○ ترجمه: غلامرضا یاسی پور

عدد e

e چون با تنها رقیبش یعنی π مقایسه شود، در انجمن ریاضی، تازه‌واردی بیش نیست. در حالی که π با عظمت‌تر است و تاریخی با شکوه‌تر دارد که به دوران بابلی‌ها باز می‌گردد، e وزن چندانی در زمینه‌های تاریخی ندارد. ثابت e، نوجوانی، سرزنده، چالاک و در حال بالیدن است و هرجا «رشد» مطرح باشد، همیشه حضور دارد. عامل رشد، چه در مورد جمعیت باشد و چه در مورد سرمایه و پول، و چه در مورد سایر کمیت‌های فیزیکی، بدون استثنا با عدد e سروکار دارد.

e عددی است که مقدار تقریبی‌اش ۲/۷۱۸۲۸ است. بنابراین، چرا این همه خاص است. زیرا این عدد، عددی نیست که به تصادف انتخاب شده باشد، بلکه یکی از بزرگ‌ترین ثابت‌های ریاضی است. این عدد، زمانی در اوایل قرن هفدهم ظاهر شد که چندین ریاضی‌دان، انرژی خود را صرف شفاف کردن مفهوم لگاریتم می‌کردند، یعنی اختراع درخشانی که تبدیل ضرب اعداد بزرگ به جمع را مجاز می‌کرد.

ماجرای e، در واقع با نوعی e- تجارت قرن هفدهمی آغاز می‌شود. ژاکوب برنولی[1] یکی از برنولی‌های سرشناس سوئیسی به‌شمار می‌رود. خانواده‌ای که تجارتشان، به‌دست دادن سلسله‌ای از ریاضی‌دان‌ها به دنیا بود. ژاکوب به سال ۱۶۸۳ با مسئله‌ی بهره‌ی مرکب[2] به کار پرداخت.

پول، پول، پول. فرض کنید سرمایه‌ای ۱ پوندی (موسوم به سرمایه‌ی «اولیه») را با دوره‌ای سالانه به مضاربه گذاشته‌ایم، با نرخ بسیار بالای ۱۰۰ درصد درآمد (ارزش افزوده‌ی به‌دست آمده) در نظر گرفته‌ایم. البته، به ندرت نرخ ۱۰۰ درصد را برای پولمان به‌دست می‌آوریم، اما این رقم، برای مقصودی که داریم مناسب است و می‌توانیم در مورد درآمدهای واقعی، از قبیل ۶ درصد و ۷ درصد نیز آن را به‌کار ببریم. به‌همین ترتیب، اگر سرمایه‌های اولیه‌ی بزرگ‌تری، از قبیل ۱۰۰۰۰ پوند داشته باشیم، می‌توانیم همه را در ۱۰۰۰۰ ضرب کنیم.

به این ترتیب، در پایان سال، با درآمدی ۱۰۰ درصد، سرمایه و مقدار درآمد به‌دست آمده را داریم که در این حالت، آن نیز ۱ پوند است. بنابراین، مبلغ سخاوت آمیز ۲ پوند را خواهیم داشت. اکنون فرض می‌کنیم، نرخ درآمد حاصله به ۵۰ درصد نصف شود. اما هر شش ماه یک‌بار، به‌طور جداگانه به‌کار رود. در این صورت، به ازای نیم سال اول، سودی برابر ۵۰ پنی به‌دست می‌آوریم و سرمایه‌ی اولیه‌مان در پایان نیم‌سال اول، به ۱/۵۰ پوند رشد کرده است. بنابراین، در پایان یک سال، این مبلغ به اضافه‌ی ۷۵ پنی سود آن را به دست خواهیم آورد. به این ترتیب، ۱ پوندمان در پایان سال اول به ۲/۲۵ پوند نموّ کرده است! با ترکیب سود هر نیم سال ۲۵ پنی دیگر به‌دست می‌آوریم. البته این مبلغ زیاد به نظر نمی‌رسد، اما در صورتی‌که برای سرمایه‌گذاری ۱۰۰۰۰ پوند داشتیم، به جای ۲۰۰۰۰ پوند ۲۲۵۰۰ پوند به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب، با سود مرکّب، هر نیم‌سال، ۲۵۰۰ پوند اضافی حاصل می‌کنیم.

