ضرب خارجی و برخی ویژگی‌های آن

برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی، رشته ریاضی

✪ محمد هاشم رستمی

بنا به تعریف، ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ که به صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{a}\wedge\vec{b}$ نمایش داده می‌شود، برداری مانند $\vec{c}$ است؛ به قسمی که:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\,a_3b_1-a_1b_3,\,a_1b_2-a_2b_1)$$

این بردار را به صورت زیر نیز نمایش می‌دهند.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

به عنوان مثال، اگر $\vec{a}=(2,-5,3)$ و $\vec{b}=(-1,2,-4)$ باشد، $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -5 & 3\\ -1 & 2 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}(20-6)+\vec{j}(-3+8)+\vec{k}(4-5)$$

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=14\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$$

ضرب خارجی دو بردار را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد:

تعریف: حاصل ضرب خارجی دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برداری است مانند $\vec{c}$؛ به قسمی که:

الف. بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است؛

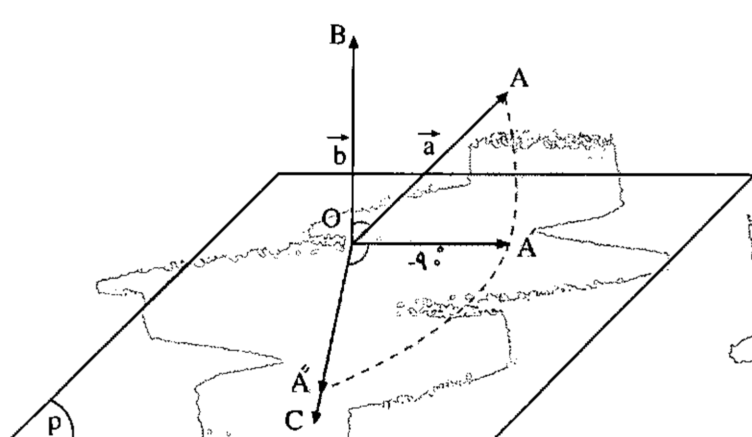
ب. کنج $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ مستقیم است؛

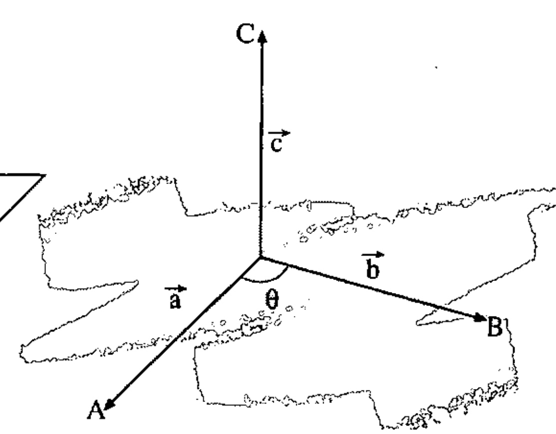
پ. طول آن برابر است با $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$.

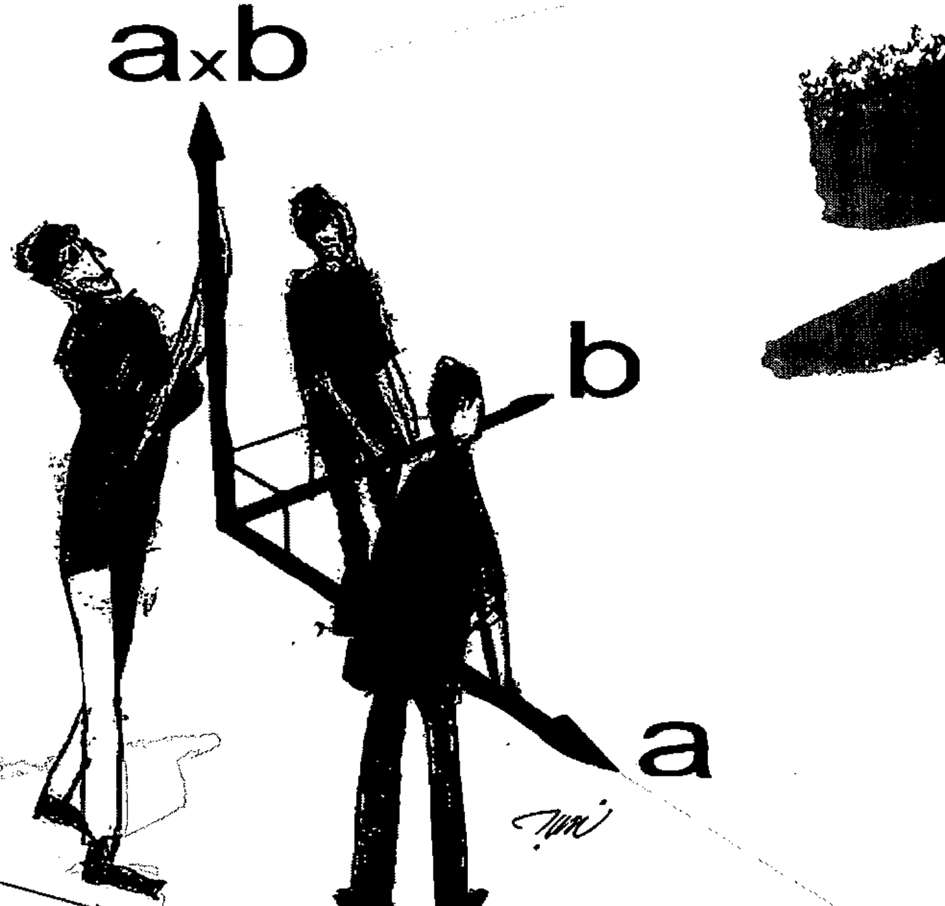
اگر حداقل یکی از دو بردار $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ برابر صفر باشد حاصل ضرب خارجی دو بردار را صفر تعریف می‌کنیم.

