نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۲، صص ۴ـ۶

ریاضیات تپه‌های شنی

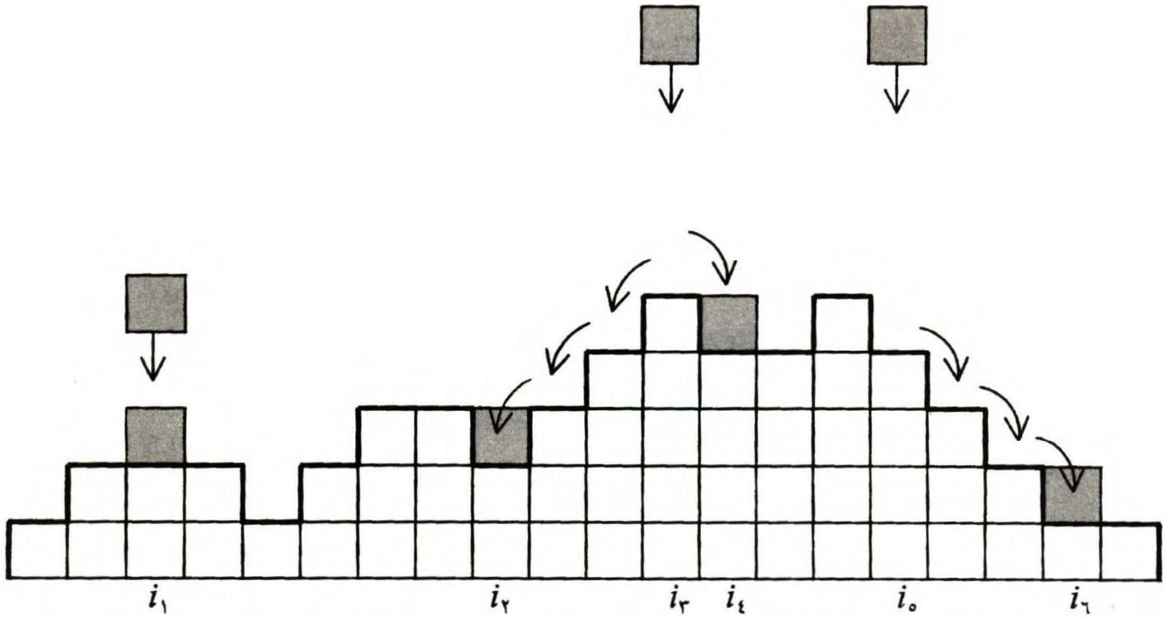
فریدون رضاخانلو*

ریزش بهمن وقتی رخ می‌دهد که مقدار برف انباشته‌شده در روی کوه به یک حالت بحرانی می‌رسد و افزایش مقدار ناچیزی برف به این انبوههٔ بحرانی منجر به انتقال مقدار زیادی برف به کوهپایه می‌شود. عدهٔ قابل توجهی از فیزیکدانها و ریاضیدانها سعی کرده‌اند با ارائهٔ مدلهای متفاوت به بررسی دقیق ریزش بهمن و پدیده‌های مشابه بپردازند. سه خصوصیت پدیدهٔ ریزش بهمن شایان تأکیدند: (۱) وجود شیبهای بحرانی (۲) فقدان مقیاس ثابت: ریزش بهمن می‌تواند در نقاط مختلف کوه شروع شود و در نتیجه مسافت طی‌شده به‌وسیلهٔ انبوه برف می‌تواند متفاوت باشد. (۳) رخداد بهمن ناگهانی است و موجب تغییری فاحش و گسسته می‌شود.

بررسی دقیق ریاضی مدلهای ارائه‌شده برای ریزش بهمن مسألهٔ سختی است. در این مقاله به بررسی مدل ساده‌تری می‌پردازیم که تا حدی می‌توان آن را مدلی برای پدیدهٔ شکل گرفتن تپه‌های شنی محسوب کرد و دارای خصوصیات (۱) و (۲)ی بالاست اما فاقد خصوصیت (۳) است. برای ساده‌کردن هندسهٔ مسأله، فرض کنید که دانه‌های شن به شکل مکعبهای کوچک باشند. تپه‌های شنی در مدل ما، تشکیل شده‌اند از ستونهای این مکعبها که روی یک صفحه قرار دارند. به‌عبارت دیگر، تپه‌های شنی را به‌وسیلهٔ یک تابع h از $\mathbb{Z}^2$ به $\mathbb{Z}$ مشخص می‌کنیم که در آن به‌ازای $i \in \mathbb{Z}^2$، عدد $h(i)$ طول ستون مکعبی در بالای مربعی است که مرکزش نقطهٔ i است. دو عمل باعث تغییر h می‌شود. در عمل اول، به‌طور تصادفی مکعبها از بالا روی تپه‌ها فرود می‌آیند که باعث افزایش h می‌شود. در عمل دوم فرض کنید که در زیر صفحهٔ $\mathbb{Z}^2$، دریچه‌هایی وجود دارند که وقتی دریچه باز و بسته می‌شود، مکعبی به پایین می‌افتد که باعث کاهش h می‌شود. حال می‌خواهیم به توصیف دقیق تغییر h بپردازیم. اول باید تعریف دقیقی از شیب بحرانی به‌دست دهیم. می‌گوییم دو نقطهٔ i و j مجاور هستند اگر فقط در یک مختصه متفاوت باشند و این تفاوت یا ۱ باشد یا ۱−. تعریف می‌کنیم

