر کاربرد بازگشتی این ایده هستند.

حتی الگوریتمهای مستقیم از این شیوهٔ جدید محاسبه تأثیر پذیرفته‌اند. به‌یمن تحقیقات اسکیل (Skeel) و دیگران، دریافته‌ایم که پایدار کردن یک روش مستقیم (مثلاً محور گزینی در روش حذفی گاوسی) ممکن است در برخی موارد مقرون به صرفه نباشد. در عوض، از این مرحله صرفنظر می‌کنند، مسأله را مستقیماً و به طور ناپایدار حل می‌کنند، و سپس یک یا دو مرحلهٔ اصلاحی تکراری را طی می‌کنند. در این صورت، روش حذفی گاوسی «دقیق» تنها یک پیش شرط دیگر به حساب می‌آید.

مسائلی به غیر از $Ax = b$ نیز دستخوش تغییرات مشابهی شده‌اند که مشهورترین آنها، برنامه‌ریزی خطی است. مسائل برنامه‌ریزی خطی از نظر ریاضی، متناهی هستند. در طی دهها سال، آنها را با یک الگوریتم متناهی یعنی روش سیمپلکس حل می‌کردند. ولی در سال ۱۹۸۴ میلادی کارمارکار اعلام کرد که الگوریتمهای تکراری و نامتناهی در برخی موارد بهترند. این امر، مباحثات و هیجانی در میان اهل فن پدید آورد و رشتهٔ برنامه‌ریزی خطی را به طرز محسوسی از جایگاه سنتی‌اش به مسیر اصلی محاسبات عددی انتقال داد.

به عقیدهٔ من، وجود الگوریتمهای متناهی برای برخی از مسائل، به همراه برخی دلایل تاریخی دیگر، دهها سال است که ما را از داشتن دیدگاه متعادلی دربارهٔ آنالیز عددی محروم ساخته است. خطاهای گرد کردن و ناپایداری، مباحث مهمی هستند و آنالیزدانهای عددی همواره در این موضوعها تخصص خواهند داشت و تلاش خواهند کرد که ناآگاهان در دام آنها گرفتار نشوند. ولی رسالت اصلی ما محاسبهٔ بسیار سریع کمیتهایی است که نوعاً ازدیدگاه تحلیلی قابل محاسبه نیستند. رهنمود برای آینده، مطالعهٔ روش حذفی گاوسی با خواص پایداری فریبنده‌اش نیست بلکه پرداختن به موضوعاتی است از قبیل روش فوق‌العاده سریع تکرار گرادیان مزدوج، الگوریتم چند قطبی مرتبهٔ O(N) گرین گارد و روخلین برای شبیه‌سازی ذرات، همگرایی نمایی روشهای طیفی برای حل برخی معادلات دیفرانسیل جزئی، همگرایی از مرتبهٔ O(۱) که روشهای چند شبکه‌ای در مورد بسیاری مسائل دارا هستند، یا حتی روش افسانه‌ای تکراری AGM بورواین و بورواین در تعیین ۱۰۰۰۰۰۰۰ رقم از عدد π در یک چشم به‌هم زدن. قلب آنالیز عددی در این مباحث می‌تپد.

یادداشت

افراد زیادی دربارهٔ دستنوشتهای اولیهٔ این مقاله اظهار نظر کرده‌اند که در اینجا مجال ذکر نامشان نیست. پیشنهادهای آنها مرا به مقالات بسیاری هدایت کرد که اگر این پیشنهادها نبود به‌آنها دست نمی‌یافتم.

من ادعا نمی‌کنم که ایده‌های ارائه شده در این مقاله کاملاً تازه‌اند. درواقع، پیتر هنریچی، ۳۰ سال پیش درکتاب *اصول آنالیز عددی*‌اش، آنالیز عددی را «نظریهٔ روشهای سازنده در آنالیز ریاضی» تعریف کرد. افراد دیگری نیز نظریات مشابهی ابراز کرده‌اند، مثلاً جوزف تراوب (در نشریهٔ *کامیونیکیشنز* متعلق به انجمن ماشینهای محاسبهٔ آمریکا، سال ۱۹۷۲)، آنالیز عددی را «تحلیل الگوریتمهای پیوسته» تعریف کرد. دو فرهنگ انگلیسی راندوم هاوس و آکسفورد نیز این موضوع را بهتر از فرهنگهای ذکر شده در مقاله تعریف کرده‌اند.

و نکتهٔ آخر اینکه آیا باید این رشته را «آنالیز عددی» نامید یا «محاسبات علمی»، یا اصلاً چیز دیگری (مثلاً «مهندسی ریاضی»)؟ این موضوع، مقالهٔ دیگری را می‌طلبد.

* * * * * *

• Lloyd N. Trefethen, "The definition of numerical analysis", *Siam News*, (6)25(1992).

* لوید ترفتن، دانشگاه کورنل آمریکا