فضای برداری

(قسمت دوم)

حمیدرضا امیری

ترکیب خطی

استقلال خطی و وابستهٔ خطی

(برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی و پیش‌دانشگاهی نظام جدید)

در شمارهٔ قبل راجع به دستگاهی ریاضی به نام فضای‌برداری صحبت کرده و چهارچوب اصلی این ساختمان ریاضی را بنا کرده و در مورد زیر فضاهای یک فضای برداری نیز مطالبی عنوان کردیم.

حال می‌خواهیم به داخل این ساختمان قدم نهاده و اجزای تشکیل‌دهندهٔ این ساختمان که همان بردارهای فضای برداری می‌باشند را، مورد بررسی قرار داده و خواص بردارهای یک فضای برداری را مطالعه و تجزیه و تحلیل کنیم.

تذکر: از این به بعد به اعضای هر فضای برداری، بردار می‌گوییم، مثلاً در فضای برداری $\mathbb{R}^2$ ، هر زوج مرتب یک بردار است و یا در فضای برداری ماتریسهای 2×2 هر ماتریس 2×2 یک بردار است.

هرگاه در فضای برداری V ، چند بردار را در نظر گرفته، و در هر کدام اسکالری (عددی) ضرب کرده و با هم جمع کنیم اصطلاحاً یک **ترکیب خطی** از آن بردارها بوجود می‌آید که حاصل این جمع نیز برداری است از فضای V ، بنابراین: اگر V_1 و V_2 و ... و V_n ، بردارهایی از فضای برداری V باشند و α_1 و α_2 و ... و α_n اعداد حقیقی از میدان اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) ، باشند در این صورت بردار $(\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+...+\alpha_nV_n)\in V$ را ترکیب خطی از n بردار فوق می‌نامند.

مثال: اگر $(1,2)$ و $(\frac{1}{2},5)$ و $(\sqrt{2},-1)$ بردارهایی از فضای برداری $\mathbb{R}^2$ باشند در این صورت ۲ ترکیب خطی از این بردارها به قرار زیر است:

$$-1(1,2)+4(\frac{1}{2},5)+\sqrt{8}(\sqrt{2},-1)$$

$$2(1,2)+\sqrt{2}(\sqrt{2},-1)+\frac{1}{5}(\frac{1}{2},5)$$

قرارداد: اگر در یک ترکیب خطی همهٔ ضرایب (اسکالرها) با هم صفر نباشند و لااقل یکی از آنها مخالف صفر باشد به آن ترکیب خطی یک ترکیب خطی ناصفر می‌گویند واضح است که از چند بردار یک فضای برداری بی‌نهایت ترکیب خطی می‌توان تشکیل داد!

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که آیا چند بردار، در یک فضای برداری، همیشه می‌توانند به کمک یکدیگر و با ایجاد یک بستگی تنگاتنگ، بردار صفر آن فضا را بوجود آورده و به عبارت دیگر آیا همواره یک ترکیب خطی ناصفر از چند بردار یک فضا می‌توان یافت که مساوی، با بردار صفر آن فضا شود؟ مثلاً در فضای برداری $\mathbb{R}^2$ بردارهای $(1,2)$ و $(2,-3)$ مفروض‌اند می‌خواهیم به سؤال قبل دقیق‌تر پاسخ دهیم یعنی

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا می‌توان ترکیبی خطی و ناصفر از این دو بردار یافت، که مساوی با بردار صفر $\mathbb{R}^2$ که همان $(0,0)$ است، باشد یا خیر؟ برای این منظور ضرایبی دلخواه مانند x و y در نظر گرفته و یک ترکیب خطی دلخواه با آنها تشکیل داده و مساوی با $(0,0)$ قرار می‌دهیم و از آنجا ضرایب x و y را به دست می‌آوریم:

$$x(1,2)+y(2,-3)=(0,0) \Rightarrow (x,2x)+(2y,-3y)=(0,0)$$

$$\Rightarrow {}^{-2}\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow -7y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=0$$

یعنی تساوی اول در صورتی برقرار است که $x=y=0$

یعنی دو بردار $(1,2)$ و $(2,-3)$ نتوانستند به کمک هم بردار صفر را تولید کنند و مشاهده می‌شود ایجاد بردار صفر به این دو بردار بستگی نداشته و مستقیماً به ضرایب وابسته است. به عبارت دیگر این ضرایب ترکیب خطی هستند که بردار صفر را تولید کردند، نه خود بردارها، به چنین بردارهایی، بردارهای مستقل خطی می‌گویند و در حالت کلی: بردارهای V_1 و V_2 و ... و V_n از فضای برداری V، **مستقل خطی‌اند**، هرگاه هر ترکیب خطی از این n بردار، که مساوی با بردار صفر شود، صفر بودن همهٔ ضرایب آن ترکیب خطی را نتیجه دهد و یا به بیان ریاضی:

$$\forall \alpha_1V_1+\alpha_2V_2+...+\alpha_nV_n=\bar{0} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$$

