نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۱، صص. ۳-۵

مدل کره‌های سخت و سه حدس

فریدون رضاخانلو*

۱. مدل کره‌های سخت

شاید ساده‌ترین مدل در مکانیک آماری، مدل گاز کامل باشد. در این مدل N ذره داریم که به تبع بردارهای سرعت خود در حرکت‌اند و هیچ برهم‌کنشی بر یکدیگر ندارند. به‌بیان دقیق‌تر، اگر $x_1(t)$، $x_2(t)$، $\cdots$، $x_N(t)$ مکانهای این ذرات باشند و $v_1(t)$، $\cdots$، $v_N(t)$ بردارهای سرعتشان، آنگاه در هر زمان t، $x_i(t) = x_i(0) + tv_i$، $v_i(t) = v_i$. این مدل توصیف ماکروسکپی ساده‌ای دارد. اگر در زمان $t = 0$، نقاط $((x_i(0), v_i(0))$ چنان انتخاب شوند که برای هر تابع پیوستهٔ $J(x,v)$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J(x_i(0), v_i(0)) \to \iint f^{\circ}(x,v)J(x,v)dxdv \qquad (1.1)$$

آنگاه در زمانهای بعدی t

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J(x_i(t), v_i(t)) \to \iint f(x,v,t)J(x,v)dxdv \qquad (2.1)$$

در اینجا تابع چگالی $f(x,v,t)$ جواب یگانهٔ معادلهٔ

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (3.1)$$

است با شرط

$$f(x,v,0) = f^{\circ}(x,v)$$

به‌عبارت دیگر $f(x,v,t) = f^{\circ}(x - vt, v)$.

در دنیای واقعی، گازها کامل نیستند و ملکولهای گاز بر یکدیگر اثر می‌کنند. شاید بتوان گفت که ساده‌ترین مدل غیر مبتذل برای گازها، مدل کره‌های سخت است. در این مدل هر x_i مرکز یک کرهٔ کوچک به قطر ϵ است. مثل ذرات یک گاز کامل، هر کره به تبع بردار سرعت خود v_i در حرکت است. اما وقتی دو کره به‌هم برخورد می‌کنند، سرعتشان تغییر می‌کند. فرض می‌کنیم که برخورد الاستیک است، یعنی اینکه در اثر برخورد، تکانه و انرژی جنبشی دو کره تغییر نمی‌کند. وقتی چنین برخوردی روی می‌دهد، مؤلفه‌های بردارهای سرعت در راستای $n_{ij} = \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|}$ عوض می‌شود. به‌عبارت دیگر، اگر v_i' و v_j' بردارهای سرعت بعد از برخورد باشند، آنگاه

$$v_i' = v_i - (v_i\cdot n_{ij})n_{ij} + (v_j\cdot n_{ij})n_{ij}$$
$$v_j' = v_j - (v_j\cdot n_{ij})n_{ij} + (v_i\cdot n_{ij})n_{ij}$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که

$$v_i' + v_j' = v_i + v_j,\quad |v_i'|^2 + |v_j'|^2 = |v_i|^2 + |v_j|^2,$$
$$(v_i - v_j)\cdot n_{ij} = (v_i' - v_j')\cdot n_{ij}$$

در یک شاره یا گاز، N عددی خیلی بزرگ (عدد آووگادرو) و ϵ عددی خیلی کوچک (قطر یک ملکول) است. چون برای پر کردن جعبه‌ای به‌ابعاد یک متر با کره‌های کوچک به‌قطر ϵ، به‌حدود $c_0\epsilon^{-d}$ کره احتیاج است (c_0 یک ثابت است)، یک فرض طبیعی این است که $N \to \infty$ و $\epsilon \to 0$ ولی $N\epsilon^d \to c_0$ که در آن c_0 عددی مثبت است. اما گراد[1] رژیم دیگری را برای یک گاز رقیق پیشنهاد می‌کند. در رژیم بولتسمان‌ـگراد، $N \to \infty$ و $\epsilon \to 0$ ولی $N\epsilon^{d-1} \to c_0$. در نتیجه در یک گاز رقیق فضای بیشتری خالی می‌ماند و نسبت فضای اشغال‌شده به‌وسیلهٔ کره‌ها به‌کل فضا در حدود $c_0\epsilon$ است.