$$\Omega = \{h : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z} \mid h(i) - h(j) = 1 \text{ یا } -1 \text{ یا } 0 \text{ ،به‌ازای هر } i \text{ و } j\text{ی مجاور} \}$$

توجه کنید که مدلمان را تعمیم داده‌ایم و به‌جای $\mathbb{Z}^2$، $\mathbb{Z}^d$ را در تعریف قرار داده‌ایم. (در زیر، تعبیر دیگری از مدلمان در حالتی‌که $d = 1$، ارائه خواهیم داد.) حال فرض می‌کنیم به‌ازای هر $i \in \mathbb{Z}^d$، یک ساعت پواسنی با سرعت تصادفی $f_i^+(t)$ داریم. (تعریف این ساعت در انتهای همین پاراگراف می‌آید). این ساعتهای پواسنی به‌ازای iهای مختلف از یکدیگر مستقل هستند. وقتی ساعت پواسنی مربوط به i زنگ می‌زند یک مکعب به ستون i اضافه می‌شود، یعنی $h(i)$ تبدیل به $h(i) + 1$ می‌شود ولی اگر این باعث شود h از Ω خارج شود آنگاه مکعب اضافه شده یک راه پله‌ایِ نزولی انتخاب می‌کند تا به ستونی اضافه شود که نتیجهٔ حاصل هنوز به Ω تعلق داشته باشد. در شکل صفحهٔ بعد سرنوشت سه مربع اضافه شده در حالت $d = 1$ نشان داده شده است. برای مربع اضافه شده به ستون i_1، h حاصل هنوز در Ω است. برای مربع اضافه شده به i_3 دو امکان وجود دارد، نشستن برروی ستون i_4 یا i_2. جایگاه نهایی مربع اضافه شده به ستون i_5، ستون i_6 است. وقتی بیش از یک امکان برای مربع یا مکعب اضافه شده به یک ستون وجود دارد، می‌توان قانونی معین کرد که به‌وسیلهٔ آن تصمیمی برای جایگاه نهایی مربع یا مکعب اضافه شده اتخاذ شود. جزئیات این قانون بر قضیه‌ای که در این مقاله بیان خواهد شد، تأثیری نخواهد گذاشت. مثلاً می‌توان فرض کرد که هرگاه k امکان وجود داشته باشد آنگاه هر یک از این امکانها با احتمال $\frac{1}{k}$ انتخاب می‌شوند. به‌طور مشابه، فرض کنید که ساعتهای پواسنی با سرعت $f_i^-(t)$ برای هر i وجود دارد که وقتی ساعت iام زنگ زد، یک مکعب از ستون i برداشته می‌شود و اگر نتیجه در Ω نبود مثل قبل عمل می‌کنیم. سریعترین روش توضیح قانونمان برای برداشتن مکعبها این است که در شکل، صفحه را ۱۸۰ درجه بچرخانید؛ حال برداشتن یک مکعب در شکل جدید همان افزایش یک مکعب می‌شود. تعریف دقیق مدل ما در مرجع [۴] آمده است. در اینجا فقط به تعریف یک ساعت پواسنی با سرعت c اکتفا می‌کنیم. در چنین ساعتی زنگ kام در زمان $\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k$ رخ



می‌دهد که τ_1، τ_2، ...، τ_k، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل هستند و احتمال اینکه τ_i بزرگتر از λ باشد برابر است با $ce^{-\lambda c}$.

