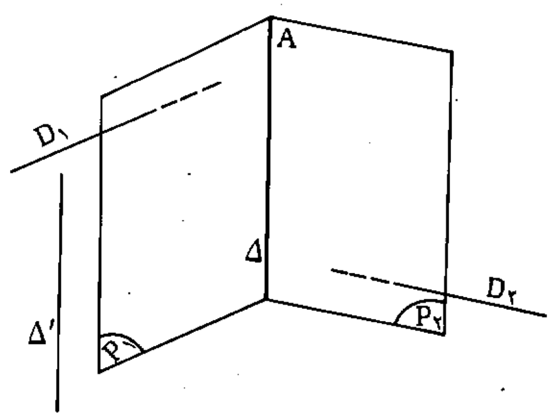
عمود مشترك دوخط متنافر

محمد ابراهیم گیتی‌زاده

*قابل استفادهٔ دانش آموزان سال چهارم ریاضی

۱- می‌دانیم که ازهر نقطهٔ دلخواه A می‌توان خطی رسم کرد که بردوخط متنافر معلوم، مانند D_1 و D_2 ، عمود باشد. این خط، که آن را Δ می‌نامیم، فصل مشترك دوصفحه، مانند P_1 و P_2 ، است که ازنقطهٔ A بریکی از این دوخط عمود می‌شوند، آن‌گاه هرخط دیگر، مثل Δ' ، که به موازات Δ رسم شود، بر دوخط متنافرمفروض عمود خواهد بود. بنابراین، می‌توان خط Δ را راستای کلیهٔ خطوطی اختیار کرد که بردوخط متنافر عمود می‌شوند.

$$(P_1 \perp D_1)\wedge(P_2 \perp D_2) \text{ ، } (P_1 \cap P_2)=\Delta \Longrightarrow$$
$$(\Delta \perp D_1) \wedge (\Delta \perp D_2)$$
$$(\Delta' \| \Delta) \Longrightarrow (\Delta' \perp D_1) \wedge (\Delta' \perp D_2)$$



در هندسه تحلیلی ، راستای کلیهٔ خطوط عمود بردو خط متنافر D_1 و D_2 را می‌توان راستای حاصل‌ضرب برونی دو بردار هادی این دوخط اختیار کرد. مثلاً، دو بردار هادی دوخط D_1 و D_2 با معادله‌های:

$$D_1 : x-5=\frac{y+2}{2}=-z-1$$

$$D_2 : \frac{x-1}{2}=y+1=z$$

به ترتیب :

$$\vec{v_2}(2 , 1 , 1) \quad \text{و} \quad \vec{v_1}(1 , 2 , -1)$$

می‌باشند، و راستای هرخطی که براین دو خط عمود می‌شود راستای بردار زیر است:

$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \vec{w_1}(3 , -3 , -3)$$

یا

$$\vec{w}(1 , -1 , -1)$$

مثال . معادله‌های خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و بردوخط Δ_1 و Δ_2 ، با معادله‌های زیر، عمود باشد.

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{3}=2y=z$$

$$\Delta_2 : \frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=-z+1$$

حل . بردارهای هادی این دوخط به ترتیب عبارتند از:

$$\vec{a_1}(3,\frac{1}{2},1) \quad , \quad \vec{a_2}(2,2,-1)$$

راستای هر خطی که بر این دوخط عمود باشد راستای بردار زیر است:

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = \vec{a}\left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right) \quad \text{یا} \quad \vec{u}(-1, 2, 2)$$

و معادله‌های خطی که از نقطهٔ $O(0,0,0)$ در راستای بردار

$$\vec{u}(-1, 2, 2)$$

رسم می‌شود به صورت زیر نوشته می‌شوند:

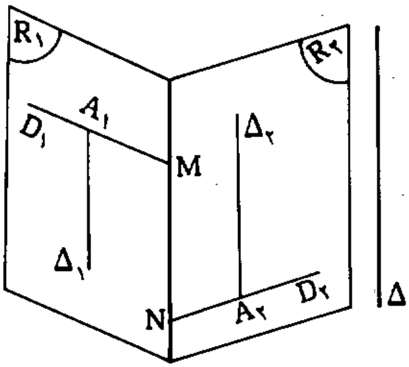
$$-x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

