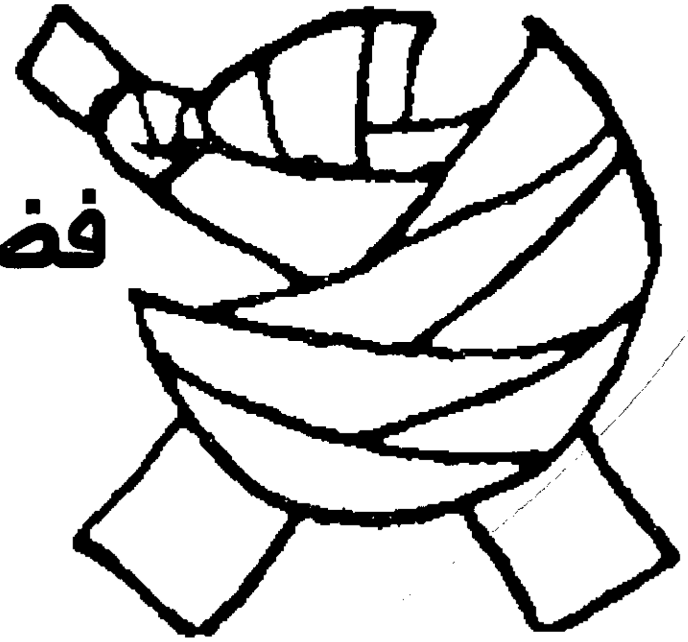

فضاهای برداری و ضرب داخلی

● حمیدرضا امیری

وقتی از ضرب داخلی صحبت به میان می‌آید، معمولاً بردارهایی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ برایمان مجسّم می‌شوند و حاصلضرب داخلی آنها که عددی است حقیقی ؛ امّا بردار، واژه‌ای است که برای ما تازگی ندارد و از قبل با آن آشنا هستیم، *فضای برداری* نیز باید چنین باشد که البته با حذف این مبحث (فضای برداری) از برنامهٔ درسی دبیرستان، با این واژه زیاد مأنوس نبوده یا حدّاقل زیاد از آن استفاده نمی‌کنیم. ولی فضای برداریِ چندجمله‌ایها، فضای برداری ماتریسها، فضای برداریِ توابع پیوسته و... فضاهایی برداری هستند که همواره از اعضای آنها، یعنی بردارهای این فضاها، امّا نه به‌عنوان بردار و نه حتّی با نامِ بردار، از آنها استفاده می‌کنیم.

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا تعریف ضرب داخلی، اندازه (نُرم)، زاویهٔ بین دو بردار و عمود بودن، که با آنها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ آشنا هستیم، قابل تعمیم است؟

می‌خواهیم با درنظر گرفتن اصلهایی خاصّ، تعریفی برای ضرب داخلی دو بردار (در هر فضای برداری) ارائه دهیم که جامع و مانع بوده و درواقع، ضرب داخلی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ حالت خاص آن باشد و همهٔ خواصِ ضرب داخلی و نتیجه‌های حاصل از آن حفظ شود.

برای شروع، فضای برداری حقیقی را تعریف می‌کنیم :

اگر V مجموعه‌ای ناتهی باشد و عملی به‌نام عمل جمع روی V تعریف کنیم، به‌طوری که این عمل روی V، دارای خواص شرکت‌پذیری، عضو خنثی، عضو متقابل (عضو قرینه) و جابه‌جایی باشد ؛ یعنی :

I) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (برای هر a و b و c در V)

II) $a+\bar{0}=\bar{0}+a=\bar{0}$ ($\bar{0}$ را عضو خنثی می‌نامیم)

III) $a+(-a)=(-a)+a=\bar{0}$ ($(-a)$ قرینهٔ a نامیده می‌شود)

IV) $a+b=b+a$ (برای هر a و b در V)

و بین اعضای V و اعضای $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) عملی به‌نام ضرب اسکالر، به‌گونه‌ای تعریف شود که اوّلاً این عمل در V بسته باشد ؛ یعنی برای هر $r\in\mathbb{R}$ و هر $u\in V$ همواره $r.u\in V$ و ثانیاً خواصّ زیر، همگی برقرار باشند، در این صورت، V را یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ یا یک *فضای برداری حقیقی* می‌نامند :