1. Grad

۲. حدس اول

به‌طور خلاصه این حدس مدعی است که چگالی مولکولی در معادلهٔ بولتسمان صدق می‌کند. به‌عبارت دیگر اگر (۱۰۱) درست باشد آنگاه (۱۰۲) درست است، هرگاه f جواب یگانهٔ معادلهٔ بولتسمان باشد:

$$\begin{cases} f_t + v \cdot f_x = Q(f,f) = Q^+(f,f) - Q^-(f,f) \\ f(x,v,\circ) = f^\circ(x,v) \end{cases} \qquad (۱.۲)$$

در اینجا Q^- میزان کاهش چگالی و Q^+ میزان افزایش چگالی است. برای کاهش f، یک ذره یا ملکول با بردار v به ذره‌ای با بردار v_* برخورد می‌کند و سرعتش عوض می‌شود. بنا به‌فرض اثبات نشدهٔ آشوب ملکولیِ بولتسمان، احتمال پیدا کردن یک جفت ذره با بردارهای سرعت v و v_* در نقطهٔ x و در زمان t قبل از برخورد تقریباً برابر است با حاصلضرب چگالیها، $f(x,v,t)f(x,v_*,t)$. البته در مقیاس ماکروسکپی باید فرض کرد که هر دو ذره در نقطهٔ xاند چراکه ϵ به صفر میل می‌کند. ولی بردار n_{ij} که طولش یک است به‌بردار n میل می‌کند و چون قبل از برخورد داریم

$$(v_i - v_j) \cdot n_{ji} \geq \circ$$

و احتمال وقوع چنین برخوردی متناسب است با $(v_i - v_j) \cdot n_{ji}$، انتظار می‌رود که

$$Q^-(f,f)(x,v,t) = \int_{\mathbb{R}^۳} \int_{S^۲} f(x,v,t) f(x,v_*,t) [(v - v_*) \cdot n]^+ dv_* dn \qquad (۲.۲)$$

که در آن $S^۲$ کرهٔ به شعاع یک است و d_n جزء سطح کره است. با استدلال مشابهی می‌توان حدس زد که

$$Q^+(f,f)(x,v,t) = \int_{\mathbb{R}^۳} \int_{S^۲} f(x,v',t) f(x,v'_*,t) [(v - v_*) \cdot n]^+ dv_* dn \qquad (۳.۲)$$

که در آن n $v' = v - ((v - v_*) \cdot n)$ n و $v'_* = v_* + ((v - v_*) \cdot n)$. شکل بالا برای Q^+ در (۳۰۲) به این علت اختیار شده است که اگر دو ذره با سرعتهای v' و v'_* به‌هم برخورد کنند دو بردار سرعت جدید نتیجه می‌شود و می‌توان نشان داد که این دو بردار برابرند با v و v_*. در نتیجه چنین برخوردی باعث افزایش چگالی ذراتی می‌شود که سرعتشان v است. ضریب فراوانی چنین برخوردی برابر است با

$$(v' - v'_*) \cdot n = (v - v_*) \cdot n$$

این حدس فقط در دو حالت اثبات شده است. در سالهای ۷۰، لنفورد[۱] در مقالهٔ مهمی این حدس را برای زمانهای کوتاه اثبات کرد. در سالهای ۸۰ هم ایلنر[۲] و پولویرنتی[۳] این حدس را برای f° کوچک اثبات کردند.

1. Lanford 2. Illner 3. Pulvirenti

۳. حدس دوم

حال مسأله‌ای را مطرح می‌کنیم که حدس اول قادر به پاسخگویی آن نیست. فرض کنید که تابع پیوستهٔ $J(x,v,y,w)$ داده شده است و می‌خواهیم حد

$$\frac{۱}{N} \sum_{i=۱}^{N} J(x_i(t), v_i(t), x_i(s), v_i(s))$$

را مثلاً وقتی که $\circ \leq t < s$، حساب کنیم. اگر $J(x,v,y,w)$ به (y,w) بستگی نداشته باشد، این همان مسألهٔ قبلی است و جواب برابر است با $\int Jf$. اگر J تابع (y,w) هم باشد آنگاه (۲۰۱) پاسخگو نیست. در حالت کلیتر، می‌توان یک تابع پیوستهٔ کراندار $J(x_۱, v_۱, \cdots, x_k, v_k)$، زمانهای $t_۱ < t_۲ < \cdots < t_k$ و حد

$$X_N(J) = \frac{۱}{N} \sum_{i=۱}^{N} J(x_i(t_۱), v_i(t_۱), \cdots, x_i(t_k), v_i(t_k))$$

را در نظر گرفت. برای پاسخگویی به این مسأله باید به مدل میکروسکپی برگردیم و آن را به‌طور شهودی بررسی کنیم. یک ذره را در این مدل دنبال می‌کنیم، مثلاً ذرهٔ اول $(x_۱, v_۱)$ را. وقتی $N \to \infty$، این ذرهٔ متحرک به یک ذرهٔ متحرک $(\overline{x}, \overline{v})$ میل می‌کند که لزوماً $\overline{v} = \frac{d\overline{x}}{dt}$. اما $\overline{v}(t)$ با زمان تغییر می‌کند و انتظار داریم که $\overline{v}$ در هر لحظه با احتمال مثبتی به $\overline{v}'$ تبدیل شود و اگر n $\overline{v}' = \overline{v} - ((\overline{v} - \overline{v}_*) \cdot n)$ برای یک $\overline{v}_* \in \mathbb{R}^۳$ و یک $n \in S^۲$، آنگاه احتمال وقوع چنین رویدادی باید متناسب باشد با

$$[(\overline{v} - \overline{v}_*) \cdot n]^+ f(\overline{x}, \overline{v}_*, t)$$