مسألهٔ ۱: آیا بردارهای $(1,2,3)$ و $(0,1,-1)$ و $(-1,0,2)$ در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی‌اند؟

حل: یک ترکیب خطی دلخواه از بردارهای فوق، مساوی با بردار صفر فضای $\mathbb{R}^3$ یعنی $(0,0,0)$ قرار داده و اثبات می‌کنیم ضرایب آن ترکیب خطی **فقط** باید صفر باشند.

$$x(1,2,3)+y(0,1,-1)+z(-1,0,2)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (x,2x,3x)+(0,y,-y)+(-z,0,2z)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \Rightarrow x=z \\ 2x+y=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$$

$$\overset{x=z}{\Rightarrow} 3x-y+2x=0 \Rightarrow \begin{cases} 5x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow 7x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$x=0 \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{y=0}$$

پس طبق تعریف بردارهای فوق مستقل خطی‌اند.

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان توسط چند بردار در یک فضای برداری بردار صفر را تولید کرد، به شرط آن که خود بردارها نیز در ایجاد بردار صفر نقش داشته باشند. (همهٔ ضرایب ترکیب خطی با هم صفر نباشند) مثلاً بردارهای $(1,-2)$ و $(-2,4)$ را در نظر می‌گیریم در این صورت اگر قرار دهیم:

$x(1,-2)+y(-2,4)=(0,0)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ -2x+4y=0 \end{cases}$$

در دستگاه فوق اگر معادلهٔ اول را در عدد -2 ضرب کنیم دقیقاً معادلهٔ پایین حاصل می‌شود پس با یک معادله و دو مجهول روبرو هستیم که چنین معادله‌ای دارای بی‌نهایت جواب غیرصفر است، ازجمله اگر قرار دهیم $x=2$ خواهیم داشت، $y=1$ پس:

$$2(1,-2)+1(-2,4)=(0,0)$$

به چنین بردارهایی که قادر به تولید بردار صفر فضا هستند بردارهای وابستهٔ خطی می‌گویند و در حالت کلی:

هرگاه بردارهای V_1 و V_2 و ... و V_n از فضای برداری V مستقل خطی نباشند، وابستهٔ خطی هستند و یا به عبارت دیگر، هرگاه لااقل یک ترکیب خطی از این بردارها، مساوی با بردار صفر وجود داشته باشند به شرطی که در بین ضرایب آن ترکیب خطی، لااقل یک ضریب مخالف صفر موجود باشد.

مسألهٔ ۲: در فضای برداری چند جمله‌ایهای از درجه ۳ و کوچکتر از ۳ یعنی،

$$V=\{ax^3+bx^2+cx+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

ثابت کنید بردارهای (x^3+x^2-2x+1)، (x^2+x-2)، $(2x+1)$ و 5، مستقل خطی‌اند.

فرض کنیم: $\alpha_1(x^3+x^2-2x+1)+\alpha_2(x^2+x-2)$

$$+\alpha_3(2x+1)+5\alpha_4 \equiv \underbrace{0x^3+0x^2+0x+0}_{\bar{0}}$$

$$\Rightarrow \alpha_1x^3+(\alpha_1+\alpha_2)x^2+(-2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)x$$

$$+(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+5\alpha_4) \equiv \bar{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ -2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\\ \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+5\alpha_4=0\end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

(با حل دستگاه مشاهده می‌شود که همگی ضرایب باید مساوی با صفر باشند پس بردارها طبق تعریف مستقل خطی‌اند)

تذکر مهم: اگر در یک دستگاه معادلات تعداد مجهولات از تعداد معادلات دستگاه بیشتر باشد همواره دستگاه دارای بی‌نهایت جواب غیرصفر است، به مثال زیر و نحوهٔ حل دستگاه و پیدا کردن جوابهای غیرصفر دقت کنید:

مثال: مطلوب تعیین دو جواب غیرصفر برای دستگاه

$$\begin{cases}x+y-z=0\\2x-y+2z=0\end{cases}$$

حل: یکی از مجهولات را برابر با پارامتر t در نظر می‌گیریم و دو مجهول دیگر را برحسب آن یعنی t محاسبه می‌کنیم.