اما در صورتی‌که بهره‌ی مرکب در هر نیم‌سال، به این معنی باشد که از مضاربه‌ی پس‌اندازمان سود می‌بریم، بانک نیز به همین ترتیب، از هر مبلغی که به آن بدهکاریم، بهره‌مند می‌شود. پس باید احتیاط کنیم! اکنون فرض می‌کنیم، سال را به چهار ربع تقسیم کرده باشیم و ۲۵ درصد در مورد هر ربع به‌کار رود. با انجام محاسبه‌ای مشابه، در می‌یابیم که یک پوندمان به ۲/۴۴۱۴۱ پوند رشد کرده است. به این ترتیب، پولمان در حال رشد کردن است و با ۱۰/۰۰۰ پوندمان، در

صورتی که بتوانیم سال را تقسیم کنیم و نرخ‌های سود ارزش افزوده‌ی با درصد کمتر را در مورد فاصله‌های زمانی کوچک‌تر به‌کار ببریم، کارمان سودمند به‌نظر می‌رسد.

اما آیا پولمان بی‌محدودیت افزایش می‌یابد و ما را میلیونر می‌کند؟ در صورتی که همان‌گونه که در جدول نشان داده ایم، سالمان را هم‌چنان به واحدهای کوچک‌تر و کوچک‌تر تقسیم کنیم، «فرایند حدّی» آورده شده، نشان می‌دهد که به نظر می‌رسد مبلغ مورد نظر به عددی ثابت متمرکز می‌شود. البته، تنها دوره‌ی مرکّب واقعی، دوره ی یک روزه است (و این همان کاری است که بانک‌ها انجام می‌دهند). به این ترتیب، پیام ریاضی در این مورد، این است که این حد، که ریاضی‌دان‌ها آن را e می‌نامند، مقداری است که یک پوند، در صورتی که سود مرکب به‌طور دائم در نظر گرفته شود، به آن رشد می‌کند.

امّا آیا این موضوع، خوب است یا بد؟ پاسخ را می‌دانید: اگر پس‌انداز کرده‌اید، «آری؛ و اگر وام گرفته‌اید، «خیر». پاسخ این پرسش به عـ آموزش[3] برمی‌گردد.

مجموع حاصل	ترکیب در هر ...
۲٫۰۰۰۰۰ پوند	سال
۲٫۲۵۰۰۰ پوند	نیم سال
۲٫۴۴۴۱ پوند	ربع سال
۲٫۶۱۳۰۴ پوند	ماه
۲٫۶۹۲۶۰ پوند	هفته
۲٫۷۱۴۵۷ پوند	روز
۲٫۷۱۸۱۳ پوند	ساعت
۲٫۷۱۸۲۸ پوند	دقیقه
۲٫۷۱۸۲۸ پوند	ثانیه

مقدار دقیق e. e نیز مانند π عددی گنگ است و بنابراین، چون در مورد π، مقدار دقیق آن را نمی‌دانیم، مقدار e تا ۲۰ رقم ده‌دهی برابر است با:

۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵۲۳۵۳۶...

تنها با استفاده از کسرها، بهترین تقریب به مقدار e، در صورتی که بالا و پایین کسر به اعداد دو رقمی محدود باشند، کسر $\frac{87}{32}$ است. شگفت‌آور است که هرگاه بالا و پایین کسر به اعداد سه‌رقمی محدود باشد، بهترین کسر $\frac{878}{323}$ است. کسر اخیر نوعی بسط مقلوب مستوی[4] کسر اول است. ریاضیات عادت دارد که این شگفتی‌های کوچک را ارائه دهد. یکی از

عامل رشد، چه در مورد جمعیت باشد و چه در مورد سرمایه و پول، و چه در مورد سایر کمیت‌های فیزیکی، بدون استثنا با عدد e سروکار دارد

بسط به سری‌های معروف e، توسط مورد زیر داده شده است:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2\times1} + \frac{1}{3\times2\times1} + \frac{1}{4\times3\times2\times1} + \frac{1}{5\times4\times3\times2\times1} + \cdots$$

در مورد این سری، نمادنویسی فاکتوریل[5] که از علامت تعجب استفاده می‌کند، سودمند است. در این نمادنویسی، برای نمونه، $1\times2\times3\times4\times5 = 5!$. با به‌کار بردن این نمادنویسی، e صورت آشناتر زیر را اختیار می‌کند:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

بنابراین، به تحقیق به‌نظر می‌رسد، عدد e الگویی دارد. در ویژگی‌های ریاضی‌اش نیز آشکار می‌شود که از π «متقارن»تر است.

