شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۴)

«...وآن که فرموده کـه مولانا بدرالدین، ریاضیـات نیک می‌داند، در ریاضیات بی‌مسأله، چند از اقلیدس به یاد دارد و قطعاً به عمل در نمی‌تواند آورد. چنان است که کسی بعضی قواعد نحوی یاد دارد و هیچ ترکیب عربی نتواند کرد. چون مولانا بدرالدین سخنی چند از اقلیدس گفته باشد، او پنداشته که ریاضیات می‌داند...»

از نامهٔ جمشید کاشانی به پدرش

● پرویز شهریاری

غیاث‌الدین جمشید *کاشانی*، یکی از بزرگترین ریاضیدانان و اختـرشناسـان ایرانی است کـه در زمـان حکومت تیـموریان می‌زیسته و به خواست *الغ‌بیگ*، نوهٔ تیمور، به سمرقند رفته و با یاری چند ریاضیـدان و اختـرشناس دیگر، رصدخـانهٔ بزرگ سمرقند را بنیان نهاده است. نوشته‌هایی از جمشید کاشانی، باقی‌مانده است که توان بی‌اندازهٔ او را در حل مسأله‌های ریاضی به خـوبی نشـان می‌دهد. همـچنین نامـه‌ای از کـاشـانی، کـه از سـمرقند به پدرش در کـاشـان نوشـتـه و یکی از پر ارزش‌ترین اثرهای ماندگار در تاریخ دانش است. به ظاهر، پدر جمشید، از بدرالدین نامی، به عنوان یک ریاضیدان یاد کرده است که پسرش جمشید، در پاسخ او، این چند سطر را نوشته است. اگر سخن کاشانی را به زبان ساده امروزی درآوریم، چنین گفته است : اگر کسی تنها برخی قضیه‌ها و دستورهای ریاضی را بداند و نتواند، مسأله‌های تازه‌ای که در ریاضیات و یا حـالتهای کاربردی آن در برابر او قرار می‌گیرد، حل کند، ریاضیدان نیست. ریاضیدان کسی است که از عهدهٔ حل مسأله‌های تازه برآید.

ولی برای این کـه بتوان مسـأله‌های تازهٔ ریاضی را حل کرد، پیش از هر چیـز، باید با روشـهـای حل مـسـأله آشنا بود. این روشـهـا، چـندان زیادند که برای تجـزیه و تحلیل همـهٔ آنهـا، باید صـفـحـه‌های زیادی را سـیـاه کـرد. ولی نیـازی به چنین بحث طولانی نداریم، به‌ویژه که در دورهٔ دبیرستان، با بسیاری از این روشـهـا آشنا شـده‌اید و ضـمن حل مـسـأله، کـاربردهای آنهـا را فراگرفته‌اید. در مقاله‌های گذشـته هم، برخی از این روشـهـا را به یاد آورده‌ایم و دربارهٔ آنها صحبت کرده‌ایم. در این جا، تنها از چند روش مـبنایی، کـه به کـار اسـتـدلال منطقی در ریاضـیـات می‌خورند، نام می‌بریم و با ذکر مثال، با نحوهٔ کاربرد آنها در حل مسأله‌های ریاضی آشنا می‌شویم.

۱§. شباهت مسأله با مسأله‌های ساده‌تر

مـسـأله‌ای در برابر شـمـاست کـه راه حل آن را نمی‌دانیـد در برابر خود، این پرسشها را قرار دهید و تلاش کنید که پاسخ آنها را پیدا کنید آیا این مـسـأله، حـالت یا حـالتهای خـاصی دارد؟ آیا

مسأله‌ای ساده‌تر که با این مسأله شباهت داشته باشد، به یادتان می‌آید؟ آیا می‌توانید با رسم شکلهای مختلف یا با آزمایش عددهای مختلف، مسأله را عینی‌تر و ملموس‌تر کنید؟ ... پرسشهایی از این‌گونه، می‌تواند شما را با مسأله آشناتر کند، به‌جز آن، مسأله‌های دیگری در برابر شما قرار گیرد که از مسأله اصلی ساده‌تر و احتمال حل آنها بیشتر است. و بعد، اگر این مسأله یا مسأله‌های ساده‌تر را حل کردید، از خود بپرسید : آیا می‌توان از همین راه حل، یا راه حلی شبیه آن، مسألهٔ اصلی را حل کرد؟ در راه حل مسأله ساده‌تر، چه تغییری بدهیم تا بتواند برای حل مسألهٔ ما مفید باشد؟ و ...