$$y=t\Rightarrow {}^{.2}\begin{cases}x-z=-t\\2x+2z=t\end{cases}\Rightarrow 4x=-t\Rightarrow \boxed{x=\frac{-t}{4}}$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{4}-z=-t\Rightarrow \frac{-t}{4}+t=z\Rightarrow \boxed{z=\frac{3t}{4}}$$

و $\boxed{y=t}$. حال اگر به t مقادیر حقیقی غیرصفر نسبت دهیم جوابهای غیرصفر برای دستگاه حاصل می‌شود،

$$t=1\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\y=1\\z=\frac{3}{4}\end{cases}\quad,\quad t=4\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=4\\z=3\end{cases}$$

مسألهٔ ۳: در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ اگر تعداد بردارهای موجود در یک مجموعه، $(n+1)$ بردار یا بیشتر باشد، همهٔ آنها وابستهٔ خطی‌اند. (در $\mathbb{R}^n$ اگر تعداد بردارها از بُعد فضا یعنی n بیشتر باشد، وابسته خطی خواهند بود.)

حل: با توجه به تذکر و مثال قبل واضح است که اگر مثلاً $(n+1)$ بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم و بخواهیم یک ترکیب خطی از این بردارها، مساوی با بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ یعنی $(\overbrace{0,0,\ldots,0}^{n \text{ تا}})$ قرار دهیم به یک دستگاه با n معادله، (تعداد صفرهای بردارِ صفر) و $(n+1)$ مجهول (تعداد ضرایب ترکیب خطی) خواهیم رسید که چنین دستگاهی همواره بی‌نهایت جواب غیرصفر داشته و لذا بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

نتیجه: هر سه بردار در فضای $\mathbb{R}^2$ و یا هر چهار بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ وابستهٔ خطی‌اند.

مسألهٔ ۴: ثابت کنید، هر بردار ناصفر در فضای برداری V به تنهایی مستقل خطی است.

حل: فرض کنیم $u\in V$ و $u\neq\vec{0}$ حال نشان می‌دهیم u مستقل خطی است:

فرض کنیم $\alpha\in\mathbb{R}\ ,\ \alpha u=\vec{0} \overset{\text{طبق قضیه}}{\Rightarrow} \alpha=0 \vee u=\vec{0} \overset{u\neq\vec{0}}{\Rightarrow}\alpha=0$

پس u طبق تعریف مستقل خطی است.

مسألهٔ ۵: ثابت کنید بردار صفر در هر فضای برداری، به تنهایی وابستهٔ خطی است.

حل: کافی است ترکیبی خطی از بردار صفر با ضریبی ناصفر و مساوی با بردار صفر نشان دهیم که با توجه به قضایای کتاب، بدیهی است زیرا:

$$\forall\alpha\neq0\ ,\ \alpha.\vec{0}=\vec{0}$$

مسألهٔ ۶: نشان دهید اگر برداری مضرب ناصفری از یک بردار دیگر باشد، آن دو بردار وابستهٔ خطی‌اند.

حل: فرض کنیم $u=\alpha V$ و $\alpha\neq0$، در این صورت داریم:

$$u=\alpha V\Rightarrow u-\alpha V=\vec{0}\ ,\ -\alpha\neq0$$

چون یک ترکیب خطی ناصفر از دو بردار u و V، مساوی با بردار صفر به دست آمد طبق تعریف این دو بردار وابستهٔ خطی‌اند.

مسألهٔ ۷: ثابت کنید، اگر در بین یک مجموعه از برداری هر فضای برداری، چند بردار وابسته خطی وجود داشته باشد، تمامی بردارهای آن مجموعه وابسته خطی خواهند بود.

حل: فرض کنیم V_1 و V_2 و ... و V_n، n بردار از فضای برداری V باشند و فرض کنیم بردارهای V_1 و V_2 و ... و V_p که $(p<n)$، p بردار از این n بردار بوده و وابستهٔ خطی باشند ثابت می‌کنیم تمام n بردار وابستهٔ خطی‌اند.

(۱) V_1 تا $V_p \Rightarrow \exists\, \alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\ldots+\alpha_pV_p=\vec{0}$

وابستهٔ خطی‌اند. $\exists \alpha_i \neq 0 \quad 1 \le i \le p$ و

حال رابطهٔ (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1) \Rightarrow \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_p V_p + 0.V_{p+1} + \ldots + 0.V_n = \bar{0}$$

$$\exists \alpha_i \neq 0 \text{ و } (2)$$

رابطهٔ (۲) که همان (۱) است (زیرا فقط $(n-p)$ تا صفر به آن اضافه شده) نشانگر این مطلب است که ترکیبی خطی از n بردار V_1 تا V_n مساوی با بردار صفر شده و اطمینان داریم حداقل یکی از ضرایب این ترکیب خطی (از α_1 تا α_p) مخالف صفر است، پس طبق تعریف، n بردار V_1 تا V_n وابستهٔ خطی‌اند.