۲ــ عمود مشترك دوخط متنافر: خطی که بر دوخط متنافر D_1 و D_2 عمود باشد و این دوخط را قطع کند عمود مشترك این دوخط نامیده می‌شود. بنابراین، دز بین خطوط بی‌شماری که می‌توانند بر دوخط متنافر عمود باشند، تنها خطی که با هردو متقاطع می‌باشد عمود مشترك آنها است. برای این که بر شرط متقاطع بودن عمود مشترك با دوخط متنافر تأکید شده باشد، معمولاً آن را به صورت یك پاره‌خط که دوسر آن بر روی دوخط متنافر قرار دارد، نشان می‌دهند. این پاره‌خط، کوتاه‌ترین فاصله بین دوخط متنافر است، یعنی طول آن از طول هر پاره‌خط دیگر که بر دوخط متنافر متکی باشد کوچکتر است.

۳ــ طریقه تعیین عمود مشترك دوخط متنافر و معادله‌های آن: پس از آن که راستای خطوط عمود بر دوخط متنافر را یافتیم، باید به‌حل مسأله زیر بپردازیم تا عمود مشترك دوخط متنافر به دست آید.

مسأله ــ سه‌خط D_1 و D_2 و Δ، که دو به دو نسبت به هم متنافر می‌باشند، معلومند. خطی رسم کنید که با Δ موازی بوده دوخط D_1 و D_2 را قطع کند.

حل . بر دوخط D_1 و D_2 به ترتیب دوصفحه R_1 و R_2 را چنان می‌گذرانیم که باخط Δ موازی باشند. بدین ترتیب که از نقطهٔ دلخواه A_1 واقع برخط D_1 و از نقطه اختیاری A_2 واقع برخط D_2 دوخط Δ_1 و Δ_2 را به موازات خط Δ رسم می‌کنیم. دوخط متقاطع D_1 و Δ_1 صفحه R_1 و دوخط D_2 و Δ_2 صفحه R_2 را تشکیل می‌دهند. فصل مشترك این دوصفحه، که با خط Δ موازی می‌باشد، و دوخط D_1 و D_2 را به ترتیب در نقاط M و N قطع می‌کند، جواب مسأله است. در حقیقت نقطه M محل تلاقی صفحه R_2 و خط D_1 و نقطه N محل برخورد صفحه R_1 و خط D_2 است.



مثال ۱ ـ مطلوب است تعیین معادله‌های خطی که با راستای

$$\vec{w}(1, -1, -1)$$

موازی بوده دوخط D_1 و D_2 با معادله‌های زیر را قطع کند.

$$D_1: \; x - 5 = \frac{y+2}{2} = -z - 1$$

$$D_2: \; \frac{x-1}{2} = y + 1 = z$$

حل . ازنقطه دلخواه $A_1(5, -2, -1)$ واقع برخط D_1 خط Δ_1 را هم راستا با بردار $\vec{w}$ مرور می‌دهیم. دوخط متقاطع D_1 و Δ_1 صفحه R_1 را تشکیل می‌دهند که بردار نرمال آن حاصل‌ضرب برونی دو بردار هادی این دوخط، یعنی:

$$\vec{w}(1, -1, -1) \quad \text{و} \quad \vec{v}_1(1, 2, -1)$$

است:

$\vec{v}_1 \wedge \vec{w} = \vec{u}_1(-3,0,-3)$ یا $\vec{w}_1(1,0,1)$

$$\begin{cases}\vec{w}_1(1,0,1)\\ A_1(5,-2,-1)\end{cases} \Longrightarrow R_1 : x+y-4=0$$