(برای هر $u\in V$)

I) $1\,u=u$

II) $(r_1+r_2).u=r_1\cdot u+r_2\cdot u$

III) $r.(u_1+u_2)=r.u_1+r.u_2$

IV) $r_1.(r_2.u)=(r_1r_2).u$

با توجه به تعریف فوق و تعریف جمع ماتریسی، جمع برداری در $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{R}^3$، ...، $\mathbb{R}^n$ (جمع مؤلفه به مؤلفه)، جمع چندجمله‌ایها، جمع توابع پیوسته و تعریف ضرب عدد در ماتریس،

ضرب عدد در nتایی، ضرب عدد در چندجمله‌ایها و ضرب عدد در ضابطهٔ تابع، هریک از مجموعه‌های زیر، یک فضای برداری حقیقی تشکیل می‌دهند :

۱ـ مجموعهٔ nتایی‌های مرتب ($\mathbb{R}^n$) و در حالت خاص $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$.

۲ـ مجموعهٔ ماتریسهای $m \times n$ (M_{mn})

۳ـ مجموعهٔ چندجمله‌ایها ($P(t)$)

۴ـ مجموعهٔ توابع پیوسته روی بازهٔ $[a,b]$, ($C[a,b]$)

حال به تعریف ضرب داخلی در هریک از فضاهای برداری فوق و به‌طورکلّی برای هر فضای برداری می‌پردازیم :

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی باشد، برای هر دو عضو، از V مانند u و v، عدد حقیقی $(u.v)$، **ضرب داخلی** دو بردار u و v نامیده می‌شود ؛ هرگاه در سه اصل زیر صدق کند :

I) $((au_1 + bu_2).V) = a(u_1.V) + b(u_2.V)$ (خاصیت خطی)

II) $(u.V) = (V.u)$ (خاصیت جابجایی)

III) $(u.u) \geq 0$ $((u.u) = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0})$

تذکر ۱: با استفاده از اصل (I) و اصل (II) داریم :

$$\begin{aligned}(u.(aV_1 + bV_2)) &= ((aV_1 + bV_2).u) \\ &= a(V_1.u) + b(V_2.u) \\ &= a(u.V_1) + b(u.V_2)\end{aligned}$$

تذکر ۲: درحالت کلی و به استقرا ثابت می‌شود :

$$((a_1u_1 + \ldots + a_nu_n).V) = a_1(u_1.V_1) + \ldots + a_n(u_n.V),$$

$$(u.(a_1V_1 + \ldots + a_nV_n)) = a_1(u.V_1) + \ldots + a_n(u.V_n)$$

از ترکیب دو خاصیت اخیر، رابطهٔ کلّی زیر حاصل می‌شود :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_iu_i . \sum_{j=1}^{n} a_jV_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j(u_i.V_j)$$

مثال: اگر V یک فضای برداری و $u, v \in V$ در این‌صورت :

$$((3u - 2V).(2u + 4V)) = 6(u.u) + 8(u.V) - 4(V.u)$$
$$-8(V.V) = 6(u.u) + 4(u.V) - 8(V.V)$$

نُرم (طول) یک بردار

با توجه به اصل (III) ضرب داخلی و این‌که $(u.u) \geq 0$ نُرم یا طول بردار u را با نماد $\|u\|$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\|u\| = \sqrt{(u.u)} \text{ یا } \|u\|^2 = (u.u)$$

تذکر: اگر u برداری از فضای برداری V باشد و $\|u\| = 1$، در این صورت، u را *بردار یکّه* می‌نامیم و درحالت کلّی، هرگاه V برداری دلخواه از فضای برداری V باشد، همواره دارای بردار یکّه بوده و آن را با e_V نشان داده و از ضرب عدد $\frac{1}{\|V\|}$ در بردار V به‌دست می‌آید :

$$e_V = \frac{1}{\|V\|}V$$

مثالهایی از ضرب داخلی در فضاهای برداری

۱ـ فضای برداری $\mathbb{R}^n$

در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ (nتایی‌های مرتب) ضربی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$u = (a_1^2 \cdots + a_n^2)$$

$$V = (b_1, \ldots, b_n) \Rightarrow (u.v) = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$$