این تعریف، با تعریف حاصل ضرب خارجی دو بردار برحسب تصویرهای آن دو بردار هم ارز است.

ساخت هندسی بردار $\vec{a}\times\vec{b}$. بردار $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ را بر صفحهٔ P که عمود بر $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ است، تصویر می‌کنیم و تصویر را $\overrightarrow{OA'}$ می‌نامیم. $\overrightarrow{OA'}$ را حول نقطهٔ O در صفحهٔ مزبور به







اندازهٔ $(-90°)$ دوران می‌دهیم تا به وضع $\vec{OA}'_1$ درآید. این بردار را در عدد $|\vec{b}|$ ضرب می‌کنیم تا بردار $\vec{OC}$ به دست آید. این بردار همان بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ است؛ زیرا:

الف. $\vec{OC}$ بر بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ یعنی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است؛

ب. کنج (OC و OB و OA) مستقیم است؛

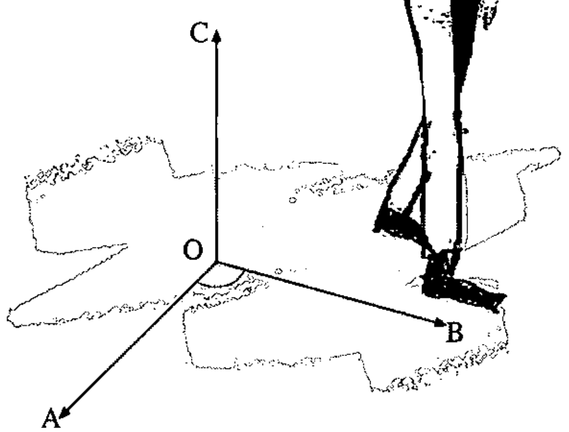
پ.

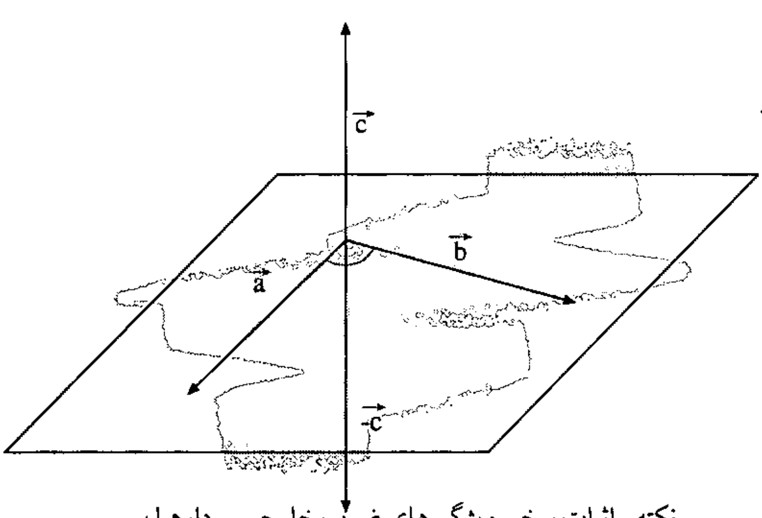
$$|\vec{OC}| = \left||\vec{b}|\vec{OA}'_1\right|$$
$$= |\vec{b}||\vec{OA}'| = |\vec{b}||\vec{OA}|\cos(\vec{OA}',\vec{OA})$$
$$= |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$$