به همین ترتیب صفحه R_2 را چنان رسم می‌کنیم که شامل خط D_2 وخط Δ_2 هم‌راستا با بردار $\vec{w}$ باشد:

$$\begin{cases}\vec{v}_2 \wedge \vec{w} = \vec{u}_2(0,3,-3) \text{ یا } \vec{w}_2(0,1,-1)\\ A_2(1,-1,0)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow R_2 : y-z+1=0$$

خط مطلوب، فصل مشترك دوصفحهٔ R_1 و R_2 با معادله‌های زیر است:

$$\begin{cases}x+z-4=0\\ y-z+1=0\end{cases}$$

که معادله کانونیك آن به صورت زیر می‌باشد:

$$4-x=y+1=z$$

اگر خواسته باشیم قطعه‌ای از این خط را که به دوخط متنافر متکی می‌باشد، مشخص کنیم، کافی است مختصات نقاط تلاقی خط D_2 باصفحه R_1 وخط D_1 با صفحهٔ R_2 را به دست آوریم:

$$D_2 : \begin{cases}x=2t+1\\ y=t-1\\ z=t\end{cases} \quad \text{و} \quad R_1 : x+z-4=0$$

$$2t+1+t-4=0 \Longrightarrow t=1 \Longrightarrow$$

$$M(3\,,\,0\,,\,1)$$

$$D_1 : \begin{cases}x=k+5\\ y=2k-2\\ z=-k-1\end{cases} \quad \text{و} \quad R_2 : y-z+1=0$$

$$2k-2+k+1+1=0 \Longrightarrow k=0 \Longrightarrow$$

$$N(5\,,\,-2\,,\,-1)$$

وجواب مسأله قطعه‌خط MN است.

مثال ۲ - معادله‌های عمود مشترك دوخط متنافر D_1 و D_2 را با معادله‌های زیر پیدا کنید:

$$D_1 : x-5=\frac{y+2}{2}=-z-1$$

$$D_2 : \frac{x-1}{2}=y+1=z$$

حل . ازآن جاکه در مثال ۱ ، بردار

$$\vec{w}(1\,,\,-1\,,\,-1)$$

راستای خطوط عمود بر دو خط D_1 و D_2 و قطعه خط MN هم‌راستا با بردار $\vec{w}$ و متقاطع با دوخط مفروض است، این قطعه خط همان عمود مشترك دوخط متنافر D_1 و D_2 می‌باشد و معادلهٔ MN معادلهٔ عمود مشترك خطوط D_1 و D_2 است.

۴- تعیین عمود مشترك دوخط متنافر به طریقه دیگر: در این طریقه، عمود مشترك دوخط متنافر D_1 و D_2 با عملیات زیر به دست می‌آید:

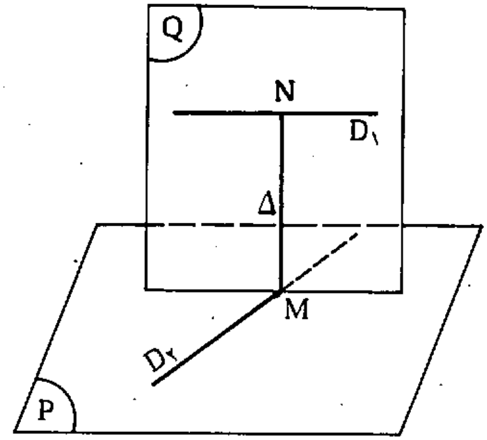
الف - برخط D_2 صفحه P را بـه موازات خط D_1 می‌گذرانیم.

ب - صفحه Q را به نحوی رسم می‌کنیم که شامل خط D_1 بوده وبرصفحه P عمودباشد. این‌صفحه، صفحهٔ مصورخط D_1 برروی‌صفحه P است وفصل مشترك آن با صفحه P تصویر خط D_1 می‌باشد، که دراین‌جا باخودخط D_1 موازی است.

ج- نقطه‌تلاقی‌خط D_2 وصفحه Q رابه دست‌آورده M می‌نامیم.

د - ازنقطه M ، خط Δ رابرصفحهٔ P عمود می‌کنیم. این‌خط درصفحهٔ Q واقع‌می‌شود وباخط D_1 متقاطع‌است.