فرایند $(\overline{x}, \overline{v})$ یک فرایند مارکفی ناهمگن است و اگر امید ریاضی این فرایند را به E نمایش دهیم، آنگاه

$$\lim_{N \to \infty} X_N(J) = EJ(\overline{x}(t_۱), \overline{v}(t_۱), \overline{x}(t_۲), \overline{v}(t_۲), \cdots, \overline{x}(t_k), \overline{v}(t_k)) \qquad (۱.۳)$$

این قسمت را با تعریف مولد فرایند $(\overline{x}(t), \overline{v}(t))$ به‌اتمام می‌رسانیم:

$$\mathscr{L} g(\overline{x}, \overline{v}) = \overline{v} \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{x}} + \int_{\mathbb{R}^d} \int_{S^{d-۱}} [(\overline{v} - \overline{v}_*) \cdot n]^+ f(\overline{x}, \overline{v}_*, t) [g(\overline{v})' - g(\overline{v})] dn d\overline{v}_*$$

۴. حدس سوم

اگر $f_N(x,v,t)$ نامزدی برای چگالی میکروسکپی مدل ما باشد، آنگاه بنا بر حدس اول، $f_N \to f$ وقتی‌که $N \to \infty$. حال می‌خواهیم بدانیم که اگر به‌جای f_N، f را قرار دهیم ماهیت خطای مرتکب شده چیست. علی‌رغم اینکه مدل ما غیرتصادفی است، به‌ازای ξ مناسبی که تصادفی است داریم

$$f_N = f + \frac{۱}{\sqrt{N}} \xi + o\left(\frac{۱}{\sqrt{N}}\right) \qquad (۱.۴)$$

زیرا در اینجا وقتی $N \to \infty$، قضیهٔ حدی مرکزی مطرح است. در اصل به‌طور شهودی داریم

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f_N}{\partial x} = Q(f_N, f_N) + \frac{1}{\sqrt{N}}\eta + o(\frac{1}{\sqrt{N}}) \tag{۲.۴}$$

وقتی‌که η یک نوفهٔ سفید از متغیرهای (x,t) است. اگر J یک تابع هموار باشد، داریم

$$\begin{aligned} & E\left[\iint \eta J dx\, dv\, dt\right]^2 \\ &= \int_S^{d-1} \iiint [(v - v_\circ) \cdot n]^+ f(x,v,t) f(x,v_*,t) \\ &\quad [J(x,v',t) + J(x,v'_*,t) - J(x,v,t) \\ &\quad - J(x,v_*,t)]^2 dx\, dv\, dt\, dv_* dn \end{aligned}$$

در اینجا E امید ریاضی است. برای اینکه معادله‌ای ساده‌تر به‌دست آوریم، (۱.۴) را در (۲.۴) قرار می‌دهیم و از این استفاده می‌کنیم که f در معادلهٔ بولتسمان صدق می‌کند. نتیجهٔ حاصل عبارت از

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = 2Q(f,\xi) + \eta \tag{۳.۴}$$

اثبات (۱.۴) برای ξای که در معادلهٔ (۳.۴) صدق کند هنوز یک مسألهٔ حل نشده است، حتی وقتی‌که سیستم در حالت تعادل باشد. در زمانهای کوتاه، نتیجه‌ای از (۱.۴) را وان بایرن، لبوویتس، لنفورد، و اسپون اثبات کرده‌اند.

مراجع

1. H. van Beijeren, O. E. Lanford, J. L. Lebowitz and H. Spohn, "Equilibrium time correlation fuuctions in the low-density limit", *J. Stat. Phys.*, **22** (1980) 237-257.
2. R. Illner and M. Pulvirenti, "Global validity of the Boltzmann equation for two and three dimensional rare gas in vacuum" , *Comm. Math. Phys.*, **105** (1986) 189-203.
3. O. E. Lanford, "Time evolution of large classical systems" in *Dynamical Systems, Theory and Applications*, Lecture Notes in Phys. 38, Springer-Verlag, Berlin (1975) 1-111.
4. H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, Springer-Verlag, Berlin (1991).

******

* فریدون رضاخانلو، دانشگاه کالیفرنیا در برکلی، آمریکا

rezakhan@math.berkeley.edu