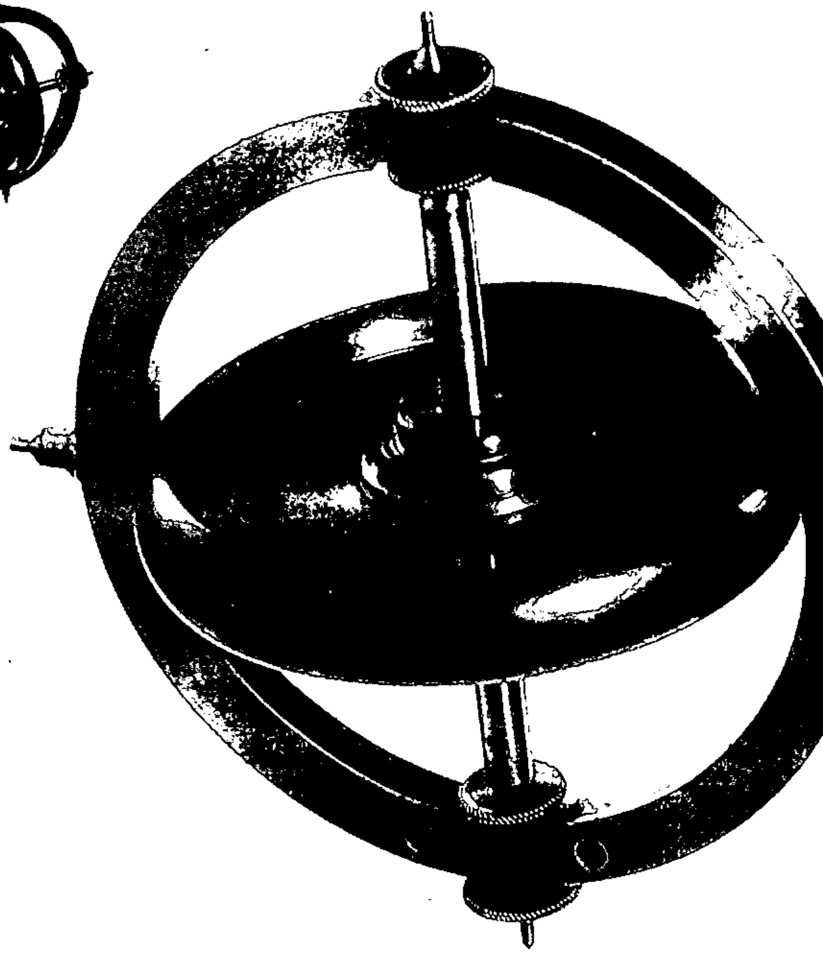


قضیهٔ مقدار میانگین

(قسمت سوّم)

● محمدصادق عسگری

فرض کنیم f تابعی حقیقی و پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر بازهٔ $]a,b[$ باشد. در این صورت وجود دارد $a<c<b$ ؛ به‌طوری که $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

اثبات: فرض کنیم $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ، ثابت می‌کنیم وجود دارد $a<c<b$ ؛ به‌طوری که $f'(c)=k$. تابع جدید $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ با $g(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$ را در نظر می‌گیریم ؛ چون f پیوسته و مشتق‌پذیر است. درنتیجه، g نیز روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و

$$g(a)=f(a)-f(a)-k(a-a)=0$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-k(b-a)$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-f(b)+f(a)=0$$

یعنی $g(a)=g(b)=0$. بنابر قضیه رول وجود دارد $a<c<b$ ؛ به‌طوری که $g'(c)=0$.

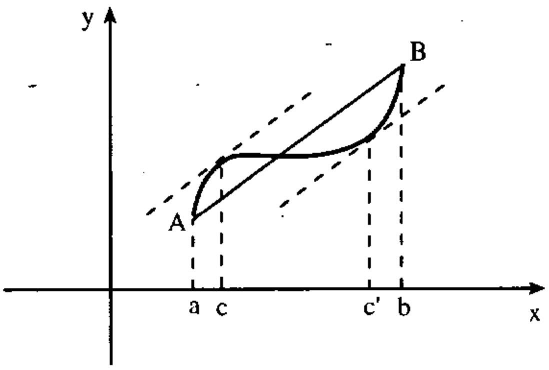
$$g(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$$

$$g'(x)=f'(x)-k$$

$$g'(c)=f'(c)-k=0\Rightarrow \boxed{f'(c)=k}$$

تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین

اگر دو نقطهٔ $A\Big|_{f(a)}^{a}$ و $B\Big|_{f(b)}^{b}$ را روی نمودار تابع f در نظر بگیریم، در این صورت، عدد $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ شیب خط گذرنده از نقاط A و B است. بنابراین، قضیه بیان می‌کند که، اگر f مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در نقطه‌ای به طول c خط مماس بر منحنی، موازی پاره‌خط AB است.



