ریاضیات آشوب

عباس عدالت

درطی سالهای اخیرموضوع «آشوب» دردستگاههای دینامیکی به‌یکی از مهمترین مسائل ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، و همچنین شاخه‌های‌مختلف علوم‌طبیعی تبدیل‌شده است. به‌طوری که این‌موضوع به‌صورت یکی از وسیعترین زمینه‌های تحقیقاتی زمان حاضر درآمده است. به طورکلی مقصود از یك‌دستگاه دینامیکی مجموعهٔ حالات ممکن یك پدیده است همراه با یك قانون تحول که گذر از یك حالت به‌حالت دیگر را توصیف می کند. اگر حالت دستگاه در زمان معینی داده شده باشد، این قانون حالتهای دستگاه در زمانهای بعدی را مشخص می کند.

چنانچه بتوان حالتهای گذشتهٔ دستگاه‌را نیز بدون‌ابهام ازقانون تحول استخراج کرد، دستگاه دینامیکی برگشت‌پذیر خوانده می‌شود. در این نوشته بحث ما به‌دستگاههای برگشت‌پذیر محدود خواهدبود. به‌زبان‌ساده می‌توان یك دستگاه دینامیکی‌آشوبناك را دستگاهی‌تعریف کرد که قانون‌بندی دینامیکی آن کاملاً تعیینی و بدون هرگونه عامل احتمالی بوده ولی رفتاردرازمدت سیستم در عمل غیرقابل پیش‌بینی است.

به بیان دقیقتر در این دستگاهها، عدم دقت هرچند کوچك در دانستن‌حالت اولیه (که به‌هرحال از نظرعملی غیرقابل اجتناب است) موجب بروز خطای فاحش در پیش‌بینی حالت دستگاه در درازمدت می گردد. در نتیجه، «آشوب» پدیده‌ای است که علی‌الظاهر با بینش نیوتنی ازقوانین طبیعی مغایراست، زیرا بنا به‌فیزیك کلاسیك چنانچه معادلهٔحرکت و وضعیت اولیهٔ دستگاهی را بدانیم می‌توانیم وضعیت آن‌را درهرزمان بعدی به‌دقت‌تعیین‌کنیم. به‌عنوان مثال هرگاه‌نیروهای وارد بر جسمی مشخص باشد، می‌توانیم از طریق فرمول $F=ma$ شتاب‌جسم و درنتیجه مکان و سرعت‌آن را در هر لحظه برحسب‌مکان و سرعت اولیهٔ آن به‌دست‌آوریم.

همان‌طور که می‌دانیم این بینش‌کلاسیك ازفیزیك در نیمهٔاول قرن بیستم باپیدایش نظریهٔ کوانتوم مردود اعلام شد، زیرابنا به‌اصل عدم قطعیت هایزنبرگ اصولاً امکان اندازه‌گیری دقیق مکان و سرعت یك جسم ذره‌ای درآن واحـد ممکن نیست و در نتیجه حتی وضعیت اولیهٔ آن را نمی‌توان به‌طور قطعی مشخص کرد.

شناخت و بررسی دستگاههای دینامیکی آشوبناك در سالهای اخیرموجب شده است که محدودیتهای بینش‌نیوتنی بعد جدیدی‌به‌خود بگیرد، چراکه دراین گونه دستگاهها هرگونه عدم قطعیت، دروضعیت اولیه، هر قدر ناچیز (که می‌تواند نتیجهٔ اصل هایزنبرگ، خطاهای آزمایشی، یا نارساییهای مدل ریاضی ما باشد) در دراز مدت ابعاد چنان گسترده‌ای به‌خودمی گیردکه وضعیت دستگاه راغیرقابل‌پیش‌بینی می کند.

بنابراین از بررسی پدیدهٔ «آشوب» این نتیجهٔ مهم به دست می‌آید که ملاك صحت نظریه‌ای در دستگاههای دینامیکی نمی‌تواند پیش‌بینی دقیق رفتارآن باشد بلکه بایدخواص احتمالی وهندسی‌ناشی ازآن نظریه مورد بررسی و ارزیابی قرارگیرد.

دراین‌مقاله خصوصیات اصلی نمونه‌ای ازیك دستگاه دینامیکی آشوبناك رابه‌طوراجمالی تشریح خواهیم‌کرد ولی قبل‌ازآن‌به‌بررسی چند نمونهٔ ساده از دستگاههای غیر آشوبناك می‌پردازیم و برخی مقولات لازم را از این طریق تعریف می کنیم.

چند نمونه از دستگاههای غیرآشوبناك

مثالهایی که دراینجا مطرح می کنیم، همه دستگاههای دینامیکی تعریف شده‌توسط‌یك‌معادله یایك‌دستگاه معادلات‌دیفرانسیل‌هستند.دستگاههایی که تحول آنها به طور پیوسته در زمان صورت می گیرد، معمولاً از یك دستگاه‌معادلات دیفرانسیل‌عادی تبعیت‌می کنند. این‌بدین معنی‌است که هرگاه حالت دستگاه در زمان معینی مشخص باشد، تحول‌آینده (و گذشتهٔ)دستگاه بادنبال کردن‌آن جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل که از حالت اولیه می گذرد، مشخص می‌شود.

مثال ۱. معادلهٔدیفرانسیل‌خطی درجهٔاول همگن زیررادرنظرمی گیریم

$$dx/dt=f(x)=-\lambda x,\quad x\in\mathbf{R},\quad \lambda>0$$

در اینجا، $\mathbf{R}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی قلمرو x، را فضای‌حالات دستگاه دینامیکی می‌نامیم. هرگاه‌درلحظهٔ $t=0$ داشته باشیم $x=x_0$ آنگاه‌داریم $x(t)=x_0e^{-\lambda t}$. رابطهٔ اخیررا همچنین به‌صورت زیر می‌نویسیم

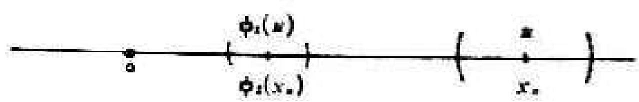
$$\phi_t(x_0)=x(t)=x_0e^{-\lambda t}.$$

به عبارت دیگر، $\phi_t(x_0)$ مقدار x را در زمان t مشخص می کند اگر مقدارآن درلحظهٔ $t=0$ برابر x_0 باشد. برای‌آنکه معادلهٔ دیفرانسیل فوق را به‌شکل کیفی و هنـدسی تعبیر کنیم، $f(x)=-\lambda x$ را یك میدان برداری در $\mathbf{R}$ در نظر می گیریم. شکل ۱ را که از رسم این میدان‌برداری به‌دست‌می آید نمودارحالات دستگاه دینامیکی می‌نامیم. چند نکته را در اینجا متذکر می‌شویم.