حال تعبیر دیگری از مدلمان به‌دست می‌دهیم. فرض کنید که شب عید است و تعداد زیادی مشتری در یکی از فروشگاههای بزرگ مشغول خرید هستند. در این فروشگاه به‌ازای هر i یک صف وجود دارد که در ابتدای این صف، مشتری می‌تواند پول اجناس انتخاب شده را پرداخته و از فروشگاه خارج شود. هر گاه یک مشتری به صف iام می‌رسد، اگر ببیند یکی از صفوف $i+1$ یا $i-1$ کوتاهتر هستند، آنگاه به صف کوتاهتر می‌رود. اگر هر دو صف $i+1$ و $i-1$ کوتاهتر باشند، اول یک سکه می‌اندازد و براساس نتیجهٔ آن یکی از دو صف را انتخاب می‌کند. به‌همبن طریق اگر یک مشتری از صف iام پس از پرداخت خارج شود و اگر برای آخرین مشتریِ صف $i+1$ یا $i-1$ رفتن به صف کوتاه شدهٔ iام بهتر باشد، آنگاه یک مشتری از صف $i+1$ یا $i-1$ به صف iام خواهد رفت.

ما به مدلمان به‌عنوان یک توصیف میکروسکوپی از شکل گرفتن تپه‌ها نگاه می‌کنیم. برای درک ماکروسکوپیِ شکل گرفتن تپه‌های شنی، فرض می‌کنیم ابعاد مکعبهای ما در مقیاس ماکروسکوپی برابر ϵ است و برای به‌دست آوردن یک نتیجهٔ جالب، عدد ϵ را به صفر میل می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، اگر $h(i,t)$ نتیجهٔ افزایش و کاهش مکعبها بعد از t ثانیه باشد، به بررسی تابع

$$u^\epsilon(x,t) = \epsilon h([\frac{x}{\epsilon}], \frac{t}{\epsilon})$$

وقتی‌که ϵ به صفر میل می‌کند، می‌پردازیم. در اینجا x یک نقطه در $\mathbb{R}^d$ است، t یک عدد مثبت است، و $[\frac{x}{\epsilon}]$ مقدار صحیح $\frac{x}{\epsilon}$ است. حال قضیه‌ای را از مرجع [۴] بیان می‌کنیم. تعریف زیر را در نظر بگیرید

$$\overline{\Omega} = \{g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} | g(x+\lambda e_i) - g(x)| \le \lambda, i = 1, \dots, d\}$$

وقتی‌که e_i بردار به طول یک در جهت مثبت مختصهٔ iام باشد.

قضیه. *فرض کنید توابع h در آغاز به‌طور تصادفی چنان انتخاب شده باشند که*

$$u^\epsilon(x,0) = \epsilon h([\frac{x}{\epsilon}], 0) \to g_0(x) \in \overline{\Omega}$$

همچنین فرض کنید برای دو تابع پیوستهٔ $f^\pm(x,t)$ داریم

$$f_i^\pm(t) = f^\pm(\epsilon i, \epsilon t)$$

در این صورت با احتمال یک

$$\lim_{\epsilon \to 0} u^\epsilon(x,t) = u(x,t)$$

که در آن تابع u به‌طور یکتا با سه خاصیت زیر مشخص می‌شود:

(۱) u پیوسته است و $u(x,0) = g(x)$،

(۲) *به‌ازای هر t، تابع $u(.,t)$ متعلق به $\overline{\Omega}$ است،*

(۳) *به‌ازای هر تابع v در $\overline{\Omega}$، داریم*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)) \cdot (v(x) - u(x,t))dx \le 0 \quad (1)$$

وقتی‌که $f(x,t) = f^+(x,t) - f^-(x,t)$.

برای درک بهترِ (۱)، می‌نویسیم

$$I(v) = \begin{cases} 0 & v \in \overline{\Omega} \\ +\infty & v \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

تعبیر ما از $I(v)$ انرژی تابع v است. مشاهده کنید که مجموعهٔ $\overline{\Omega}$ یک مجموعهٔ محدب است. به‌عبارت دیگر اگر $v_1, v_2 \in \overline{\Omega}$ و اگر $\lambda \in [0, 1]$،