ه ـ نقطه‌تلاقی دوخط Δ و $D_۱$ را به دست می‌آوریم و آن‌را N می‌نامیم. پاره‌خط MN عمود مشترک مطلوب است.



مثال . معادله‌های عمود مشترک دو خط متنافر زیر را به طریقه دوم پیداکنید:

$$D_۱:\ x-۵=\frac{y+۲}{۲}=-z-۱$$

$$D_۲:\ \frac{x-۱}{۲}=y+۱=z$$

حل . مسأله‌را به ترتیب فوق‌حل می‌کنیم:

الف ـ تعیین معادله‌صفحه P که شامل‌خط $D_۲$ وموازی باخط $D_۱$ است:

بردارهای هادی دو خط $D_۲$ و $D_۱$:

$$\vec{v}_۱(۱,۲,-۱) \text{ و } \vec{v}_۲(۲,۱,۱)$$

امتداد بردار نرمال صفحهٔ P:

$$\vec{v}_۱ \wedge \vec{v}_۲ = \vec{w}_۱(۳,-۳,-۳)$$

یـا

$$\vec{w}(۱,-۱,-۱)$$

نقطه‌ای از خط $D_۲$ و ازآنجا نقطه‌ای ازصفحه P:

$$A(۱,-۱,۰)$$

معادلهٔ صفحهٔ P:

$$۱(x-۱)-۱(y+۱)-۱(z-۰)=۰$$

$$P:\ x-y-z-۲=۰$$

ب ـ تعیین معادلهٔ صفحه Q کـه شامل خط $D_۱$ وعمود برصفحه P است:

$\vec{v}_۱(۱,۲,-۱)$ بردار هادی خط $D_۱$

$\vec{w}(۱,-۱,-۱)$ بردار نرمال صفحه P

$$\vec{v}_۱ \wedge \vec{w} = \vec{u}_۱(-۳,۰,-۳)$$

یـا

$\vec{w}_۱(۱,۰,۱)$ بردار نرمال صفحه Q

نقطه‌ای ازخط $D_۱$ و درنتیجه نقطه‌ای ازصفحهٔ Q :

$$B(۵,-۲,-۱)$$

$$۱(x-۵)+۰(y+۲)+۱(z+۱)=۰$$

$$Q:\ x+z-۴=۰$$

ج ـ تعیین مختصات نقطه برخورد خط $D_۲$ وصفحه Q:

$$D_۲:\ \begin{cases} x=۲t+۱ \\ y=t-۱ \\ z=t \end{cases} \quad Q:\ x+z-۴=۰$$

$$۲t+۱+t-۴=۰ \implies t=۱ \implies$$

$$M(۳,۰,۱)$$

د ـ معادله‌های‌خط Δ که ازنقطهٔ $M(۳,۰,۱)$ برصفحهٔ P عمود می‌شود:

بردار نرمال‌صفحه P و بردار هادی‌خط Δ :

$$\vec{w}(۱,-۱,-۱)$$

$$\Delta:\ x-۳=-y=-z+۱$$

ه ـ مختصات نقطه‌تلاقی دوخط D_1 و Δ:

$$D_1:\begin{cases}x=k+5\\ y=2k-2\\ z=-k-1\end{cases}\qquad \Delta:\begin{cases}x=k'+3\\ y=-k'\\ z=-k'+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}k+5=k'+3\\ 2k-2=-k'\\ -k-1=-k'+1\end{cases}$$

از حل دستگاه بالا جواب متوافق $k=0$ و $k'=2$ واز آن‌جا $N(5,-2,-1)$ بـه دست می‌آید و پاره خط MN عمود مشترك‌دوخط متنافر D_1 وD_2 است. معادلهٔ MN به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$MN(-2,2,2) \text{ و } M(3,0,1)$$