شکل ۱

۱. هر جواب معادلهٔ $\phi_t(x_0)=x_0e^{-\lambda t}$، صرف‌نظر از شرایط اولیه (یعنی مقدار x_0)، به‌صفر میل می‌کند. صفر را ربایندهٔ دستگاه دینامیکی فوق و $\mathbf{R}$ را پهنهٔ ربایش آن می‌نامیم. به‌طور کلی نقطه‌ای از فضای حالات را ربایندهٔ دستگاه می‌نامیم اگر این نقطه کلیهٔ نقاط یک همسایگی خود را جذب کند و به‌مجموعهٔ کلیهٔ نقاطی که درهمسایگی رباینده به‌آن جذب می‌شوند، پهنهٔ ربایش آن می‌گوییم.
البته مقصود از جذب کردن نقطهٔ p این است که جواب معادلهٔ دیفرانسیل گذرا از p در زمان مثبت به‌رباینده میل می‌کند.

۲. به‌سادگی ازشکل ۲ می‌بینیم که اگرعدم قطعیتی در وضعیت اولیهٔ وجود داشته باشد، به عبارت دیگر اگر $x(0)$ نه برابر x_0 بلکه در یک همسایگی uی نقطهٔ x_0 قرار داشته باشد، آنگاه با گذشت زمان این عدم قطعیت‌کاهش می‌یابد؛ یا به‌عبارت دیگر طول $\phi_t(u)$ برای $t>0$ کمتر از طول u است ودر واقع طول $\phi_t(u)$ وقتی $t\to\infty$ به‌صفر میل می‌کند.



شکل ۲

۳. هرگاه میدان برداری فوق را اندکی به طور هموار تغییر دهیم یعنی دستگاه

$$dx/dt=f(x)=-\lambda x+O(x),\quad \lambda>0$$

را در نظر بگیریم که در آن مقصود از $O(x)$ یک تابع احتمالی است که سریعتر از x به صفر میل می کند وقتی $x\to 0$، می‌توان نشان داد که کیفیت جوابهای معادله در یک همسایگی نقطهٔ صفر تغییری نخواهد کرد و در یک همسایگی صفر کلیهٔ نقاط همچنان به‌صفرمیل خواهندکرد. می گوییم دستگاه‌اولیه درنقطهٔ صفردارای ثبات‌ساختاری است یارباینده‌دستگاه دارای ثبات ساختاری‌است.

۴. اگر $\lambda=0$، کلیهٔ نقاط ثابت خواهند بود یعنی به ازای هر x_0 و t در $\mathbf{R}$ داریم $\phi_t(x_0)=x_0$ و اگر $\lambda<0$ آنگاه‌نمودار حالت مطابق شکل ۳ است و نقاط از صفر دور می‌شوند. در این‌حالت نقطهٔ صفر را یک نقطهٔ دافع می‌نامیم.

شکل ۳

مثال ۲.

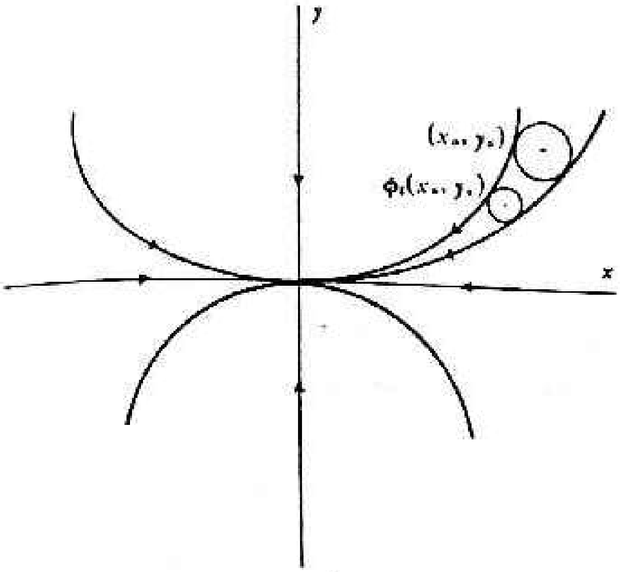
$$dx/dt=-\lambda x\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

$$dy/dt=-\mu y\quad \mu>\lambda>0$$

در اینجا فضای حالات $\mathbf{R}^2$ است و داریم

$$\phi_t(x_0,y_0)=(x_0e^{-\lambda t},\ y_0e^{-\lambda t})$$

نمودار حالات مطابق شکل ۴ است.



شکل ۴

به‌نکات ذیل توجه کنید:

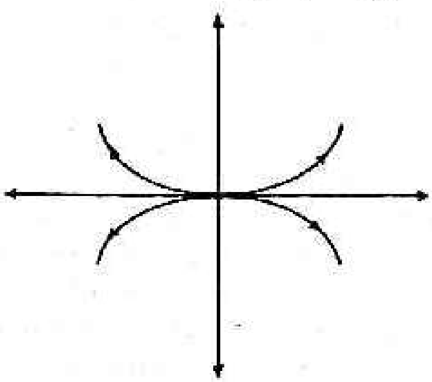
۱. مبدأ مختصات صفر، ربایندهٔ دستگاه است با پهنهٔ ربایش $\mathbf{R}^2$.

۲. هر گونه‌عدم قطعیت دروضعیت اولیه باگذشت زمان‌کاهش‌می‌یابد؛ به‌عبارت دیگراگر u یک همسایگی (x_0,y_0) در $\mathbf{R}^2$ باشد، برای $t>0$،

$$\text{اندازهٔ}\ (u) > \text{اندازهٔ}\ \phi_t(u)$$

۳. سیستم در نقطهٔ صفر دارای ثبات ساختاری است.

۴. اگر $\mu>\lambda>0$، منحنیهای جواب از صفر دور می‌شوند و صفر یک نقطهٔ دافع است (شکل ۵).



