



میر شهرام صدر

www.sadr@iransciland.com

عبارت های جبری گویا و اعمال بر روی آن ها

حل:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}; x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \text{ یا } x+1=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-1$$

$$\Rightarrow D=R - \{-1, +1\}$$

(الف)

(ب)

$$\frac{2x^2+1}{x^2+3x-4}; x^2+3x-4=0 \Rightarrow (x-1)(x+4)=0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \text{ یا } (x+4)=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-4$$

$$\Rightarrow D=R - \{-4, 1\}$$

$$\frac{5}{x^2+x}; x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=-1 \Rightarrow D=R - \{-1, 0\}$$

(ج)

$$\frac{x^2+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}; x(x+1)(x^2-4)=0$$

$$\Rightarrow x(x+1)(x-2)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x+1=0 \text{ یا } x-2=0 \text{ یا } x+2=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=-1 \text{ یا } x=2 \text{ یا } x=-2$$

$$\Rightarrow D=R - \{-2, -1, 0, 2\}$$

(د)

کسرهایی که غالباً صورت و مخرج آن ها چند جمله ای است، عبارت های جبری گویا می نامیم. برای مثال عبارت هایی به صورت $\frac{2x^2+x-1}{x+2}$ و $\frac{1}{x-1}$ و $\frac{x^2-7}{x}$ را عبارت های جبری گویا هستند.

دامنه عبارت های جبری گویا

دامنه عبارت های گویا برابر با مجموعه اعداد حقیقی به غیر از ریشه های مخرج^۱ (در صورت وجود) است، یعنی مقادیری از x که به ازای آن ها مخرج کسر صفر می شود، از مجموعه اعداد حقیقی R حذف می کنیم.

{ریشه های مخرج} $D=R-$ (دامنه عبارت گویا)

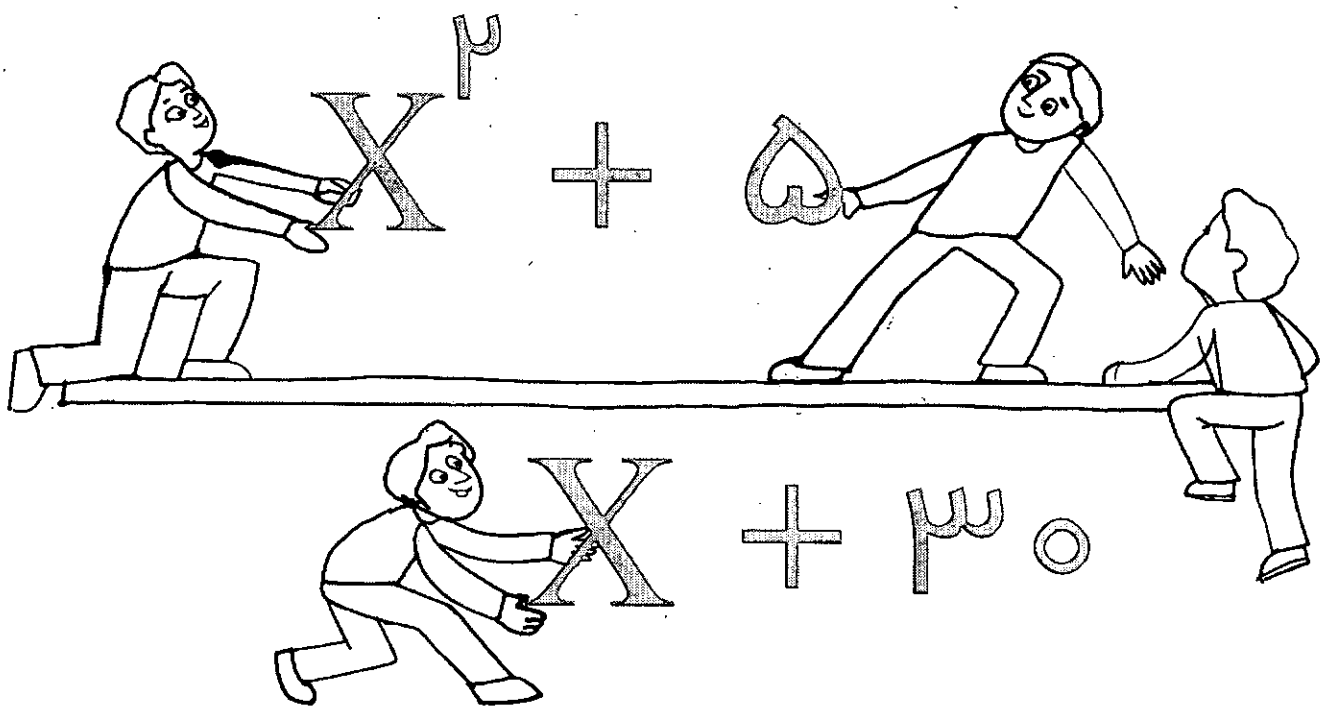
مثال: دامنه عبارت های گویای زیر را تعیین کنید.