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}$$

$$MN:\ 3-x=y=z-1$$

۵ـ کو تاه‌ترین فاصله بین دوخط متنافر: چنانچه‌قبلاً گفته شد، طول پاره‌خط‌عمود مشترك، کوتاه‌ترین فاصله بین‌دوخط متنافر است. برای دو خط متنافر D_1وD_2 ، بامعادله‌های‌مفروضشان، این‌فاصله برابراست با:

$$MN=\sqrt{(5-3)^2+(-2-0)^2+(-1-1)^2}$$
$$=2\sqrt{3}$$

چنانچه‌فقط محاسبهٔ‌کو تاه‌ترین فـاصله بین دوخط متنافر منظور باشد، کافی‌است بریکی‌از دوخط‌صفحه‌ای‌به موازات‌خط دیگرمرور داده فاصله یك نقطه دلخواه از خط اخیررا تا این صفحه به دست‌آورد. در مثال‌بالا، صفحه P برخط D_2 گذشته وباخط D_1 موازی‌است. بنابراین، اگرنقطهٔ دلخواه‌ازخط D_1 را $A(5,-2,-1)$ اختیارکنیم،کوتاه‌ترین‌فاصله‌بین‌دوخط متنافر D_1 و D_2 ، فاصله‌نقطهٔ A ازصفحه P می‌شود:

$$P:\ x-y-z-2=0 \quad \text{و} \quad A(5,-2,-1)$$

$$d=MN=\frac{|5-(-2)-(-1)-2|}{\sqrt{1+1+1}}=2\sqrt{3}$$

۶ـ تعیین‌عمود مشترك‌دوخط متنافرعمود برهم: درحالت خاصی که دوخط متنافر برهم عمودهستند، چون برهرخطمی‌توان صفحه‌ای‌گذراندکـه برخط دیگر عمود باشد، فصل مشترك دو صفحه‌ای‌که‌بدین‌طریق‌رسم می‌شوند عمود مشترك‌مطلوب‌خواهد بود.

مثال ۱ - عمود مشترك دوخط D_1 و D_2 رابامعادله‌های زیر پیداکنید:

$$D_1:\ \frac{x-1}{2}=-y-1=z$$

$$D_2:\ \frac{x}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{-z-2}{2}$$

حل - بردارهای هادی این دوخط عبارتنداز:

$$\vec{v_1}(2,-1,1)\ ,\ \vec{v_2}(3,4,-2)$$

چون

$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=2\times3-1\times4+1(-2)=0$$

دوخط برهم عمودند.

ازنقطهٔ $A_1(1,-1,0)$ واقع‌برخط D_1، صفحهٔ P را برخط D_2 عمود می‌کنیم (خط D_1 برصفحه P منطبق‌می‌شود):

$\vec{v_2}(3,4,-2)$ بردار نرمال صفحه P

$A_1(1,-1,0)$ نقطه‌ای از صفحه P

$$3(x-1)+4(y+1)-2(z-0)=0$$

$$P:\ 3x+4y-2z+1=0$$

ازنقطهٔ $A_2(0,1,-2)$ واقع‌برخط D_2، صفحه Q را برخط D_1 عمود می‌کنیم (خط D_2 برصفحه Q منطبق می‌شود):

$$\vec{v_1}(2,-1,1) \quad \text{و} \quad A_2(0,1,-2)$$

$$2(x-0)-1(y-1)+1(z+2)=0$$

$$Q:\ 2x-y+z+3=0$$

خط Δ به معادله‌های زیر، عمود مشترك مطلوب است.

$$\Delta:\begin{cases}3x+4y-2z+1=0\\ 2x-y+z+3=0\end{cases}$$

تمرین: در مثال ۱، اولاً ــ معادله‌هـای کانونیك عمود مشترك را به دست آورید. ثانیاً ــ عمود مشترك را به صورت یك پاره‌خط نشان‌دهید و کوتاه‌ترین فاصله‌بین دوخط D_1 و D_2 را تعیین کنید.