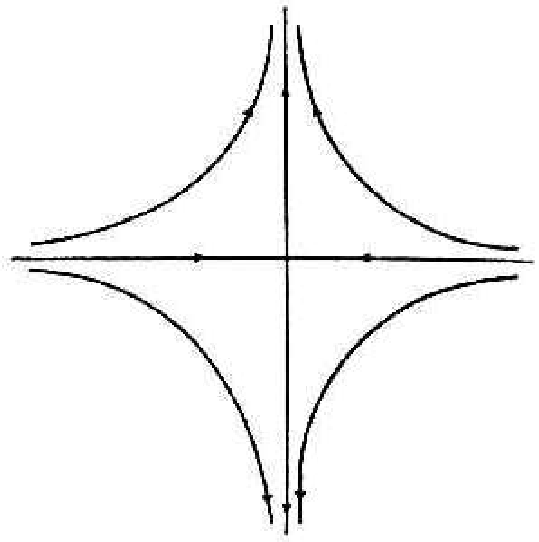
شکل ۵

مثال ۳.

$$dx/dt=-\lambda x\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

$$dy/dt=\mu y\quad \lambda,\mu>0$$

نمودار حالات مطابق شکل ۶ است.
محورهای x و y پایا هستند. نقاط روی محور x به‌صفر نزدیک ونقاط روی محور y ازصفر دور می‌شوند. نقطهٔ صفر را دراینجا یک نقطهٔ زینی می‌نامند. مانند دومثال قبلی، تغییرات جزئی‌هموار درمیدان برداری، کیفیت جوابها را در همسایگی صفر تغییرنخواهد داد. محور x را، یعنی‌مجموعهٔ نقاطی را که وقتی $t\to\infty$ به‌صفرمیل می‌کنند،



شکل ۶

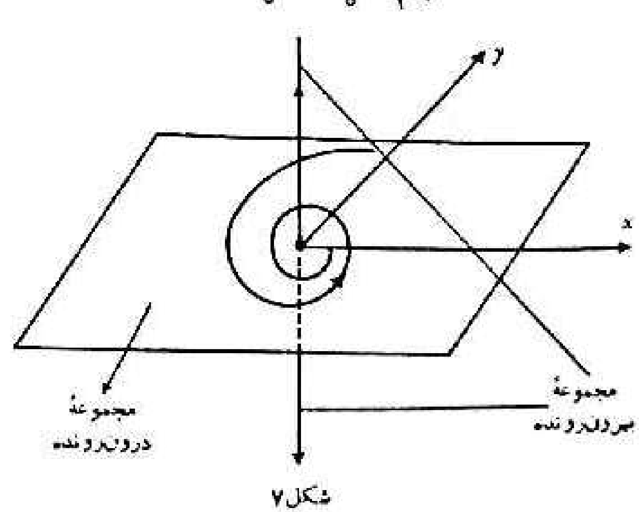
مجموعهٔ درون رونده و محور y را، یعنی مجموعهٔ نقاطی را که وقتی $t\to-\infty$ به صفر میل می‌کنند، مجموعهٔ بیرون‌روندهٔ نقطهٔ صفر می‌نامیم. توجه کنید که در اینجا مجموعهٔ درون رونده و بیرون رونده هر کدام یک‌بعدی است درحالی که در مثالهای ۱ و ۲ مجموعه‌های درون‌رونده به‌ترتیب ۱ بعدی و ۲ بعدی و مجموعه‌های بیرون‌رونده تهی بودند.

توضیح: در سه مثال فوق کیفیت جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل را در نزدیکی یک نقطهٔ ثابت بررسی کردیم. به‌طور کلی اگر یک میدان برداری در $\mathbf{R}^n$ داشته باشیم که صفر نقطهٔ ثابت آن باشد یعنی اگر

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x})=T\mathbf{x}+\text{جملات مراتب بالاتر}$$

که در اینجا $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{f}$ یک میدان برداری در $\mathbf{R}^n$ و T بخش خطی $\mathbf{f}$ است و اگر مقادیر ویژهٔ T همگی دارای بخش حقیقی غیر صفر باشند، آنگاه نقطهٔ صفر دارای یک‌مجموعهٔ درون‌روندهٔ lبعدی و یک مجموعهٔ بیرون روندهٔ $n-l$ بعدی است که در اینجا l تعداد مقادیر ویژهٔ T با بخش حقیقی منفی است. به عنوان مثال، اگر داشته باشیم

$$T=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



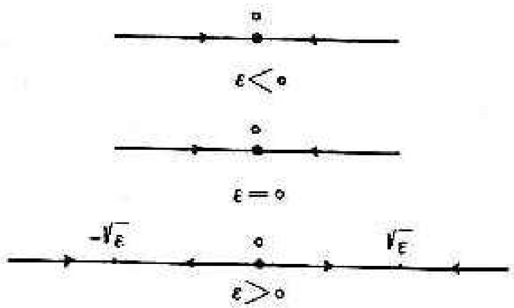
شکل ۷

آنگاه مقادیر ویژهٔ T عبارت‌اند از ۱ و $-1\pm i$. در اینجا صفر دارای مجموعهٔ درون‌روندهٔ دوبعدی و مجموعهٔ بیرون‌روندهٔ یک‌بعدی خواهد بود. نمودار حالات دستگاه در نزدیکی نقطهٔ صفر از لحاظ توپولوژیکی مطابق شکل ۷ است.

مثال ۴.

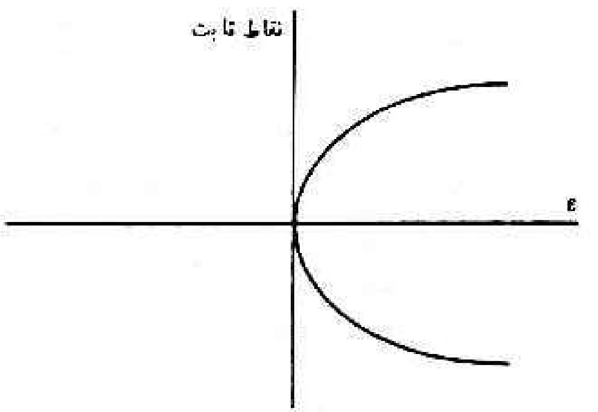
$$\frac{dx}{dt}=-x(x^2-\varepsilon),\qquad x\in\mathbf{R}$$

که ε یک پارامتر حقیقی است. در اینجا نمونه‌ای از یک انشعاب در یک دستگاه پارامتری دینامیکی داریم. نمودار حالات دستگاه برای مقادیر منفی، صفر و مثبت ε مطابق شکل ۸ است.