نتیجه ۱: اگر در بین مجموعه‌ای از برداری یک فضای برداری دو بردار مضرب ناصفری از هم باشند، تمام بردارهای آن مجموعه وابستهٔ خطی‌اند، زیرا: طبق مسألهٔ ۶ دو بردار که مضرب ناصفر هم باشند وابسته بوده و طبق مسألهٔ ۷، وابستگی خطی از جزء به کل سرایت کرده و تمامی بردارها وابستهٔ خطی خواهند شد.

نتیجه ۲: چون ثابت کردیم بردار صفر در هر فضای برداری وابستهٔ خطی است لذا طبق مسألهٔ ۷، «هر مجموعه از بردارهای یک فضا که شامل بردار صفر باشند، وابستگی خطی خواهند داشت».

نتیجهٔ ۳: هر زیر مجموعه از یک مجموعه بردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری، مستقل خطی است. به عبارت دیگر اگر مجموعه بردارهای $\{V_n, \ldots, V_2, V_1\}$، در فضای برداری V مستقل خطی باشند در این صورت هر زیرمجموعهٔ دلخواه از این بردارها مانند $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ نیز مستقل خطی خواهند بود.

اثبات: فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف) پس بردارهای $V_p, \ldots, V_2, V_1$ می‌بایست وابستهٔ خطی باشند و چون جزئی از بردارهای V_1 تا V_n هستند لذا طبق مسألهٔ ۷ باید تمام n بردار V_1 تا V_n نیز وابسته باشند که خلاف فرض است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مسألهٔ ۸: در فضای برداری $\mathbb{R}^2$، ثابت کنید: «شرط لازم و کافی برای آن که بردارهای (a,b) و (c,d) مستقل خطی باشند آن است که $ad - bc \neq 0$»

حل: ابتدا یک ترکیب خطی دلخواه از این دو بردار تشکیل داده و مساوی با بردار صفر در $\mathbb{R}^2$ یعنی $(0,0)$ قرار می‌دهیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$x(a,b) + y(c,d) = (0,0)$$

$$\begin{matrix} d \\ \Rightarrow \\ -c \end{matrix} \begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} adx + cdy = 0 \\ -bcx - cdy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ad - bc)x = 0 \quad *$$

برای اثبات برقراری شرط لازم و کافی روی رابطهٔ * بحث می‌کنیم:

I) اگر بردارهای (a,b) و (c,d) مستقل خطی باشند، پس طبق تعریف هر ترکیب خطی از آنها که مساوی با بردار صفر باشد، باید صفر بودن ضرایب یعنی x و y را نتیجه دهد. پس باید $x = 0$ و این در صورتی امکان‌پذیر است (با توجه به رابطهٔ *) که $ad - bc \neq 0$.

II) اگر $ad - bc \neq 0$ واضح است که رابطهٔ * نتیجه می‌دهد $x = 0$ که اگر در معادلات دستگاه قرار دهیم، $y = 0$ نیز نتیجه می‌شود لذا، طبق تعریف بردارها مستقل خطی خواهند بود.

مسألهٔ ۹: اگر بردارهای u_1 و u_2 و u_3 در فضای برداری V مستقل خطی باشند، نشان دهید بردارهای $(u_1 - 2u_2 + u_3)$ و $(2u_1 + u_2 - u_3)$ و $(-u_1 + u_2 - 2u_3)$ نیز مستقل خطی‌اند.

اثبات: یک ترکیب خطی دلخواه از بردارهای داده شده تشکیل می‌دهیم و ثابت می‌کنیم همهٔ ضرایب آن ترکیب خطی صفر هستند.

$$x(u_1 - 2u_2 + u_3) + y(2u_1 + u_2 - u_3) + z(-u_1 + u_2 - 2u_3) = \bar{0}$$

$$\Rightarrow (x + 2y - z)u_1 + (-2x + y + z)u_2 + (x - y - 2z)u_3 = \bar{0}$$

به یک ترکیب خطی از سه بردار u_1 و u_2 و u_3 رسیدیم که مساوی با بردار صفر شده و چون این سه بردار طبق فرض مستقل خطی‌اند پس باید ضرایب این ترکیب خطی همگی صفر