مثال ۲ ـ عمود مشترك‌محور ox وخط D به معادله‌های زیر را پیدا کنید:

$$D:\begin{cases}x=1\\ \dfrac{y-3}{2}=z+1\end{cases}$$

حل ـ بردار هادی خط D، بردار

$$\vec{v}(0\,,\,2\,,\,1)$$

است، پس‌خط D برمحور ox عموداست. صفحه‌ای‌که برخط D می گذرد و برمحور ox عمود می‌شود این محور را درنقطهٔ

$$M(1\,,\,0\,,\,0)$$

که نقطه‌ای‌از عمود مشترك‌است قطع می کند. نقطه دیگر عمود مشترك‌راکه برخط D واقع است، می‌توانیم به طریقه‌های زیر تعیین کنیم:

اولاً ــ برمحور ox صفحه‌ای می گذرانیم که برخط D عمودباشد. می‌توان بردارنرمال این‌صفحه را بردار

$$\vec{v}(0\,,\,2\,,\,1)$$

و نقطه‌ای از این‌صفحه راکه برمحور ox واقع است

$$O(0\,,\,0\,,\,0)$$

اختیار کرد، بنابراین:

$$0(x-0)+2(y-0)+1(z-0)=0$$

$$2y+z=0$$

نقطه تلاقی این‌صفحه بـاخط D نقطهٔ $N(1,1,-2)$ می‌شود. چرا؟

ثانیاً ــ برخط D نقطهٔ

$$N(1\,,\,2t+3\,,\,t-1)$$

را به طریقی‌تعیین می کنیم‌که MN بر D عمود باشد:

$$\overrightarrow{MN}(0\,,\,2t+3\,,\,t-1)\quad \text{و}\quad \vec{v}(0,2,1)$$

$$\overrightarrow{MN}\perp\vec{v}\implies \overrightarrow{MN}\cdot\vec{v}=0\implies$$

$$2(2t+3)+t-1=0$$

$$t=-1\implies N(1,1,-2)$$

ثالثاً ــ نقطهٔ N را چنان می‌یابیم‌که طول $MN=f(t)$ مینیمم باشد:

$$M(1,0,0)\ \text{و}\ N(1,2t+3,t-1)$$

$$MN=f(t)=\sqrt{(2t+3)^2+(t-1)^2}$$

$$=\sqrt{5t^2+10t+10}$$

$$f'(t)=\frac{10t+10}{2\sqrt{5t^2+10t+10}}$$

$$f'(t)=0\implies t=-1\implies N(0,1,-2)$$

تمرین: قطعه خط MN که درآن

$$M(1,0,0)\ \text{و}\ N(0,1,-2)$$

است عمود مشترك مطلوب می‌باشد. معادله‌های کانونیك آن را بنویسید.

مسائل زیر را حل کنید:

۱ ــ معادله‌های عمود مشترک دو خط D_1 و D_2 را با معادله‌های زیر تعیین کنید و کوتاه‌ترین فاصله بین آنها را به دست آورید.

$$D_1 : \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = -y-4 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} x-2 = \dfrac{y+1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

راهنمایی ــ دو خط برهم عمودند و عمود مشترک به موازات محور oz است.

۲ ــ معادله‌های عمود مشترک محور oz و خط D به معادله‌های زیر را پیدا کنید:

$$D : \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = -y-4 \\ z = 0 \end{cases}$$

راهنمایی ــ خط D بر صفحه xoy منطبق و مبدأ مختصات یک نقطه از عمود مشترک است.

۳ ــ خط D به معادله‌های زیر مفروض است:

$$D : \begin{cases} x = 2t+6 \\ y = 4t-2 \\ z = t\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

اولاً ــ مختصات نقطهٔ M تصویر نقطهٔ O (مبدأ مختصات) را بر روی خط D تعیین کنید.

ثانیاً ــ معادله‌های خط Δ را به طریقی بیابید که با محور ox زاویهٔ $60°$ تشکیل داده پاره‌خط OM عمود مشترک دو خط متنافر D و Δ باشد.