شکل ۸

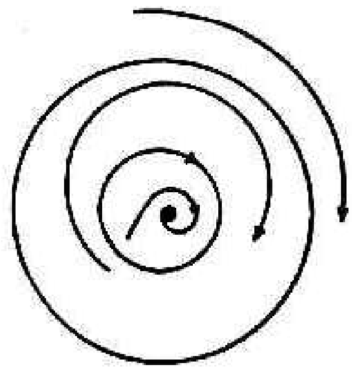
مشاهده می‌کنیم که وقتی ε از صفر می‌گذرد نمودار حالات دستگاه به‌طور کیفی تغییر می‌کند. برای $\varepsilon\leqslant 0$ سیستم دارای یک‌ربایندهٔ با پهنهٔ ربایش $\mathbf{R}$ است درحالی که برای $\varepsilon>0$ سه نقطهٔ ثابت وجود دارند: صفر که یک دافع است، $\sqrt{\varepsilon}$ که رباینده با پهنهٔ ربایش $\mathbf{R}^+$ است و $-\sqrt{\varepsilon}$ که رباینده با پهنهٔ ربایش $\mathbf{R}^-$ (اعداد حقیقی منفی) است. نقطهٔ صفر پهنهٔ ربایش دو ربایندهٔ موجود را از یکدیگر جدا می‌کند و از این نظر به صفر می‌گوییم یک جداساز. اگر نقاط ثابت دستگاه پارامتری را در برابر محور ε رسم نماییم شکل ۹ به دست می‌آید که شبیه یک چنگال است. از این نظر به این انشعاب (و انشعاباتی که کیفیتاً به‌طور موضعی مانند این مثال‌اند) می‌گوییم انشعاب چنگالی.



شکل ۹

مثال ۵. دستگاه دینامیکی زیر را که درمختصات قطبی بیان شده است در نظر بگیرید

$$\frac{dr}{dt}=-r(r-1)(r-2)\qquad \frac{d\theta}{dt}=1$$



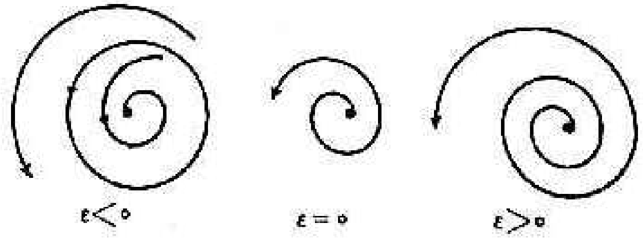
شکل ۱۰

در اینجا $r=0$، یعنی مبدأ مختصات یک رباینده است و دوایر $r=1$ و $r=2$ هر دو جوابهای دستگاه‌اند. به‌سادگی می‌توانیم ملاحظه کنیم که $r=2$ یک مدار بسته است که کلیهٔ مدارهای ناحیهٔ $r>1$ را جذب خود می‌کند. در اینجا $r=2$ نمونه‌ای از یک ربایندهٔ غیر نقطه‌ای است که آن را یک **دور حدی** می‌نامیم. پهنهٔ ربایش آن نیز $r>1$ است. از طرف دیگر $r=1$ یک مدار بستهٔ دافع است و کلیهٔ مدارها در $r<1$ و $r>1$ از آن دور می‌شوند (شکل ۱۰).

مثال ۶. در مختصات قطبی

$$\frac{dr}{dt}=r(\varepsilon+r^2)\qquad \frac{d\theta}{dt}=1$$

و ε یک پارامتر حقیقی است. در اینجا نیز انشعابی داریم که به انشعاب هوپف[1] معروف است. برای $\varepsilon<0$، $r=\sqrt{-\varepsilon}$ یک مدار بستهٔ دافع است و $r=0$ یک ربایندهٔ نقطه‌ای. وقتی ε به‌صفر می‌رسد مدار دافع در ربایندهٔ نقطه‌ای ادغام می‌شود. به طوری که برای $\varepsilon\geqslant 0$ صفر یک نقطهٔ دافع می‌شود (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

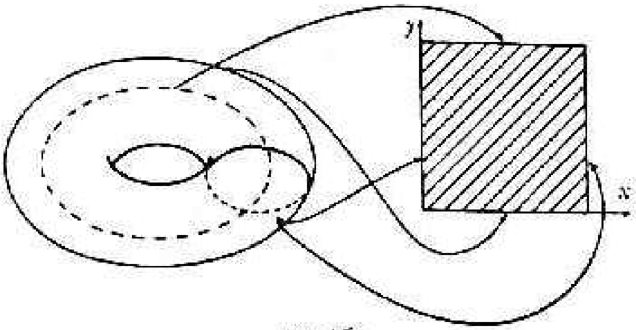
اگر در دستگاه فوق زمان را معکوس کنیم یعنی میدان برداری

$$\frac{dr}{dt}=-r(\varepsilon+r^2)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-1$$

را در نظر بگیریم آنگاه برای $\varepsilon>0$ به‌جای یک مدار بستهٔ دافع یک دور حدی رباینده داریم.

از آنچه گذشت نتیجه می‌گیریم که مهمترین مسأله در بررسی کیفی معادلات دیفرانسیل تعیین رباینده های معادله است زیرا مدارهایی که در قلمرو رباینده‌ها قرار دارند با گذشت زمان به‌سرعت به رباینده نزدیک می‌شوند و عملاً از ربایندهٔ موردنظر قابل تشخیص نخواهند بود. در واقع از لحاظ فیزیکی تنها رباینده‌های یک دستگاه می‌باشند که قابل مشاهده هستند. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا به جز رباینده‌های نقطه و دور حدی که در مثالهای گذشته دیدیم رباینده‌هایی از نوع دیگر وجود دارند یا نه؟ در اینجا منظور ما رباینده‌ای است که قابل تجزیه به رباینده‌های نقطه‌ای و دور حدی نباشد. درواقع نوع دیگری از رباینده از دیرباز شناخته شده است که ربایندهٔ شبه تناوبی نامیده می‌شود و نمونه‌ای از آن در «شار غیر گویا» روی چنبره مشاهده می‌شود. طبق شکل ۱۲، چنبرهٔ دو بعدی را مربعی تصور کنید که اضلاع روبرویش دو به‌دو یکی انگاشته شده باشند.