البته، در پیدا کردن مسأله‌های مشابه و یا به اصطلاح «شبیه‌سازی» باید هشیار بود. هر شباهتی ما را به نتیجه نمی‌رساند ؛ تنها شبیه بودن نمی‌تواند پایه‌ای برای نتیجه‌گیری باشد. بهتر است این نکته را از زبان یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان سدهٔ بیستم بشنویم.

آلکساندر خین چین (۱۸۹۴ ــ ۱۹۵۹ میلادی)، ریاضیدان بزرگ، مربی برجسته و عضو فرهنگستان علوم اتحاد شوروی، در زمینهٔ تابعهای با متغیر حقیقی، تابعهای اندازه‌پذیر، تعمیم مفهوم دیفرانسیل و انتگرال و نظریهٔ متری عددها، موفقیتهای چشمگیری به دست آورد، ولی شهرت اصلی او، به خاطر پایه‌گذاشتن نظریهٔ تازهٔ احتمال بود. در همایشی که در سال ۱۹۶۰، در برکلی امریکا، با شرکت گروه بزرگی از ریاضیدانان جهان، برای بحث در نظریهٔ احتمال و آمار ریاضی تشکیل شده بود، نشست ویژه‌ای به یاد خین‌چین اختصاص دادند و نقش او را در پیشرفت دانش گرامی داشتند.

آلکساندر خین‌چین، در یکی از مقاله‌های خود، با عنوان «نقش تربیتی درس‌های ریاضیات» می‌نویسد :

> «... نتیجه‌گیری از راه شباهت ــ چه در دانشهای تجربی و چه در زندگی روزمره ــ روش معمولی و قانونی، برای کشف قانون‌مندی‌های تازه است. اگر فرض کنیم، طبیعت شناسی متوجه شود، همهٔ گونه‌هایی که دارای نشانه‌های A و B هستند و تاکنون به آنها برخورده‌اند، در ضمن دارای نشانهٔ C هم هستند، آن وقت اگر گونهٔ تازه‌ای را پیدا کند که نشانه‌های A و B در آن وجود داشته باشد، به طور طبیعی نتیجه می‌گیرد که این گونهٔ تازه هم دارای نشانهٔ C است. این گونه نتیجه‌گیری از راه شباهت، موقعی قانع کننده‌تر می‌شود که افزون بر آزمایش، نوعی ملاحظهٔ نظری هم در این باره وجود داشته باشد که همراهی C با A و B تصادفی نیست و زمینه‌ای در خود این نشانه‌ها و یا در جای دیگری دارد (و بیشتر، می‌توان چنین ملاحظه نظری را پیدا کرد).

تنها در ریاضیات، بر ضرورت این امر تأکید می‌شود که : این ملاحظهٔ نظری را باید، تا آخر و به طور کامل، ثابت کرد. باید با دقت کامل ثابت کنیم، وجود نشانه‌های A و B، همیشه به معنای وجود نشانهٔ C است، و اگر نتوانیم چنین اثباتی را پیدا کنیم، حق نداریم از روی نشانه‌های A و B، وجود نشانهٔ C را نتیجه بگیریم. ولی در حالت اول (یعنی وقتی این قضیه ثابت شود که « C نتیجه‌ای است از A و B»)، کاربرد ساده این قضیه را دیگر نمی‌توان «نتیجه‌گیری از راه شباهت» نامید. بنابراین، می‌توان گفت که در ریاضیات، نتیجه‌گیری از راه شباهت، به طور کلی منع شده است [و این، البته به معنای بی‌اعتباری نتیجه‌گیری‌های بزرگی که از راه تجربه به دست آمده‌اند، نیست]، در حالی که در دانش‌های تجربی و فعالیتهای عملی، نتیجه‌گیری از راه شباهت، نقشی عظیم دارد و یکی از عمده‌ترین و اساسی‌ترین روش‌ها، برای پیدا کردن قانون‌مندیهای تازه است.

به این ترتیب، دوباره در برابر پرسشی قرار می‌گیریم : در این رابطه، چه می‌توان کرد تا درس‌های ریاضیات، برای فرهنگ عمومی تفکر، نقشی تربیت کننده داشته باشد؟ پاسخ روشن است : تربیت ریاضی ذهن و خو گرفتن به این موضوع که ؛ نتیجه‌گیری و پایهٔ شباهت، تنها می‌تواند در خدمت روش‌های آزمایشی باشد و به خودی خود هیچ‌گونه نیروی استدلالی ندارد، به ناچار آدمی را وا می‌دارد تا در زمینه‌های دیگر اندیشه هم با احتیاط بیشتر نسبت به این گونه استنباط‌ها روبه‌رو شود و به یاد بیاورد که در هیچ حالتی، نمی‌توان بدون دقت کافی و بدون پیدا کردن نشانه‌های اساسی دیگر، تنها براساس شباهت داوری کرد.