$$\|u\| = \sqrt{(u.u)} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

به‌راحتی قابل تحقیق است، ضربی که به‌صورت فوق در $\mathbb{R}^n$ تعریف شد، در هر سه اصل ضرب داخلی صدق می‌کند، بنابراین این ضرب، یک ضرب داخلی است که در حالت خاص n=3، برای فضای برداری $\mathbb{R}^3$، مثالهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم :

$$u = (1, -1, 2)\ ,\ v = (2, 1, -4)\ ,\ w = (-3, 0, 2)$$

$$(u.v) = 1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times (-4) = -7 = (v.u)$$

$$(u.w) = 1 \times (-3) + (-1) \times 0 + 2 \times 2 = 1 = (w.u)$$

$$(v + w) = (-1, 1, -2)$$

$$((v + w).u) = (-1) \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 2 = -6$$

(همان‌طورکه ملاحظه می‌کنید : $((v + w).u) = (v.u) + (w.u)$)

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$$

۲ـ فضای برداری ماتریسهای $m \times n$ (M_{mn})

در فضای برداری ماتریسهای $m \times n$ ضربی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(A.B) = tr(B^T \times A)$$

(منظور از $tr(A)$ حاصل‌جمع درآیه‌های روی قطر اصلی A است.)

مثال ۱: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ در این‌صورت داریم :

$$(A.B) = tr(B^T \times A) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} 17 & 22 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \\ 13 & 20 & -10 \end{bmatrix}\right) = 17 + 2 - 10 = 9$$

با کمی دقّت، متوجه می‌شویم که حاصل $tr(B^T \times A)$ با حاصل‌جمعِ حاصلضربهای نظیر به نظیر درآیه‌ها، برابر خواهد بود ؛ یعنی :

$$(A.B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 1\times2 + 2\times(-1) + (-1)\times4 + 3\times5 + 4\times1 + (-2)\times3$$

$$= 2 + (-2) + (-4) + 15 + 4 + (-6) = 9$$

این ضرب که به دو شکل معادل در M_{mn} تعریف شد، در هر سه اصل، ضرب داخلی صدق می‌کند ؛ بنابراین یک *ضرب داخلی* است و درحالت کلّی در این فضا داریم :

$$(A.B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \ , \ \|A\|^2 = (A.A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

با توجه به ماتریس A در مثال ۱ داریم :

$$\|A\|^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= 1\times1 + 2\times2 + (-1)\times(-1) + 3\times3 + 4\times4 + (-2)\times(-2)$$

$$= 1 + 4 + 1 + 9 + 16 + 4 = 35 \Rightarrow \|A\| = \sqrt{35} \geq 0$$

مثال ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ داریم :

$$(A.B) = tr(B^T \times A) = tr\left(\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\left[-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right]\right) = tr([0]) = 0$$

(توجه دارید که بردارهای $\vec{a} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ و $\vec{b} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ دو بردار عمود بر هم هستند!)

۳ـ فضای برداری تابعهای پیوسته روی $[a,b]$ $(C[a,b])$

برای هر f و g در $C[a,b]$، ضربی به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$(f.g) = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad (a \leq t \leq b)$$

توجه دارید که *فضای برداری چندجمله‌ایها* $(P(t))$ زیرفضایی از $C[a,b]$ است و همین ضرب را می‌توانیم روی $P(t)$ تعریف کنیم.

مثال: چندجمله‌ایهای $f(t) = 2t$ و $g(t) = -3t$ را در بازهٔ $[0,1]$ درنظر گرفته و داریم :

$$(f.g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 -6t^2 dt = -2t^3\Big|_0^1 = -2$$

$$\|g\|^2 = \int_0^1 g(t)g(t)dt = \int_0^1 9t^2 dt = 3t^3\Big|_0^1 = 3$$

$$\Rightarrow \|g\| = \sqrt{3}$$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f(t)f(t)dt = \int_0^1 4t^2 dt = \frac{4}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \|f\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

زاویهٔ بین بردارها در هر فضای برداری

تعریف: اگر u و v دو بردار ناصفر از فضای برداری V باشند، در این‌صورت، زاویهٔ بین u و v، زاویه‌ای است چون $0 \le \theta \le \pi$ که از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\theta = \frac{(u.v)}{\|u\| \times \|v\|}$$