$$\frac{2x^2+1}{x^2+3x-4} \text{ (ب)}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} \text{ (الف)}$$

$$\frac{x^2+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)} \text{ (د)}$$

$$\frac{5}{x^2+x} \text{ (ج)}$$



ساده کردن عبارات های جبری گویا

برای این منظور، ابتدا صورت و مخرج کسر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می کنیم، سپس عوامل مشترک را از صورت و مخرج حذف کرده، تا عبارت ساده شده به دست آید.

مثال: عبارات های جبری گویای زیر را ساده کنید.

$$\frac{3x^2y + 6xy^2}{x^2 - 4y^2} = \frac{3xy(x+2y)}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{3xy}{x-2y} \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{21a^2bc^2}{21abcd} = \frac{3ac^2}{4d} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{42a^2 - 30a^2m}{35am^2 - 25m^2a} = \frac{6a^2(v-5m)}{5am^2(v-5m)} = \frac{6a^2}{5m^2} \quad \text{(ج)}$$

$$\frac{3\delta + 5x + 7y + xy}{\delta + y} = \frac{(3\delta + 7y) + (5x + xy)}{(\delta + y)} \quad \text{(د)}$$

$$= \frac{v(\delta + y) + x(\delta + y)}{(\delta + y)} = \frac{(\delta + y)(v + x)}{(\delta + y)} = v + x$$

جمع و تفریق عبارات های جبری گویا

قبل از این که قاعده کلی جمع و تفریق عبارات های گویا را بیان کنیم، ابتدا روش محاسبه مخرج مشترک بین دو یا چند کسر را بیان می کنیم.
مخرج مشترک بین دو یا چند کسر همان کوچکترین مضرب مشترک بین مخرج های آن ها است.

مثال: مخرج مشترک حاصل جمع های زیر را پیدا کنید؟

$$\frac{4}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \quad \text{(الف)}$$

حل:

$$A = x^2 + x = x(x+1) \quad \text{مخرج کسر اول}$$

$$B = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) \quad \text{مخرج کسر دوم}$$

$$M = x(x+1)(x+2) \quad \text{مخرج مشترک (ک.م.م.)}$$

یادآوری: برای محاسبه ک.م.م بین چند عبارت گویا، ابتدا هر یک از آن ها را تجزیه می کنیم، سپس حاصل ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگتر در عوامل غیرمشترک برابر با ک.م.م است.

$$\frac{2x+3}{x^2-1} + \frac{3}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-1} \quad \text{(ب)}$$

مخرج کسر دوم = $y^2 - 16 = (y-4)(y+4)$

\Rightarrow مخرج مشترک = $(y-2)(y+4)(y-4)$

کسرهای معادل $\left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{y^2+6y+8} = \frac{y}{(y+2)(y+4)} = \frac{y(y-2)}{(y+2)(y+4)(y-2)} \\ \frac{y-2}{y-2} = \frac{y-2}{(y-2)(y+2)} \\ \frac{y^2-16}{y^2-16} = \frac{(y-4)(y+4)}{(y+2)(y-4)(y+4)} \end{array} \right.$

$$B = \frac{y(y-2)}{(y+2)(y+4)(y-2)} - \frac{(y-2)(y+2)}{(y+2)(y-4)(y+4)}$$

$$= \frac{y(y-2) - (y-2)(y+2)}{(y-2)(y-4)(y+4)}$$

$$= \frac{y^2 - 2y - y^2 + y + 6}{(y-2)(y-4)(y+4)} = \frac{-3(y-2)}{(y-2)(y-4)(y+4)}$$

$$= \frac{-3}{(y-4)(y+4)}$$

(ج)

$$C = \frac{ay^2 + b}{2y-1} + \frac{2by + 2ay^2}{1-4y^2} - \frac{ay^2 - b}{2y+1}$$

حل:

مخرج کسر اول = $2y-1$

مخرج کسر دوم = $1-4y^2 = (1-2y)(1+2y) = -(2y-1)(1+2y)$

مخرج کسر سوم = $2y+1$

مخرج مشترک = $-(2y-1)(1+2y)$

کسرهای معادل $\left\{ \begin{array}{l} \frac{ay^2 + b}{2y-1} = \frac{(ay^2 + b)[-(1+2y)]}{-(2y-1)(1+2y)} = \frac{-ay^2 - 2ay^2 - b - 2by}{-(2y-1)(1+2y)} \\ \frac{2by + 2ay^2}{1-4y^2} = \frac{2by + 2ay^2}{-(2y-1)(1+2y)} \\ \frac{ay^2 - b}{2y+1} = \frac{(ay^2 - b)}{-(2y-1)(1+2y)} = \frac{+ay^2 - b - 2ay^2 + 2by}{-(2y-1)(1+2y)} \end{array} \right.$

$$C = \frac{-ay^2 - 2ay^2 - b - 2by}{-(2y-1)(1+2y)} + \frac{2by + 2ay^2}{-(2y-1)(1+2y)}$$

$$= \frac{ay^2 - b - 2ay^2 + 2by}{-(2y-1)(1+2y)}$$

$$= \frac{-ay^2 - 2ay^2 - b - 2by + 2by + 2ay^2 - ay^2 + b + 2ay^2 - 2by}{-(2y-1)(1+2y)}$$

حل: مخرج کسر اول $A = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

مخرج کسر دوم $B = x^2 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$

مخرج کسر سوم $C = x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + x^2 + 1)$

مخرج مشترک $M = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)(x^2 + x^2 + 1)$ (ک.م.م)

برای جمع و تفریق عبارات های گویا، مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

1. صورت و مخرج هر کسر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرده و در صورت امکان ساده می کنیم.
2. مخرج مشترک یا همان کوچکترین مضرب مشترک بین مخرج ها را به دست می آوریم.

3. به جای هریک از کسرها، عبارات های گویای معادل را که مخرج آن ها، همان کوچک ترین مضرب مشترک است، قرار می دهیم.

4. عبارات های گویای هم مخرج را با هم جمع و تفریق می کنیم و حاصل را در صورت امکان ساده می کنیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

(الف) $A = \frac{y}{mn} + \frac{2}{mn^2}$

حل:

$\left. \begin{array}{l} \text{مخرج کسر اول } mn \\ \text{مخرج کسر دوم } mn^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مخرج مشترک } mn^2$

کسرهای معادل $\left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{mn} = \frac{yn}{mn^2} \\ \frac{2}{mn^2} \end{array} \right. \Rightarrow A = \frac{yn}{mn^2} + \frac{2}{mn^2} = \frac{yn+2}{mn^2}$

(ب) $B = \frac{y}{y^2+2y-8} - \frac{y+2}{y^2-16}$

حل:

مخرج کسر اول = $y^2 + 2y - 8 = (y-2)(y+4)$

$$= \frac{(x-5)(3x+1)}{(3x-1)(3x+1)} \times \frac{1}{(x-1)(x-5)}$$

$$= \frac{(x-5)}{(3x-1)} \times \frac{1}{(x-1)(x-5)}$$

$$= \frac{(x-5)}{(3x-1)(x-1)(x-5)} = \frac{1}{(3x-1)(x-1)}$$

(ج)

$$\frac{x^2 - 8x}{x^2 - 4x - 5} \times \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x^2 - 2x}$$

$$= \frac{x(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-5)(x+1)} \times \frac{(x+1)(x+1)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-5)(x+1)} \times \frac{(x+1)}{x(x-2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x-5}$$

(د)

$$A = \left(\frac{2x}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} \right) \left(2x - \frac{6x+1}{2x+3} \right)$$

$$A = \left(\frac{2x(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{(2x-1)(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} \right) \left(\frac{2x(2x+3)}{(2x+3)} - \frac{6x+1}{(2x+3)} \right)$$

$$= \frac{6x^2 + 2x - 6x^2 + 5x - 1}{(2x-1)(2x+1)} \times \frac{4x^2 + 6x - 6x - 1}{(2x+3)}$$

$$= \frac{8x-1}{(2x-1)(2x+1)} \times \frac{4x^2-1}{(2x+3)}$$

$$= \frac{(8x-1)(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)(2x+3)} = \frac{8x-1}{2x+3}$$

تقسیم عبارات‌های جبری گویا

برای تقسیم دو عبارت جبری گویا مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱. صورت و مخرج هر کسر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرده و در صورت امکان ساده می‌کنیم.
۲. کسر اول را در معکوس کسر دوم ضرب می‌کنیم.

مثال: حاصل این عبارات را به دست آورید.