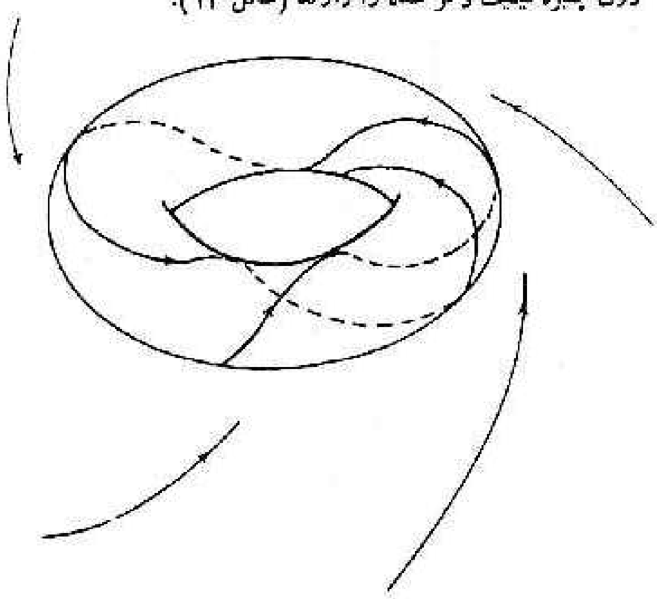
شکل ۱۲

حال میدان برداری

$$\frac{dx}{dt}=w_1$$

$$\frac{dy}{dt}=w_2$$

را روی مربع درنظر بگیرید به‌طوری که w_1/w_2 یک عدد گنگ باشد. با اندکی تأمل روشن می‌شود که مدار هر نقطه روی چنبره چگال خواهد بود. حال به‌راحتی می‌توان یک میدان برداری در R^3 تصور کرد که مدارهای آن همگی به‌سوی یک چنبره جذب می‌شوند و مدارهای روی چنبره کیفیت ذکر شده را دارند (شکل ۱۳).



شکل ۱۳

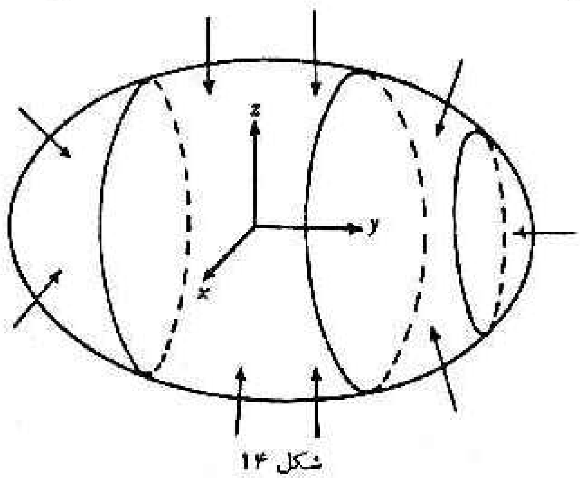
1. Hopf

ربایندهٔ غریب لورنتس

تا اوایل دههٔ ۱۹۶۰ تصور می‌شد که هر ربایندهٔ قابل تجزیه به یکی از سه ربایندهای است که تا کنون دیده‌ایم. در این زمان ریاضیدان آمریکایی اسمیل[1] اولین نمونه از یک «ربایندهٔ غریب» را ارائه کرد که در آن، ربایندهٔ دستگاه شکل پیچیده‌ای داشت و رفتار جوابهای دستگاه نیز در داخل و اطراف رباینده وضعیتی درهم و از نظر عملی غیر قابل پیش‌بینی داشت. با این حال این مثال هنوز در قلمرو نظریهٔ ریاضی بود و تصور نمی‌شد که در دستگاههای تابع قوانین فیزیک کلاسیک بتوان چنین پدیده‌ای را مشاهده کرد. ولی در ۱۹۶۳، یک ریاضیدان و جوشناس آمریکایی به نام لورنتس[2] مقاله‌ای منتشر کرد که در آن برای اولین بار ربایندهای از نوع جدید در مسائل طبیعی مطرح می‌شد. او که درجستجوی یک‌مدل ریاضی برای توضیح تلاطم جوی در هواشناسی بود، معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر گرفت

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=-\sigma(x-y)\\ \frac{dy}{dt}&=Rx-y-xz \quad \text{یا} \quad \frac{dr}{dt}=V(r)\\ \frac{dz}{dt}&=xy-bz\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

که دراینجا $(x, y, z)\in\mathbf{R}^3$ و R، b، و σ پارامترهای حقیقی هستند. لورنتس مقادیر $\sigma=10$ و $b=8/3$ را بررسی کرد و نشان داد که به‌ازای‌جمیع مقادیرمثبت R، یک‌ناحیهٔ‌همبند ساده، M، که در بر گیرندهٔ مبدأ مختصات است در $\mathbf{R}^3$ وجود دارد به‌طوری که میدان برداری (*) درکلیهٔ نقاط مرزی‌آن به‌طرف داخل است (شکل ۱۴).



شکل ۱۴

از اینجانتیجه می‌شودکه M باید‌حاوی رباینده (یا ربایندهای‌مختلف) باشد. درواقع $A=\bigcap_{t>0}\phi_t(M)$ رباینده (یا ربایندهای) موردنظر است. ازطرف‌دیگرديورژانس میدان برداری(*) منفی است. به‌راحتی می‌توان نشان داد که حجم هر قطعه از فضای حالات با گذشت زمان کاهش می‌یابد. و درواقع حجم قطعه به‌صفر میل می‌کند (در اصطلاح ریاضی، وضعیت حدی این قطعه یک مجموعهٔ اندازهٔ صفر است).

حال برای تعیین رباینده (یا ربایندهای) موجود در M مقدار پارامتر R را از $R=0$ تا $R=28$ افزایش می‌دهیم وکیفیت و تغییرات نمودارحالات دستگاه را دراین طیف ازمقادیر R (که مورد بررسی لورنتس قرار گرفت) به‌طور اجمالی تشریح می‌کنیم.