مثال: در مثال قبل، داشتیم $f(t) = 2t$ و $g(t) = -3t$ و نتایج زیر را به‌دست آوردیم:

$$(f.g) = -2\ ,\ \|f\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ ,\ \|g\| = \sqrt{3}$$

$$\cos\theta = \frac{-2}{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3}} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \theta = \pi$$

بنابراین در فضای $P(t)$، زاویهٔ بین f و g برابر است با π، که البته اگر همین f و g را به‌صورت دو خط در فضای برداری $\mathbb{R}^2$ درنظر بگیریم، زاویهٔ بین آنها در $\mathbb{R}^2$، $\frac{\pi}{4}$ خواهد بود!

بردارهای عمود برهم

تعریف: اگر V یک فضای برداری حقیقی و u و v بردارهایی از فضای برداری V باشند، در این‌صورت، دو بردار u و v را عمود بر هم می‌نامیم؛ هرگاه: $(u.v)=0$.

تذکر ۱: با توجه به تعریف زاویه بین دو بردار، می‌توان گفت: «بردار u عمود بر بردار v است؛ هرگاه کسینوس زاویهٔ بین آنها صفر باشد.»

تذکر ۲: بردار صفر ($\bar{0}$) در هر فضای برداری، بر هر بردار دیگر در آن فضا عمود است:

$$(\bar{0}.u) = (\bar{0}u.u) = \bar{0}(u.u) = 0$$

مثال ۱: اگر فرض کنیم $u = (1,2,1)$، $v = (1,2,-5)$ و $w = (2,-4,-6)$ بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ باشند، در این‌صورت داریم:

$$(u.v) = 1\times1 + 2\times2 + 1\times(-5) = 0$$

$$(u.w) = 1\times2 + 2\times(-4) + 1\times(-6) = 0$$

$$(v.w) = 1\times2 + 2\times(-4) + (-5)\times(-6) = -36$$

بنابراین بردار u بر v و w عمود است؛ ولی v و w عمود بر هم نیستند.

مثال ۲: تابعهای $f(t)=\sin t$ و $g(t)=\cos t$ را از فضای برداری $C[-\pi,\pi]$ درنظر می‌گیریم و داریم:

$$(\sin t \cdot \cos t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\sin^2 t \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0$$

بنابراین دو تابع فوق در فضای $C[-\pi,\pi]$، بر هم عمود می‌باشند.

مثال ۳: تابعهای $f(t)=t$ و $g(t) = -t$ را در فضای برداری $C[-1,1]$ درنظر می‌گیریم، در این‌صورت داریم:

$$(f(t).g(t)) = \int_{-1}^{1} -t^2 dt = -\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

بنابراین، دو تابع فوق در فضای $C[-1,1]$ برهم عمود **نمی‌باشند**.

تذکر: مفهوم عمود بودن با توجه به تعریف ارائه شده، با مفهوم عمود بودن دو خط بر هم یا دو بردار بر هم، به لحاظ هندسی متفاوت است و البته درحالت خاص، یعنی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ به همان معناست که ما انتظار داریم.

مثال ۴: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ دو بردار (ماتریس) از فضای برداری $M_{2\times2}$ باشند، داریم:

$$(A.B) = 2\times0 + 0\times3 + 0\times1 + (-1)\times0 = 0$$

پس ماتریسهای A و B در فضای $M_{2\times2}$ بر یکدیگر عمودند!

مثال ۵: اگر $f(t)=t+k$ و $g(t) = t^2$ در این‌صورت، k را چنان بیابید که تابعهای f و g در $C[0,1]$ بر یکدیگر عمود باشند.

$$(f.g) = \int_0^1 (t+k)t^2 dt = \int_0^1 (t^3 + kt^2)dt = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{4}t^4 + \frac{k}{3}t^3)\Big|_0^1 = (\frac{1}{4} + \frac{k}{3}) = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$$

تمرین: در فضای برداری $C[0,1]$ مقدار k را چنان بیابید که دو تابع $f(t) = -t$ و $g(t)=t+k$ بر یکدیگر عمود باشند. (جواب: $k = -\frac{2}{3}$)