تعریف. کنج جهت‌دار، کنجی است که برای یال‌های آن ترتیب قائل شده باشند. کنج جهت‌دار (OC و OB و OA) را مستقیم یا راستگرد می‌نامند؛

هرگاه برای ناظری که روی OC ایستاده و OB را نگاه می‌کند، OC در طرف چپش واقع شود؛ اگر OC در طرف راست ناظر قرار گیرد، کنج معکوس یا چپگرد نامیده می‌شود.

در شکل (O-ABC) کنج مستقیم یا راستگرد است.

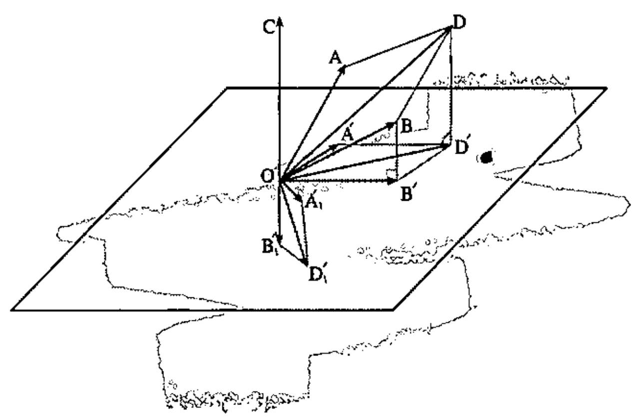




نکته. اثبات برخی ویژگی‌های ضرب خارجی بردارها، به کمک تعریف بالا ساده‌تر است؛ به عنوان مثال، رابطهٔ $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$ به سادگی با توجه به شکل ثابت می‌شود.

اثبات هندسی ویژگی توزیع‌پذیری ضرب خارجی. سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

فرض می‌کنیم $\vec{OA}=\vec{a}$ و $\vec{OB}=\vec{b}$ و $\vec{OC}=\vec{c}$ و $\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ باشد.



صفحهٔ P را در نقطهٔ O عمود بر $\vec{OC}$ رسم می‌کنیم و تصویرهای بردارهای $\vec{OA}$ ، $\vec{OB}$ و $\vec{OD}$ روی این صفحه را $\vec{OA'}$ ، $\vec{OB'}$ و $\vec{OD'}$ می‌نامیم. چهارضلعی $OA'D'B'$ نیز متوازی‌الاضلاع است و داریم $\vec{OD'}=\vec{OA'}+\vec{OB'}$. بنابراین اگر این متوازی‌الاضلاع را به اندازهٔ ۹۰° حول نقطهٔ O دوران دهیم، متوازی‌الاضلاع $OA'_1D'_1B'_1$ به دست خواهد آمد، که در آن رابطهٔ $\vec{OD'_1}=\vec{OA'_1}+\vec{OB'_1}$ برقرار است. دو طرف این رابطهٔ برداری را در عدد $|\vec{OC}|=|\vec{c}|$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$|\vec{OC}|\vec{OD''}=|\vec{OC}|\vec{OA''}+|\vec{OC}|\vec{OB''}$$

از آن‌جا بنا به روش ساختن بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ نتیجه می‌شود:

$$\vec{OD}\times\vec{OC}=\vec{OA}\times\vec{OC}+\vec{OB}\times\vec{OC}$$
$$\Rightarrow(\vec{OA}+\vec{OB})\times\vec{OC}=\vec{OA}\times\vec{OC}+\vec{OB}\times\vec{OC}$$
$$\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

بنابراین ضرب خارجی بردارها نسبت به عمل جمع، از راست توزیع‌پذیر است.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که این توزیع‌پذیری از چپ نیز وجود دارد؛ زیرا داریم:

$$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=-[(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}]=-[\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}]$$
$$=-(\vec{a}\times\vec{c})-(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$$

مثال۱. بردارهای $\vec{a}=(-۲,۰,۳)$ ، $\vec{b}=(۱,-۱,۲)$ و $\vec{c}=(۵,۳,-۴)$ داده شده‌اند. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ را به دست آورید.