نتایج قضیه مقدار میانگین

نتیجهٔ ۱: اگر f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر باشد و عدد حقیقی مثبت M وجود داشته باشد؛ به‌طوری که برای هر $a<x<b$ داشته باشیم $|f'(x)|\le M$، آن‌گاه، $|f(b)-f(a)|\le M|b-a|$.

اثبات: بنابر قضیهٔ مقدار میانگین وجود $a<c<b$؛ به‌طوری که $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ طبق فرض $|f'(c)|\le M$، درنتیجه داریم:

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\le M \Rightarrow |f(b)-f(a)|\le M|b-a|$$

نتیجهٔ ۲: اگر f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد و برای هر $a<x<b$ داشته باشیم $f'(x)=0$، آن‌گاه f تابع ثابت است. $(f=cte)$

اثبات: فرض کنیم $a<x<b$ دلخواه و پس از این ثابت باشد. بنا به فرض تابع f روی بازهٔ $[a,x]$ پیوسته و بر بازهٔ $]a,x[$ مشتق‌پذیر است، طبق قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $a<c<x$؛ به‌طوری که $f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. بنا به فرض $f'(c)=0$، درنتیجه $f(x)-f(a)=0$؛ یعنی $f(x)=f(a)$. چون x دلخواه است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که f تابع ثابت است.

نتیجهٔ ۳: اگر توابع حقیقی f و g بر بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشند و برای هر $a<x<b$، داشته باشیم $f'(x)=g'(x)$، آن‌گاه $f(x)=g(x)+c$. (یعنی f و g با اختلاف یک مقدار ثابت c با یکدیگر مساوی هستند.)

اثبات: تابع جدید $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $h(x)=f(x)-g(x)$ در نظر می‌گیریم. تابع h بر بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است و برای هر $a<x<b$، $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$. بنابراین، طبق نتیجهٔ ۲، h یک تابع ثابت است؛ یعنی عدد ثابت c هست؛ به‌طوری که $h(x)=c$، درنتیجه، $f(x)-g(x)=c$ یا $f(x)=g(x)+c$.

مثال ۲۲: برای توابع زیر روی بازه‌های داده شده، شرایط قضیهٔ مقدار میانگین را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط، نقطه یا نقاط c مذکور در قضیه را بیابید.

الف) $f(x)=\sin x+\frac{x}{2}$ روی $[-\pi,\pi]$.

حل: تابع f روی بازهٔ $[-\pi,\pi]$ مشتق‌پذیر است. طبق قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $-\pi<c<\pi$؛ به‌طوری که $f'(c)=\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi+\pi}$ یا $f'(c)=\frac{1}{2}$.

$$f(x)=\sin x+\frac{x}{2}\Rightarrow f'(x)=\cos x+\frac{1}{2}$$

$$f'(c)=\cos c+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos c=0$$

$$\Rightarrow c=-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}$$

ب) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ روی بازهٔ $[-1,1]$.

حل: تابع f در نقطه‌ای به طول $x=0$ از این بازه پیوسته است؛ ولی مشتق‌پذیر نیست. در صورتی که اگر قرار دهیم: $f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1+1}$ یا $f'(c)=1$، آن‌گاه داریم:

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}=1\Rightarrow \sqrt[3]{c^2}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow c^2=\frac{1}{27}\Rightarrow c=\pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow c=\pm\frac{\sqrt{3}}{9}$$

یعنی شرایط قضیهٔ مقدار میانگین برقرار نیست. درصورتی که نقطهٔ c مذکور در قضیه وجود دارد.

ج) تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی بازهٔ $[-1,1]$.

حل: تابع f در نقطه‌ای به طول $x=0$ ناپیوسته است و اگر قرار دهیم: $f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1+1}$ یا $f'(c)=1$، آن‌گاه داریم:

$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{-1}{c^2}=1 \Rightarrow c^2=-1$$ (معادله ریشه ندارد)

یعنی شرایط قضیهٔ مقدار میانگین برقرار نیست و نقطهٔ c مذکور در قضیه نیز وجود ندارد.