ابتدا نقاط ثابت میدان را پیدا می‌کنیم. روشن است که $x=y=z=0$ یعنی مبدأ مختصات همواره یک نقطهٔ ثابت است. از معادلات(*) به‌راحتی می‌توانیم بخش خطی میدان برداری را در نقطهٔ O به‌دست آوریم

$$T=\begin{pmatrix}-\sigma&\sigma&0\\R&-1&0\\0&0&-b\end{pmatrix}$$

در نتیجه مقادیر ویژهٔ T عبارت‌اند از $-b$ و ریشه‌های معادلهٔ

$$\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+(1-R)\sigma=0.$$

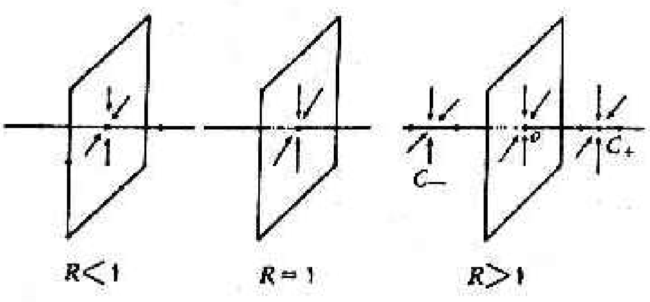
وقتی $R<1$، دو مقدار ویژهٔ دیگر هر دو منفی‌اند و در نتیجه O یک رباینده است درحالی‌که وقتی $R>1$، یکی از آنها مثبت و دیگری منفی است؛ یعنی O یک نقطهٔ زینی با مجموعهٔ درون روندهٔ دوبعدی و مجموعهٔ بیرون‌روندهٔ یک‌بعدی است (توجه کنید که مقادیر $\sigma=10$ و $b=8/3$ هر دو ثابت و مثبت می‌باشند).

از طرف دیگر میدان برداری (*) به‌ازای $R>1$ در دو نقطهٔ دیگر نیز صفر می‌شود که مختصاتشان عبارت‌اند از

$$\begin{cases} z=R-1\\ x=y=\pm\sqrt{b(R-1)}\end{cases}$$

این دونقطه را $C_\pm$ می‌نامیم. با بررسی بخش خطی میدان برداری در این دو نقطه می‌توان نشان داد که برای مقادیر Rی که کمی بزرگتر از ۱ باشند، بخش خطی میدان در هر دو نقطه دارای سه مقدار ویژهٔ منفی می‌باشند و لذا هر دو رباینده هستند.

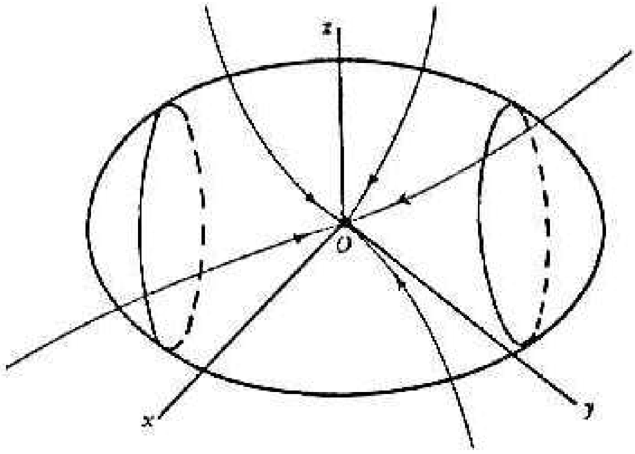
توجه کنید که وقتی $R\to1^+$، $C_\pm\to0$ یعنی در $R=1$ دو نقطه ربایندهٔ $C_\pm$ از O زاییده می‌شوند. در واقع در $R=1$ انشعابی در نقطهٔ O صورت می‌گیرد که روی یک منحنی، که از O می‌گذرد و امتداد مماسش درآن نقطه درجهتی است که دو نقطهٔ ثابت جدید $C_\pm$ از O زاییده می‌شوند، از نوع انشعاب چنگالی در مثال ۴ است. این منحنی را خمینهٔ مرکزی می‌نامند. درصفحهٔ قاطع براین منحنی انقباض صورت می‌گیرد (شکل ۱۵).



شکل ۱۵

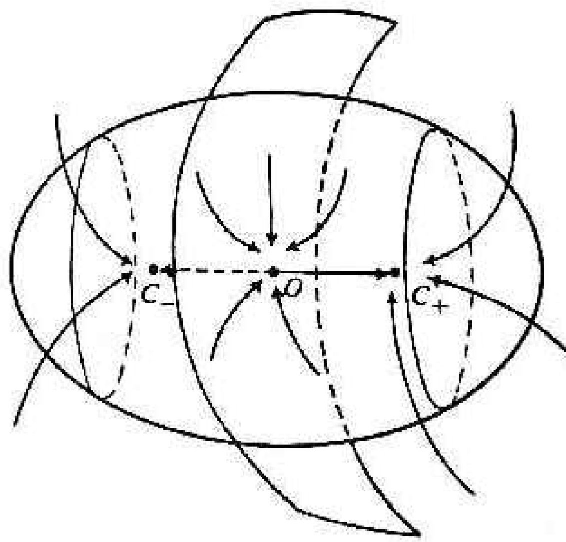
حال که انشعاب موضعی در $R=1$ را بررسی کردیم، نمودار حالات دستگاه را برای $R<1$ و R کمی بزرگتر از ۱ تشریح می‌کنیم. برای $R<1$، میدان برداری تنها یک نقطهٔ ثابت رباینده در O دارد که کلیهٔ مدارهایی را که وارد M می‌شوند جذب می‌کند (شکل ۱۶).