آنگاه $\lambda v_۱ + (۱-\lambda)v_۲ \in \overline{\Omega}$. چون مجموعهٔ $\overline{\Omega}$ محدب است، تابع I هم محدب است؛ به‌ازای هر $v_۱$ و $v_۲$ و هر $\lambda \in [۰,۱]$، داریم

$$I(\lambda v_۱ + (۱-\lambda)v_۲) \le \lambda I(v_۱) + (۱-\lambda) I(v_۲)$$

توابع محدب دارای این خاصیت هستند که اگر در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشند، آنگاه نمودار تابع در بالای خط مماسش قرار می‌گیرد. از این خاصیت می‌توان استفاده کرد و یک خط را *زیرمماس* نامید اگر با نمودار تابع نقطهٔ مشترکی داشته باشد و نمودار در بالای آن قرار گیرد. شیب زیرمماس را زیرمشتق می‌نامیم. مجموعهٔ تمام زیرمشتقها را با علامت $\partial I(u)$ نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر $a \in \partial I(u)$ اگر برای تمام توابع v داشته باشیم

$$< a, v-u > + I(u) \le I(v) \qquad (۲)$$

مقصود ما از $<a, v-u>$ یک ضرب داخلی مناسب بین a و $v-u$ است. چون با فضای توابع سروکار داریم، به‌کمک انتگرالْ یک ضرب داخلی تعریف می‌کنیم. به‌عبارت دیگر معنی (۲) چنین است

$$\int_{\mathbb{R}^d} a(x)\cdot(v(x)-u(x))dx + I(u) \le I(v) \qquad (۳)$$

با توجه به تعریف I، *نابرابری* (۳) می‌گوید که $a \in \partial I(u)$ اگر $u \in \overline{\Omega}$، و برای هر $v \in \overline{\Omega}$ داریم

$$\int a(x)\cdot(v(x)-u(x))dx \le ۰$$

از مقایسهٔ این با (۱) درمی‌یابیم که (۱) به‌ازای همهٔ tهای مثبت معادل است با

$$f(\cdot,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t) \in \partial I(u(\cdot,t)) \qquad (۴)$$

این کاملاً با شهود فیزیکی ما از مدلمان سازگار است. معمولاً در توصیف فیزیکی خیلی از پدیده‌ها به معادله‌ای به شکل

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta I}{\delta u}(u) + f \qquad (۵)$$

برمی‌خوریم که در آن f نیروی خارجی است، I انرژی است و $\frac{\delta I}{\delta u}$ مشتق تابعی I است. معادلهٔ (۵) می‌گوید که u در جهتی تغییر می‌کند که در آن I سریعتر کاهش یابد و این جهت به‌وسیلهٔ $-\frac{\delta I}{\delta u}$ معین می‌شود. توجه کنید که چون I در حالت مورد بررسی مشتق‌پذیر نیست، به‌جای (۵)، (۴) را منظور کرده‌ایم.

برای درک بهتر (۴)، فرض کنید مجموعهٔ محدب Λ را داریم که متناهیْ بعد است، مثلاً $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$. همچنین فرض کنید تابع $x(t)$ را با ضابطهٔ $x(t) \in \Lambda$ برای تمام tها داریم و برای هر بردار $v \in \Lambda$

$$(f(t) - \frac{dx}{dt}(t))\cdot(v - x(t)) \le ۰ \qquad (۶)$$

معنی (۶) این است که مادام که $x(t)$ متعلق به Λ است، داریم $\frac{dx}{dt} = f(t)$. ولی وقتی $x(t)$ به لبهٔ Λ می‌رسد، آنگاه $\frac{dx}{dt}$ برابر با مؤلفهٔ مماسی $f(t)$ می‌باشد. به‌عبارت دیگر $\frac{dx}{dt} = f_T(t)$ چنانکه $f(t) = f_T(t) + f_N(t)$، $f_T(t)$ مماس به لبهٔ Λ است و $f_N(t)$ عمود بر لبهٔ Λ است.

مراجع

1. G. Aronsson, "A mathematical model in sand mechanics", *SIAM J. of Applied Math.* **22** (1972) 437-458.

2. G. Aronsson, L. C. Evans, Y. Wu, "Fast/slow diffusion and growing sandpiles", *J. Diff. Eqs.* **131** (1998) 304-335.

3. P. Bak, C. Tang, K. Weisenfeld, "Self-organized criticality", *Phys. Rev. A.* **38** (1988) 364-378.

4. L. C. Evans and F. Rezakhanlou, "A stochastic model for growing sandpiles and its continuum limit", *Communications in Mathematical Physics*, **197** (1998) 325-345.

[اثبات حکمهای مقاله و مطالب بیشتری در این زمینه در مرجع بالا آمده است.]

5. L. Prigozhin, "Sandpiles and river networks: extended systems with nonlocal interactions", *Phys. Rev. E.* **49** (1994) 1161-1167.

* * * * * *

* فریدون رضاخانلو، بخش ریاضی دانشگاه کالیفرنیا در برکلی

rezakhan@math.berkeley.edu