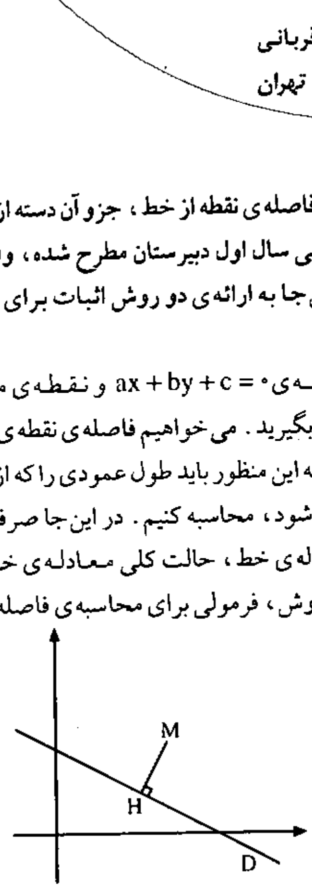
فاصله‌ی نقطه

● مهدی قربانی
دبیر ریاضی منطقه‌ی ۹ تهران

اشاره

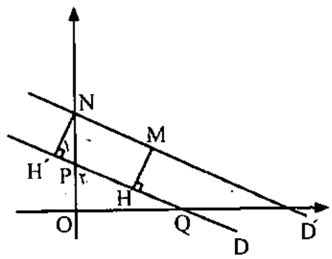
دستور محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط، جزو آن دسته از روابطی است که در کتاب درسی سال اول دبیرستان مطرح شده، ولی اثبات آن نیامده است. در این جا به ارائه‌ی دو روش اثبات برای رابطه‌ی ذکر شده می‌پردازیم.

خط D به معادله‌ی $ax + by + c = ۰$ و نقطه‌ی معلوم $M(x_۰, y_۰)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم فاصله‌ی نقطه‌ی M را از خط D محاسبه کنیم. به این منظور باید طول عمودی را که از نقطه‌ی M بر خط D رسم می‌شود، محاسبه کنیم. در این جا صرف‌نظر از حالت‌های خاص معادله‌ی خط، حالت کلی معادله‌ی خط را در نظر می‌گیریم و به دو روش، فرمولی برای محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط می‌یابیم.



روش اول

در شکل(۲)، از نقطه‌ی M خط D' را به موازات D رسم کرده‌ایم. فاصله‌ی این دو خط موازی، جواب مسئله خواهد بود. به منظور یافتن این فاصله، معادله‌ی خط D' را می‌نویسیم. این کار به سهولت انجام‌پذیر است، زیرا مختصات یک نقطه از آن، یعنی M معلوم و شیب آن نیز مساوی با شیب خط D است. پس می‌توان نوشت:



$$\left.\begin{array}{l} M(x_۰, y_۰) \\ m_D = m_{D'} = -\dfrac{a}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_۰ = m_{D'}(x - x_۰)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-a}{b}x + \frac{a}{b}x_۰ + y_۰$$

خط D' محور عرض‌ها را در N قطع کرده که مختصات آن به صورت زیر است:

$$x = ۰ \Rightarrow y = \frac{a}{b}x_۰ + y_۰ = \frac{ax_۰ + by_۰}{b} \Rightarrow N(۰, \frac{ax_۰ + by_۰}{b})$$

اکنون کافی است، طول پاره‌خط NH' را که برابر MH است، حساب کنیم. این محاسبه با استفاده از تشابه دو مثلث OPQ و $NH'P$ امکان‌پذیر است:

(۱)

$$\left.\begin{array}{l} \hat{P}_۱ = \hat{P}_۲ \\ \hat{H} = \hat{O} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\Delta}{P}Q = N\overset{\Delta}{H'}P \Rightarrow \frac{PQ}{NP} = \frac{OQ}{NH'}$$

هریک از مقادیر PQ، NP و OQ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$OQ = \left|\frac{-c}{a}\right|$$

$$PQ = \sqrt{OP^۲ + OQ^۲} = \sqrt{(\frac{-c}{a})^۲ + (-\frac{c}{b})^۲}$$

$$= \sqrt{\frac{c^۲}{a^۲ . b^۲}(a^۲ + b^۲)} = \frac{|c|}{|ab|}.\sqrt{a^۲ + b^۲}$$

$$NP = ON - OP = \left|\frac{ax_۰ + by_۰}{b} - \frac{-c}{b}\right| = \left|\frac{ax_۰ + by_۰ + c}{b}\right|$$

با قرار دادن این مقادیر در تساوی ۱ خواهیم داشت:

ازخط

$$\frac{\frac{|c|}{|a|.|b|}\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}}=\frac{\frac{|c|}{|a|}}{MH}\Rightarrow\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ax_0+by_0+c|}$$

$$=\frac{1}{MH}\Rightarrow MH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

این رابطه نشان می‌دهد، برای محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط، ابتدا معادله‌ی خط داده شده را به صورت $ax+by+c=0$ می‌نویسیم. سپس به‌جای x و y، مقادیر x_0 و y_0 را جای‌گزین می‌کنیم و قدر مطلق حاصل را بر $\sqrt{a^2+b^2}$ تقسیم می‌کنیم.