(الف)

$$\frac{x^2 + 8x^2 + 7}{x^2 - 144y^2} \div \frac{x^2 - 1}{3x - 24y}$$

$$= \frac{-2by}{-(2y-1)(1+2y)} = \frac{2by}{(2y-1)(1+2y)}$$

(د)

$$D = \frac{x+2}{x^2+7x+12} - \frac{x+1}{x^2-3x-18} + \frac{x-2}{x^2-2x-24}$$

حل:

$$\text{مخرج کسر اول} = x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$\text{مخرج کسر دوم} = x^2 - 3x - 18 = (x+3)(x-6)$$

$$\text{مخرج کسر سوم} = (x^2 - 2x - 24) = (x-6)(x+4)$$

$$\text{مخرج مشترک} = (x+3)(x+4)(x-6)$$

$$D = \frac{(x+2)(x-6)}{(x+3)(x+4)(x-6)} - \frac{(x+1)(x+4)}{(x+3)(x+4)(x-6)} + \frac{(x-2)(x+3)}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 12 - x^2 - 5x - 4 + x^2 + x - 6}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

$$= \frac{x^2 - 8x - 22}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

ضرب عبارات‌های جبری گویا

برای ضرب دو یا چند عبارت جبری گویا، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱. صورت و مخرج هر کسر را به حاصل عوامل اول تجزیه کرده و در صورت امکان ساده می‌کنیم.

۲. صورت کسرها را در یکدیگر و مخرج کسرها را در یکدیگر ضرب کرده و در صورت امکان کسر حاصل را ساده می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{x^2 - 4}{x-1} \times \frac{x^2 - 1}{x+2}$$

(الف)

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)} \times \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)} = \frac{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= (x-2)(x+1)$$

(ب)

$$\frac{3x^2 - 14x - 5}{9x^2 - 1} \times \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$$

$$= \frac{a^r(a-1)(a+1)}{a^r(a+1)} - \frac{a-1}{a} + \frac{1}{a+1}$$

$$= \frac{a-1}{a} - \frac{a-1}{a} + \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1}$$

۲

$$\frac{a^r + ab}{a^r - ab} - \frac{a^r + 2a^r b + ab^r}{a^r b - b^r}$$

$$= \frac{a(a+b)}{a(a-b)} - \frac{a(a+b)(a+b)}{b(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{a+b}{a-b} - \frac{a(a+b)}{b(a-b)} = \frac{b(a+b)}{b(a-b)} - \frac{a(a+b)}{b(a-b)}$$

$$= \frac{ab + b^2 - a^2 - ab}{b(a-b)}$$

$$= \frac{-(a-b)(a+b)}{b(a-b)} = \frac{-(a+b)}{b}$$

۳

$$A = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

مخرج کسر اول = $(a-b)(a-c)$

مخرج کسر دوم = $(b-c)(b-a) = -(a-b)(b-c)$

مخرج کسر سوم = $(c-a)(c-b) = [-(-a-c)] [-(-b-c)] = (a-c)(b-c)$

مخرج مشترک = $-(a-b)(b-c)(a-c)$

$$A = \frac{-bc(b-c)}{-(a-b)(b-c)(a-c)} + \frac{ac(a-c)}{-(a-b)(b-c)(a-c)} + \frac{-ab(a-b)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{-b^2c + bc^2 + a^2c - ac^2 - a^2b + ab^2}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(x^r+1)(x^r+y)}{(x-12y)(x+12y)} + \frac{(x^r-1)(x^r+1)}{3(x-12y)}$$

$$= \frac{(x^r+1)(x^r+y)}{(x-12y)(x+12y)} \times \frac{3(x-12y)}{(x-1)(x+1)(x^r+1)}$$

$$= \frac{3(x^r+y)}{(x+12y)(x-1)(x+1)}$$

(ب)

$$\frac{x^r - 14x - 15}{x^r - 4x - 45} + \frac{x^r - 12x - 45}{x^r - 6x - 27}$$

$$= \frac{(x-15)(x+1)}{(x-9)(x+5)} + \frac{(x-15)(x+3)}{(x-9)(x+3)}$$

$$= \frac{(x-15)(x+1)}{(x-9)(x+5)} \times \frac{(x-9)}{(x-15)} = \frac{x+1}{x+5}$$

(ج)

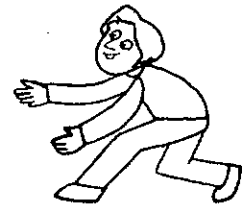
$$\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) + \left(\frac{1}{x-y} - \frac{y}{x^r-y^r} \right)$$

$$\left(\frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} - \frac{(x-y)(x-y)}{(x-y)(x+y)} \right) + \left(\frac{(x+y)}{(x-y)(x+y)} - \frac{y}{(x-y)(x+y)} \right)$$

$$= \left(\frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{(x-y)(x+y)} \right) + \left(\frac{x+y-y}{(x-y)(x+y)} \right)$$

$$= \frac{4xy}{(x-y)(x+y)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{x} = 4y$$

مسائل حل شده



حاصل این عبارت ها را به دست آورید.