در صورتی که مایل به یادآوردن چند رقم اولیه‌ی e باشید، می‌توانید جمله‌ای بسازید که در آن، تعداد حروف هر کلمه، یکی از ارقام اولیه‌ی بسط e را نشان دهد. و این کاری است که در مورد π نیز انجام دادیم.

این موضوع که e گنگ است (یعنی کسر نیست) در سال ۱۷۳۷، توسط **لئونهارد اویلر**[6] به اثبات رسید. به سال ۱۸۴۰، ژوزف **لیوویل**[7]، ریاضی‌دان فرانسوی، نشان داد که e جواب هیچ معادله‌ی درجه دومی نیست و به سال ۱۸۷۳، هم‌وطنش شارل هرمیت[8] در یکی از آثار راهگشایش، به اثبات رساند که e متعالی[9] است (یعنی نمی‌تواند جواب هیچ معادله‌ی جبری باشد). آن‌چه در این مورد اهمیت داشت، روشی بود که هرمیت به‌کار برده بود. نه سال بعد، فردیناند فون لیندمان[10] با اقتباس از روش هرمیت، ثابت کرد که π نیز متعالی است؛ موضوعی که از منظر بالاتری برخوردار بود.

البته، به یک پرسش پاسخ داده شد، اما پرسش‌های تازه‌ای ظاهر شدند. آیا e به توان e نیز متعالی است؟ این پرسش، پرسش غریبی است، زیرا چگونه ممکن است غیر از این باشد؟ با این همه، هنوز به محکمی به اثبات نرسیده و بنا به استانداردهای مؤکّد ریاضی، باید هم‌چنان به عنوان یک حدس رده‌بندی شود. ریاضی‌دان‌ها اندک‌اندک به سوی اثبات این موضوع رفته‌اند، اما تنها این را اثبات کرده‌اند که غیر ممکن است هم e و هم e به توان e^2، هر دو متعالی باشند؛ نزدیک، اما نه به‌قدر کافی نزدیک.

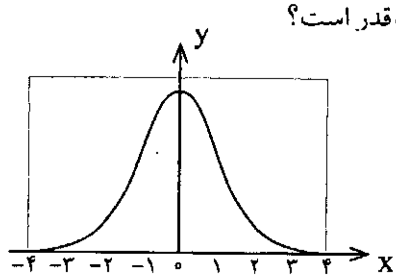
ارتباط های بین π و e نیز مسحورکننده است. مقادیر e^{π}

و π^e نزدیک به هم‌اند، اما به سادگی (بدون محاسبه‌ی مقادیرشان) نشان داده شده است که $e^{\pi} > \pi^e$. در این مورد، اگر تقلب کنید و به ماشین حسابتان نگاهی بیندازید، خواهید دید که این مقادیر تقریبی عبارت‌اند از: e^{π} = ۲۳/۱۴۰۶۹ و π^e = ۲۳/۴۵۹۱۶.

عدد e^{π} به عنوان ثابت **گلفاند**[11] (به‌نام الکساندر گلفاند[12] ریاضی‌دان روسی) شناخته می‌شود و ثابت شده که متعالی است. اما در مورد π^e مطالب بسیار کمتری می‌دانیم. گنگ بودن این عدد هنوز به اثبات نرسیده است؛ البته اگر گنگ باشد.

آیا e دارای اهمیت است؟ محل اصلی یافتگاه e، هنگام رشد و نموّ است. مثال‌های آن در مورد رشد اقتصادی و رشد جمعیت هستند. مرتبط با این بحث، خم‌های وابسته به e هستند که در مدل فروپاشی رادیواکتیو به کار رفته‌اند.