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-2,3)$ از خط به معادله‌ی $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ را به‌دست آورید.

حل:

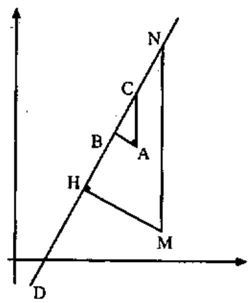
$$y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\Rightarrow -3x+4y+2=0$$

$$d=\frac{|-3\times(-2)+4\times3+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4$$

روش دوم

ابتدا از M خطی بر D عمود می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ی H قطع کند. اندازه‌ی پاره‌خط MH، همان فاصله‌ی M از خط D است. سپس از نقطه‌ی M خطی به موازات محور عرض‌ها رسم می‌کنیم تا خط D را در نقطه‌ی N قطع کند (شکل ۳). مختصات نقطه‌ی N عبارت است از: $N(x_0,-\frac{ax_0+c}{b})$ (چرا؟) و طول MN چنین خواهد شد:

$$MN=|y_M-y_N|=\left|y_0+\frac{ax_0+c}{b}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}$$



اکنون مثلث ABC با اضلاع: $BC=\sqrt{a^2+b^2}$ ، $AC=|b|$ و $AB=|a|$ را چنان در نظر می‌گیریم که وتر BC بر NH منطبق و $AC\parallel MN$ باشد. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی MHN و ABC متشابه‌اند (چرا؟) و می‌توان نوشت:

$$\frac{MH}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

با جای‌گذاری مقادیر معلوم در تساوی اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{MH}{|b|}=\frac{\frac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow MH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

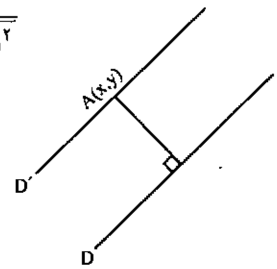
اثبات مطلب اخیر به همین دو روش ختم نمی‌شود. شما می‌توانید با به‌کارگیری استعداد و خلاقیت خود، روش‌های دیگری را ابداع کنید. پس قلم و کاغذ به‌دست بگیرید و شروع کنید. موفق باشید.

نتیجه‌ی ۱: فاصله‌ی خط $ax+by+c=0$ از مبدأ مختصات برابر است با: $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

نتیجه‌ی ۲: فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات

برابر است با : $\begin{cases} D: ax+by+c=0 \\ D': ax+by+c'=0 \end{cases}$

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



زیرا فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه $(x,y) \in D'$ از خط D برابر است با :

$$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

اما $ax+by=-c'$ و بنابراین :

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال: فاصله‌ی دو خط موازی $2x+y+3=0$ و $4x+2y+4=0$ برابر است با :

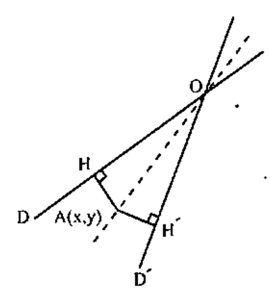
$$d=\frac{|3-2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

نتیجه‌ی ۳: می‌دانیم نیم‌ساز زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که هر نقطه‌ی واقع بر آن، به فاصله‌های مساوی از اضلاع زاویه قرار دارد. با توجه به این مطلب، اگر دو خط به معادلات :

$ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$

متقاطع باشند، معادله‌ی خط نیم‌ساز زاویه‌ی بین آن‌ها به صورت زیر خواهد شد :

$$AH=AH' \Rightarrow \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$



مثال: معادله‌ی نیم‌ساز بین دو خط $x+y+2=0$ و $-x+y-4=0$ را بیابید.

حل :

$$\frac{|x+y+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-x+y-4|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow x+y+2=\pm(-x+y-4)$$

$$\Rightarrow x=-3 \quad , \quad y=1$$

Math2.org
معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

آدرس اینترنتی سایت : **http://math2.org**

این سایت را می‌توان بر روی CD و... ذخیره کرد. و در صفحه اصلی خود دارای فهرست‌های موضوعی زیر است.

الف . فهرست پیام ریاضی (The Math Message Board)

ب . آیا سؤال ریاضی دارید؟ (Have a Math Question)

پ . همکاری سایت ریاضی

(Web Math Collaboration مخفف WMC)

ت . پیوست‌ها (Links)

ث . منابع در دسترس دیگر (Other on-site Resources)

ج . فهرست‌های مرجع ریاضی (Math Reference Table)

این قسمت از سایت دارای عنوان‌های زیر است.

I. عمومی (General)

۱ . نمادگذاری عدد (Number Notation)

۲ . جدول ضرب (Multiplication Table)

۳ . تبدیل کسر دهدهی (Fraction-Decimal Conversion)

۴ . تبدیل واحد و اندازه

(Units & Measurment Conversion)

II. جبر (Algebra)

III. هندسه (Geometry)

VI. مثلثات (Trigonometry)

V. ریاضیات گسسته / جبر خطی
(Discrete Math/ Linear Algebra)

VI. آمار (Statistics)

VII. حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)

VIII. پیشرفته (Advanced)