1. S.Smale   2. E. N. Lorenz



شکل ۱۶

برای مقادیر R کمی بزرگتر از ۱، دو نقطهٔ رباینده $C_\pm$ داریم و یك نقطهٔ ثابت زینی در O که دارای مجموعهٔ درون روندهٔ دوبعدی و مجموعهٔ بیرون روندهٔ یك بعدی است. دراینجا مجموعهٔ دوبعدی درون روندهٔ O، M را به دوناحیهٔ پایای M_+ که حاوی C_+ است و M_- که حاوی C_- است تقسیم می کند. کلیهٔ مدارهایی که در M_+ هستند جذب C_+ و کلیهٔ مدارهای M_- جذب C_- می‌شوند. درواقع مجموعهٔ درون روندهٔ O که برای مقادیر R کمی بزرگتر از یك تقریباً یك صفحهٔ دوبعدی نسبتاً صاف است، جدا کنندهٔ قلمرو ربایندگی C_+ و C_- می‌باشد (شکل ۱۷).



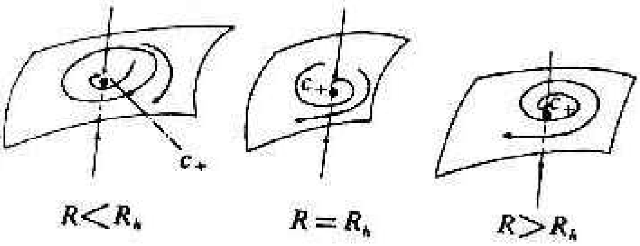
شکل ۱۷

وقتی مقدار R را از $R=1$ به‌بالا افزایش دهیم نقاط $C_\pm$ بیشتر و بیشتر از O فاصله می گیرند ومجموعهٔ درون‌روندهٔ O به طور فزاینده خمیدگی پیدا می کند تااینکه در $R \approx ۱۳٫۹۲$ مجموعهٔ درون روندهٔ O به مجموعهٔ بیرون روندهٔ O اصابت می کند (در واقع مجموعهٔ بیرون رونده در مجموعهٔ درون رونده قرار می گیرد).

دراینجا انشعاب پیچیده‌ای صورت می گیرد، که برخلاف انشعاباتی که تا به‌حال دیده‌ایم یك انشعاب موضعی نیست که درهمسایگی یك نقطه انجام گیرد بلکه انشعابی سرتاسری است.

بررسی این دوانشعاب خارج ازحیطهٔ این مقاله است. تنها به‌ذکر این نکته اکتفا می کنیم که نمودار حالات دستگاه بلافاصله پس از این دوانشعاب هنوز دارای دو ربایندهٔ C_+ و C_- است و مجموعهٔ درون روندهٔ O کماکان جدا کنندهٔ قلمرو ربایندگی C_+ و C_- است ولی به‌دلیل دو انشعاب اخیر، این مجموعهٔ درون رونده به‌طرز غامضی در مجاورت C_+ و C_- به هم می‌پیچد به‌طوری که مثلاً مداری که در M_+ قراردارد می‌تواند چندین‌بار در نزدیکی C_- به‌دور آن بپیچد تا سرانجام به C_+ میل کند.

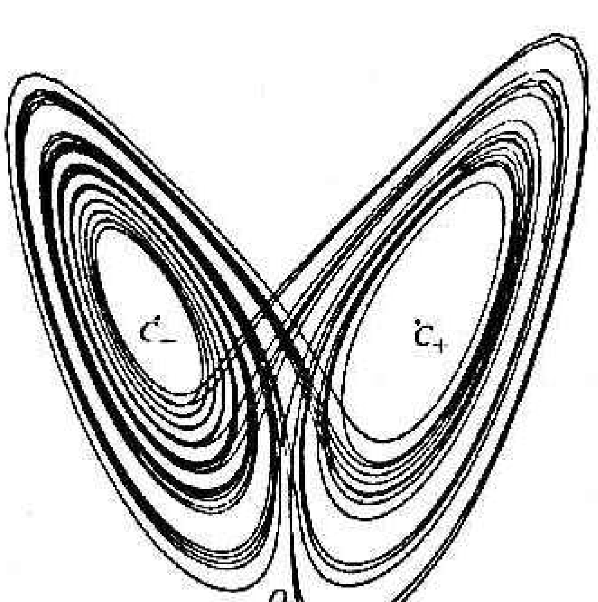
وقتی R بازهم افزایش یابد، در $R = R_h \approx ۲۴٫۷۴$ درهریك از نقاط ثابت C_+ و C_- یك انشعاب هوپف ازنوع موجود درمثال ۶ صورت می گیرد. به‌عبارت دیگر درهریك‌ازنقاط ثابت C_+ و C_- روی یك خمینهٔ دوبعدی (خمینهٔ مرکزی) انشعابی از نوع هوپف صورت می گیرد ودرامتداد قاطع براین خمینهٔ دوبعدی درنقطهٔ ثابت موردنظر انقباض انجام می‌پذیرد (شکل ۱۸).



شکل ۱۸

درنتیجه برای R کمی بزرگتراز R_h، C_+ و C_- نقاط ثابت زینی هستند که هریك‌دارای مجموعهٔ درون‌روندهٔ یك بعدی ومجموعهٔ بیرون روندهٔ دوبعدی می باشند.

اما قبلاً گفتیم که M باید حاوی ربایندهٔ‌ای باشد. سؤالی که هم اکنون مطرح است این است که در شرایطی که هیچیك از نقاط O و C_+ و C_- برای R کمی بزرگتر از R_h رباینده نیستند چگونه ربایندهٔ‌ای در M وجود دارد؟ لورنتس با استفاده از روشهای تقریب عددی و شبیه‌سازی به‌کمك کامپیوتر نشان داد که کلیهٔ مدارها در M جذب مجموعهٔ پیچیده‌ای می‌شوند که غیرقابل تجزیه است ونمودار تقریبی آن را می‌توان درشکل ۱۹ مشاهده کرد.



شکل ۱۹

ربایندهٔ لورنتس مطابق شکل فوق به‌صورت یك رویهٔ دولایه است که هریك از لایه‌هایش حفره‌ای در وسط دارد. این دو حفره یکی نقطهٔ ثابت C_+ و دیگری C_- را در بر گرفته است. در نتیجه، ربایندهٔ لورنتس ربایندهٔ «غریبی» است که مانند هیچیك از سه‌نوع ربایندهای که قبلاً دیدیم نمی‌باشد.