عدد e در مسائل نامرتبط با رشد نیز رخ می‌دهد. پی‌یر مونت‌مور[13] مسئله‌ای احتمالی را در قرن هجدهم تحقیق کرد که از آن زمان به بعد، به گونه‌ای وسیع بررسی شده است. این مسئله به صورت ساده، گروهی از اشخاص‌اند که به رستورانی می‌روند و پس از صرف ناهار، کلاه‌هایشان را به تصادف بر می‌دارند. احتمال این‌که هیچ یک از آن‌ها کلاه خودش را بر ندارد، چه‌قدر است؟



می‌توان نشان داد که این احتمال برابر $\frac{1}{e}$ (در حدود ۳۷ درصد) است. بنابراین، احتمال این‌که دست کم یکی از این اشخاص کلاه خودش را بردارد $1 - \frac{1}{e}$ (۶۳ درصد) است.

این کاربرد در نظریه‌ی احتمال[14] یکی از موارد بسیار به شمار می‌رود. توزیع پواسون[15] که با پیشامدهای نادر سروکار دارد، موردی دیگر است. این مثال‌ها نمونه‌های اولیه‌اند، اما به هیچ وجه، از مرحله پرت نیستند: جیمز استرلینگ[16] در مورد مقدار فاکتوریل $n!$ تقریبی قابل ملاحظه شامل e (و π) به‌دست آورد. در آمار، «خم ناقوسی»[17] و آشنای توزیع نرمال[18] شامل e است و در مهندسی، خم کابل پل معلّق، به e وابسته است. این فهرست بی‌پایان است.

یک اتحاد حیرت‌انگیز. جایزه‌ی قابل توجه‌ترین فرمول تمام ریاضیات، از آن e است. چون به اعداد مشهور ریاضیات بیندیشیم، به ۰، ۱، π، e و عدد موهومی[19] $i = \sqrt{-1}$ فکر می‌کنیم. اما چگونه می‌شود که $e^{i\pi} + 1 = 0$ باشد؟ اما هست! و این دستاورد از آن اویلر است.

شاید اهمیت حقیقی e در رمزی نهفته باشد که توسط آن، نسل‌های ریاضی‌دان‌ها را مجذوب خود کرده است. در هر حال، e اجتناب‌ناپذیر است. اما چرا نویسنده‌ای چون رایت[20] باید همّ خود را صرف نوشتن داستانی بدون (حرف) e کند. به احتمال قوی، وی نام مستعاری نیز داشته است. اما گدسبی[21] وی دقیقاً به همین کار پرداخته است. گرچه تصور این مطلب سخت است که ریاضی‌دانی به نوشتن کتابی بدون e دست زند، یا قادر به این کار باشد.

تاریخچه

۱۶۱۸ میلادی: جان نپر، در ارتباط با لگاریتم، با ثابت e مواجه شد.

۱۷۲۷ میلادی: اویلر نماد e را در ارتباط با نظریه‌ی لگاریتم‌ها به‌کار برد. این عدد گاهی عدد اویلر نامیده می‌شود.

۱۷۴۸ میلادی: اویلر e را تا ۲۳ رقم محاسبه کرد. وی اعتبار کشف فرمول مشهور $e^{i\pi} + 1 = 0$ را در حوالی این تاریخ به‌دست آورد.

۱۸۷۳ میلادی: هرمیت ثابت کرد e عددی متعالی است.

۲۰۰۷ میلادی: e تا مرتبه‌ی 10^{11} رقم محاسبه شد.

پی‌نوشت

1. Jacob Bernoulli
2. Compound interest
3. e-learning
4. palindromic
5. factorial notation
6. Leonhard Euler
7. Joseph Liouville
8. Charles Hermite
9. transcendental
10. Ferdinand von Lindemann
11. Gelfond's constant
12. Aleksandr Gelfond
13. Pierre Montmort
14. Probability theory
15. Poisson distribution
16. James Stirling
17. bell curve
18. normal distribution
19. imaginary number
20. E.V. Wright
21. Gadsby