۱

$$\frac{a^r - a^r}{a^r + a^r} - \frac{a^r + 1 - 2a}{a^r - a} + \frac{a-1}{a^r - 1}$$

$$= \frac{a^r(a^r-1)}{a^r(a+1)} - \frac{(a-1)(a-1)}{a(a-1)} + \frac{a-1}{(a-1)(a+1)}$$

در صورت کسر abc را اضافه و کم می کنیم:

$$= \frac{-b^2c + bc^2 + a^2c - ac^2 - a^2b + ab^2 + abc - abc}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$A = \frac{(-a^2b + abc + a^2c - ac^2) + (bc^2 - b^2c - abc + ab^2)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{-a(ab - bc - ac + c^2) + b(c^2 - bc - ac + ab)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(ab - bc - ac + c^2)(-a + b)}{-(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{(a-c)(b-c)(-a+b)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{-(a-b)}{-(a-b)} = 1$$

۴

$$P = \frac{a+x}{(m+n)^2} \times \frac{x^2-y^2}{12} \times \frac{(m+n)^2}{(m-n)} \times \frac{6(m^2-n^2)}{x+y}$$

$$P = \frac{(a+x)}{(m+n)(m+n)(m+n)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{12}$$

$$\times \frac{(m+n)(m+n)}{(m-n)} \times \frac{6(m+n)(m-n)}{(x+y)} = \frac{(a+x)(x-y)}{2}$$

۵

$$I = \frac{\frac{x-1}{x+3} - \frac{x+3}{x-1}}{1 - \frac{x^2+x-4}{x^2+2x-3}} = \left(\frac{x-1}{x+3} - \frac{x+3}{x-1} \right) \div \left(1 - \frac{x^2+x-4}{x^2+2x-3} \right)$$

$$= \left(\frac{(x-1)(x-1)}{(x+3)(x-1)} - \frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x-1)} \right) \div \left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x-3} - \frac{x^2+x-4}{x^2+2x-3} \right)$$

$$= \left(\frac{x^2-2x+1-x^2-6x-9}{(x+3)(x-1)} \right) \div \left(\frac{x^2+2x-3-x^2-x+4}{x^2+2x-3} \right)$$

$$= \frac{-8(x+1)}{(x+3)(x-1)} \div \frac{x+1}{x^2+2x-3}$$

$$= \frac{-8(x+1)}{(x+3)(x-1)} \times \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)} = -8$$

۶. اگر تساوی $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{\lambda x + 11}{(x-1)(x-2)}$ به ازای

جميع مقادير x برقرار باشد، مقدار B+A را بیابید.

حل:

$$\frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x-1)(x-2)} = \frac{\lambda x - 11}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\lambda x - 11}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow (A+B)x - (2A+B) \equiv \lambda x - 11 \Rightarrow \begin{cases} A+B = \lambda \\ 2A+B = 11 \end{cases}$$

$$\underline{A = 3, B = 5}$$

$$\Rightarrow A+B = 3+5 = 8$$



حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$A = \left(\frac{ab+1}{ab-1} - \frac{ab-1}{ab+1} \right) + \left(\frac{ab+1}{ab-1} - \frac{ab-1}{ab+1} - 2 \right) \quad .1$$

$$B = \frac{(x + \frac{1}{y})^m (x - \frac{1}{y})^n}{\frac{y}{y}} \quad .2$$

$$\frac{(y + \frac{1}{x})^m (y - \frac{1}{x})^n}{x}$$

$$C = \frac{1}{1+x^{a-b}} + \frac{1}{1+x^{b-a}} \quad .3$$

$$D = \frac{2x+1}{x-3} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{2x^2-2x-7}{x^2-x-6} \quad .4$$

$$E = \left(\frac{1+x+x^2}{1+x} - \frac{1-x+x^2}{1-x} \right) \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x \right) \quad .5$$

$$F = \left(1 + \frac{2ab}{a^2+b^2} \right) \left(1 - \frac{2ab}{(a+b)^2} \right) \quad .6$$

زیر نویس

۱. ریشه های معرج مقادیری از متغیر x می باشند که به ازای آن ها معرج کسر برابر با صفر می شود.