راه حل اول. بردار $\vec{b}+\vec{c}$ را مشخص می‌کنیم و سپس $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{b}+\vec{c}=(۱,-۱,۲)+(۵,۳,-۴)=(۶,۲,-۲)$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۲&۰&۳\\۶&۲&-۲\end{vmatrix}=-۶\vec{i}+۱۴\vec{j}-۴\vec{k}$$

راه‌حلّ دوم. از توزیع‌پذیری ضرب خارجی نسبت به جمع بردارها استفاده می‌کنیم.

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۲&۰&۳\\۱&-۱&۲\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۲&۰&۳\\۵&۳&-۴\end{vmatrix}$$

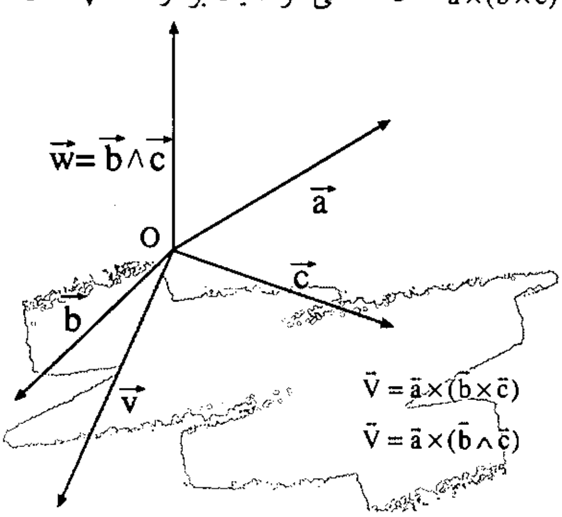
$$=(۳\vec{i}+۷\vec{j}+۲\vec{k})+(-۹\vec{i}+۷\vec{j}-۶\vec{k})=-۶\vec{i}+۱۴\vec{j}-۴\vec{k}$$

مثال۲. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند و $|\vec{a}|=۳$ و $|\vec{b}|=۴$ است. اندازهٔ $|(۳\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-۲\vec{b})|$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از توزیع‌پذیری ضرب خارجی بردارها نسبت به عمل جمع داریم:

$$|(۳\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-۲\vec{b})|$$
$$=|(۳\vec{a})\times\vec{a}-(۳\vec{a})\times(۲\vec{b})-(\vec{b})\times(\vec{a})+(\vec{b})\times(۲\vec{b})|$$
$$=|\vec{۰}-۶(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{b})+۰|=|-۵(\vec{a}\times\vec{b})|=۵|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$$
$$=۵\times۳\times۴\times\sin۹۰=۶۰$$

ضرب دوگانهٔ خارجی سه بردار. حاصل ضرب دوگانهٔ (مضاعف) خارجی سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ که به صورت $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ نشان داده می‌شود، یک بردار مانند $\vec{V}$ است:



با توجه به این که بردارهای $\vec a$ ، $\vec b$ و $\vec c$ همگی بر بردار $(\vec b\times\vec c)$ عمودند، پس این سه بردار هم‌صفحه یا موازی یک صفحه‌اند و می‌توان نوشت:

$$\vec V = \alpha\vec b + \beta\vec c \qquad (۱)$$

اگر $\vec i$ بردار یکّه در راستای $\vec b$ ، $\vec k$ بردار یکّه در راستای $\vec W = \vec b\times\vec c$ و $\vec j = \vec k\times\vec i$ و $(\vec b,\vec c) = \theta$ فرض شود، $\vec b = b\vec i$ و $\vec W = bc\sin\theta\vec k$ می‌شود.

حال دو طرف رابطهٔ (۱) را در $\vec j$ ضرب عددی می‌کنیم:

$$\vec V.\vec j = \alpha\vec b.\vec j + \beta\vec c.\vec j$$

چون $\vec b.\vec j = 0$ است، پس:

$$\vec V.\vec j = p(\vec c.\vec j) \qquad (۲)$$

از طرفی داریم:

$$\vec c.\vec j = c\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = c\sin\theta$$

$$\vec V.\vec j = \vec j(\vec a\times\vec w) = \vec j\vec a\vec w = \vec a\vec w\vec j$$

$$= \vec a.(\vec w\times\vec j) = bc\sin\theta\vec a.(\vec k\times\vec j)$$

$$= -b\sin\theta\ \ \vec a.\vec i = -c\sin\theta(\vec a.\vec b)$$

پس رابطهٔ (۲) چنین نوشته می‌شود:

$$-c\sin\theta(\vec a.\vec b) = \beta c\sin\theta \Rightarrow \beta = -(\vec a.\vec b)$$