تفریح اندیشه ۲

جواب در صفحهٔ ۹۶

از یک محصول به دو صورت مایع و پودر استفاده می‌شود. در یک تحقیق، نتایج زیر به‌دست آمده است:

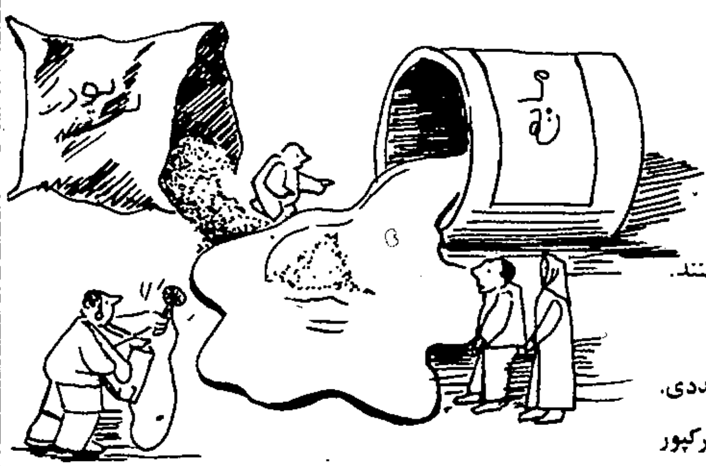
$\frac{1}{3}$ از همهٔ اشخاص مورد سؤال پودر مصرف نمی‌کنند.

$\frac{2}{7}$ از همهٔ اشخاص مورد سؤال مایع به کار نمی‌برند.

۴۲۷ نفر مایع و پودر را توأماً مورد استفاده قرار می‌دهند.

$\frac{1}{5}$ از مجموع سؤال شوندگان از این محصول استفاده نمی‌کنند.

در این تحقیق چند نفر مورد سؤال قرار گرفته‌اند؟



از کتاب بازیهای عددی.

ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

مرکزیاب دایره

این وسیله یک طرح ابتکاری است که می‌تواند براحتی مرکز دایره را پیدا کند. طرز ساخت و چگونگی کار این وسیله به شرح زیر می‌باشد:

بر طبق شکل پاره‌خط AB به‌اندازه دلخواه انتخاب می‌شود. سپس پاره‌خط CD که به اندازهٔ نصف AB است بر وسط آن یعنی نقطهٔ C عمود می‌شود. بدین ترتیب سه مثلث به‌دست می‌آید که هرسه قائم الزاویهٔ متساوی الساقین هستند. مثلثهای: ΔABD , ΔADC , ΔDCB

البته در ساخت وسیله پاره‌خطهای CD و AD و BD به‌صورت شیارهایی درمی‌آیند و پاره‌خطهای B′D′ ، A′B′ و A′D′ لبه‌های چوب یا مقوا و یا هر جنسی که وسیله از آن ساخته می‌شود، می‌باشند. در شکل یک بازوی متحرک (EF) بر روی وسیله مشاهده می‌شود. این بازوی متحرک به طریقی روی شیار CD وصل می‌شود که بتواند حرکت کند (درجهت بالا به پایین و به‌عکس). این بازو باید بر شیار CD به‌حالت دو خط عمود برهم قرار گیرد. این بازو در هر نقطه‌ای از شیار CD که قرار گیرد حالت خاصی ایجاد می‌کند.

به‌عنوان مثال درحالتی که در شکل دیده می‌شود: $OD = OM = ON$.

حال برای پیدا کردن مرکز دایره باید این وسیله را روی کاغذ گذاشته و طوری آن را جابه‌جا کنیم که نقطهٔ D (محل تقاطع سه شیار) و نیز جاهایی که بازوی متحرک دوشیار BD و AD را قطع می‌کند (در اینجا M و N) روی محیط قرار گیرند به این ترتیب چون قبلاً ذکر کردیم: $OD = OM = ON$، گویی سه شعاع دایره یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند، پس آن نقطه مرکز دایره است (نقطهٔ O). از بهترین جنسی که برای این وسیله می‌توان انتخاب کرد، جنس نقاله‌ها یا گونیاهای امروزی است.

طرح از: الهه تاجیک و مریم رفعتی. کلاس اول دبیرستان فرزانگان منطقهٔ ۱۴