اگر به‌کمك کامپیوتر مسیر یك مدار دلخواه در M را بررسی کنیم خواهیم دید که مدار مزبور به‌سرعت به‌ربایندهٔ لورنتس نزدیك‌می‌شود ومسیری کاملاً غیرقابل پیش‌بینی دارد به‌طوری که فی‌المثل چندین بار روی شاخهٔ C_+ به دوراین نقطهٔ ثابت می‌چرخد سپس تغییرمسیر داده به‌روی شاخهٔ C_- می‌رود وبه تعدادی ظاهراً نامشخص دور C_- می‌زندبعددوباره‌به شاخهٔ C_+ می‌برد واین‌کار الی‌الابد ادامه‌می‌یابد.

چگونه می‌توانیم این رفتاررا تبیین کنیم؟! ابتدا متذکرمی‌شویم که مجموعهٔ یك بعدی بیرون روندهٔ O مرز ربابنده را تشکیل می‌دهد (شکل ۱۹). ازطرف‌دیگرهریك ازلایه‌های ظاهری ربابنده حول C_+ و C_- نزدیك به مجموعهٔ بیرون روندهٔ این نقاط است. در نتیجه هر گاه یك مداردلخواه در M درنزدیکی شاخهٔ C_+ قرار بگیرد تحت تأثیرمجموعهٔ بیرون روندهٔ C_+ چندبار دور C_+ می‌چرخد به‌طوری که هر بارفاصله‌اش از C_+ بیشترمی‌شود تا جایی که بالاخره‌در آخرین دورخود به‌قدری از C_+ دورمی‌شود که ازحوزهٔ نفوذ مجموعهٔ بیرون روندهٔ آن خارج می‌شودوتحت‌تأثیرمداری که از O دور C_- می‌چرخد (که نیمی‌ازمجموعهٔ بیرون روندهٔ O را تشکیل می‌دهد) قرارمی‌گیرد ونتیجتاً به‌سمت C_- سوقداده می‌شود. سپس تحت‌تأثیرمجموعهٔ درون روندهٔ C_- به‌شاخهٔ C_- نزدیك می‌شود و اینك چندین‌بار دور C_- می‌چرخد وهمان روندی را درچرخش به‌دورآن طی می‌کند که قبلاً در C_+ انجام داده بود. بنابراین مدار مزبور مرتباً پس از تعدادی چرخش دریکی ازشاخه‌ها به شاخهٔ دیگر می‌برد (شکل ۱۹).

حال اگر دو نقطهٔ بسیار نزدیك‌در M رادرنظر بگیریم ومسیرمدارهای این دونقطه را مقایسه‌کنیم خواهیم دید که برای مدتی این دومداردر نزدیکی یکدیگر قراردارند وباهم به‌دوریك شاخه چرخیده وباهم از یك شاخه به‌شاخهٔ دیگر می‌پرند ولی چون هنگام چرخش به‌دور یك شاخه فاصلهٔ این دومدارتحت تأثیر مجموعهٔ بیرون روندهٔ C_+ یا C_- به‌تدریج افزایش‌می‌یابد بالاخره زمانی می‌رسد که مسیردومدار ازهم جدا شده یکی از آنها همچنان به دور شاخهٔ قبلی خود می‌چرخد در حالی که دیگری ازآن شاخه به‌شاخهٔ دیگر تغییر مسیر می‌دهد.

نکتهٔمهم اینجاست که هرچندفاصلهٔاولیهٔ دومدارجزئی باشد،بالاخره باگذشت زمان مسیرها ازهم جدا می‌شوند. درنتیجه اگر کوچکترین ابهامی دروضعیت اولیه‌موجود باشد، رفتار درازمدت دستگاه غیرقابل پیش‌بینی می‌شود. در واقع هرگاه یك قطعه‌ای هرچند کوچك از فضای حالات را درنظربگیریم این قطعه پس ازمدتی چرخش به دور شاخه‌ها ناگهان به‌طورغیرمنتظره به دو تکه که هر یك به‌دور یکی از شاخه‌ها می‌چرخد تجزیه می‌شودوسپس هر کدام ازتکه‌ها پس ازمدتی دوباره دچارتجزیه‌می‌گردداین روند دائماً ادامه می‌یابد به‌طوری که پس ازمدتی تکهٔ اولیه به تعداد بسیارزیاد تجزیه شده به‌طور کمابیش یکنواخت درکل ربابنده پخش خواهدشد. ازلحاظ فیزیکی این بدان معنی است که خطای موجود دروضعیت اولیه هرچند هم که ناچیز باشد باگذشت زمان وضعیت دستگاه با احتمال برابرمی‌تواند درهریك از نقاط ربایندهٔ غریب باشد!

مطلب دیگری که‌شایان‌توجه است این‌است که‌هرگاه مقدار R را کمی تغییر دهیم، انشعابات پیچیده‌ای در دستگاه صورت می‌گیرد و اگرچه ساختارکلی ربایندهٔ غریب تغییری نمی‌نماید ولی توپولوژی مدارهای ربابنده عوض می‌شود. به‌عبارت دیگر ربایندهٔ لورنتس دارای ثبات ساختاری به معنی مرسوم کلمه نیست هرچند که برای یك طیف از مقادیر R رفتارهای کلی مشابهی دردستگاه به‌چشم می‌خورد. این‌مطلب بیش‌ازهرچیز نارسایی مقولهٔ ثبات ساختاری را دربررسی‌ربابنده‌های غریب‌نشان‌می‌دهد. درواقع علی‌رغم تحقیقات پردامنه برای ربابنده‌های غریب در معادلات دیفرانسیل و همچنین در دستگاههای گسسته هنوز چارچوب نظری مناسبی برای شناخت و بررسی ربابنده‌های غریب وجود نداردوتلاش دراین‌جهت بی‌شك یکی‌ازثمربخش‌ترین زمینه‌های فعالیت ریاضیات در سالهای آینده خواهد بود.

منابع

1. Abraham R., & Shaw C., *Dynamics: The Geometry of Behavior*, Aerial Press, Santa Cruz, CA, 1982.
2. Devaney R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1986.
3. Guckenheimer J.,& Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vectorfields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
4. Hao Bao-Lin, *Chaos*, World Scientific, Singapore, 1984.
5. Ruelle D., "Strange attractors",. *Math. Intelligencer*, 2 (1980) 126-137.
6. Ruelle D., "Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence", *Bull. Am. Math. Soc*, 5 (1981) 29-42.
7. Smale S., *The Mathematics of Time*, Springer-Verlag, New York, 1980.
8. Sparrow C., *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New York, 1982.