حا اگر در طرف اوّل رابطهٔ $\vec a\times(\vec b\times\vec c) = \alpha\vec b + J\vec c$ جای $\vec b$ و $\vec c$ را عوض کنیم، داریم:

$$\vec a\times(\vec c\times\vec b) = (-\beta)\vec c + (-\alpha)\vec b \Rightarrow \alpha = (\vec a.\vec c)$$

بنابراین داریم:

$$\vec a\times(\vec b\times\vec c) = (\vec a.\vec c)\vec b - (\vec a.\vec b)\vec c$$

نتیجه: داریم:

$$(\vec a\times\vec b)\times\vec c = -[\vec c\times(\vec a\times\vec b)] = (\vec c.\vec b)\vec a - (\vec c\,\vec a)\vec b$$

پس:

$$(\vec a\times\vec b)\times\vec c = (\vec c.\vec a)\vec b - (\vec c.\vec b)\vec a$$

نکته. حاصل ضرب مضاعف خارجی سه بردار را برحسب تصویرهای آن سه بردار می‌توان به‌دست آورد.

مثال۱. اگر $\vec a = (2,1,-1)$ ، $\vec b = (3,0,-2)$ و $\vec c = (-1,2,0)$ باشد، تصویرهای بردار $\vec a\times(\vec b\times\vec c)$ و اندازهٔ این بردار را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\vec b\times\vec c = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec i + 12\vec j + 6\vec k$$

$$\Rightarrow \vec b\times\vec c = (4,2,6)$$

$$\vec a\times(\vec b\times\vec c) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 8\vec i - 16\vec j = \vec V$$

$$\left|\vec V\right| = \sqrt{64+256} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$$

مثال۲. اگر دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ برهم عمود باشند، ثابت کنید.

$$\vec a\times\left\{\vec a\times[\vec a\times(\vec a\times\vec b)]\right\} = |\vec a|^4\vec b$$

حل: با توجه به این که $(\vec a,\vec b) = 90^\circ$ است، بردارهای $\vec a$ ، $\vec a\times\vec b$ و $\vec b$ کنج سه قائمه می‌سازند.

بنا به تعریف ضرب خارجی دو بردار داریم:

$$\left|\vec a\times(\vec a\times\vec b)\right| = |\vec a|\ |\vec a|\left|\vec b\right|\sin(\vec a,\vec b)$$

$$= |\vec a|^2\left|\vec b\right|\sin 90^\circ = |\vec a|^2\left|\vec b\right| \Rightarrow$$

$$\left|\vec a\times[\vec a\times(\vec a\times\vec b)]\right|$$

$$= |\vec a|\ |\vec a|^2\left|\vec b\right|\times\sin 90^\circ = |\vec a|^3\left|\vec b\right| \Rightarrow$$

$$\left|\vec a\times\left\{\vec a\times[\vec a\times(\vec a\times\vec b)]\right\}\right|$$

$$= |\vec a|\ |\vec a|^3\left|\vec b\right|\times\sin 90^\circ = |\vec a|^4\left|\vec b\right|$$

حاصل ضرب طرف اوّل، برداری است در راستای بردار $\vec b$ ، که قدرمطلق آن مساوی $\left|\vec b\right||\vec a|^4$ است. بنابراین این بردار $|\vec a|^4\vec b$ می‌باشد؛ پس اتحاد داده شده برقرار است.

نکته۱. با استفاده از اتحاد $\vec a\times(\vec b\times\vec c) = (\vec a.\vec c)\vec b - (\vec a.\vec b)\vec c$ نیز درستی اتحاد بالا را می‌توان ثابت کرد.

نکته۲. با استفاده از تصویر بردارها، اتحاد بالا را می‌توان ثابت کرد.

تست. اگر $\vec a = (1,0,0)$ ، $\vec b = (0,1,0)$ و $\vec c = (0,0,1)$ باشد، $\vec a\times(\vec b\times\vec c)$ برابر کدام است؟

۱) $\vec a$ ۲) $\vec b$

۳) $\vec c$ ۴) $\vec 0$

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا بردارهای داده شده $\vec a = \vec i$ ، $\vec b = \vec j$ و $\vec c = \vec k$ بردارهای یکّه دستگاه مختصات xoy هستند؛ یعنی داریم:

$$\vec i\times(\vec j\times\vec k) = \vec i\times\vec i = \vec 0$$