هر کدام از ما، این ویژگی اندیشهٔ ریاضی را آزمایش کرده‌ایم و دریافته‌ایم که این تأثیر، چگونه موجب بالا رفتن «فرهنگ *اندیشیدن*» ما شده است. برخورد انتقادی با نتیجه‌گیری‌هایی که براساس شباهت به دست می‌آیند، یکی از بهترین و مهمترین نشانه‌ها، برای تشخیص اندیشهٔ رشد

یافتهٔ علمی از اندیشهٔ سطحی و ساده لوحانه است ؛ و دانش ریاضی خواستگاهی مناسب برای تربیت اندیشهٔ ابتدایی و تکامل آن به سمت اندیشهٔ علمی است.

اگر بخواهیم، توصیه‌های خین‌چین را در نظر داشته باشیم، باید به یک نکته اساسی توجه کنیم که در مسأله‌های ریاضی، «شباهت» می‌تواند وسیله و راهنمای ما برای کشف مسأله‌های تازه و یا احتمال وجود یک ویژگی در یک شکل یا یک دستور باشد، ولی نمی‌تواند جانشین استدلال شود. در ریاضیات، برای پذیرفتن یک ویژگی یا یک قاعده، باید وجود و درستی آن، با استدلال منطقی ثابت شود.

به هر حال، «شباهت» یکی از انگیزه‌هایی است که می‌تواند ذهن جستجوگر را در جهت‌های گوناگون، به اندیشه وادارد و موجبی برای کشف‌های تازه و روشهای ساده‌تر باشد **یوهان کپلر** می‌گفت :

«... من بیش از هر چیز، به شباهت‌ها، که بهترین معلمان من بوده‌اند، ارج می‌گذارم. آنها به همهٔ رازهای طبیعت آگاهی دارند و به‌ویژه در هندسه، نباید نسبت به آنها بی‌اعتنا بود...»

به مثالی از جبر توجه کنیم : آیا می‌توانیم از یک عبارت جبری جذر بگیریم .روش جذر گرفتن از عددهای طبیعی را می‌دانیم. آیا عبارت جبری، با عدد شباهتی دارد؟ وقتی با عدد طبیعی ۲۳۷۱۶ سر و کار داریم، می‌توان آن را به این صورت نوشت :

$$23716 = 2\times10^4 + 3\times10^3 + 7\times10^2 + 1\times10 + 6$$

در واقع، از آن جا که عددنویسی ما در مبنای ۱۰ است، توانستیم عدد را به صورت ضرب رقم‌ها در توان‌های ۱۰ بنویسیم، اگر همین عدد ۲۳۷۱۶ را در عددنویسی به مبنای ۹ به ما داده بودند، آن وقت به این صورت در می‌آمد :

$$(23716)_9 = 2\times9^4 + 3\times9^3 + 7\times9^2 + 1\times9 + 6$$

اکنون، اگر مبنای عددنویسی را x بگیریم، باید بنویسیم :

$$(23716)_x = 2x^4 + 3x^3 + 7x^2 + x + 6$$

پس، می‌توان عبارت جبری را (اگر شامل یک مجهول باشد)، عددی در مبنای آن مجهول به حساب آورد، ولی در این‌جا، یعنی پذیرفتن عبارت جبری به عنوان تعمیم مفهوم عدد، نکته‌های تازه‌ای وجود دارد که باید به آنها توجه کرد :

۱) در عدد طبیعی، هر یک از رقم‌ها از مبنای عددنویسی کوچکترند، در حالی که در عبارت جبری، مقدار ضریب‌ها، می‌توانند از مقدار x (که به جای مبنا پذیرفته‌ایم) بزرگتر باشد ؛

۲) در عددنویسی عادی، رقم‌ها، عددهایی درست و مثبت‌اند ؛ در حالی که در عبارت جبری، ضریب‌ها می‌توانند منفی، کسری یا گنگ باشند.

همین دو نکته موجب می‌شود که، اگر بخواهیم از یک عبارت جبری، در شباهت با حساب و به کار گرفتن همان روش جذر گرفتن از عددهای طبیعی، جذر بگیریم، باید متوجه برخی اختلاف‌ها باشیم، از آن جمله :

۱) از عبارت جبری، وقتی می‌توان به شیوهٔ حساب جذر گرفت که از درجهٔ زوج باشد. در جبر از عبارت‌های با درجهٔ فرد (درجهٔ سوم، پنجم و غیره) نمی‌توان جذر گرفت.

۲) بهتر است در حالتی به فکر استفاده از روش حسابی، برای جذر گرفتن از عبارت‌های جبری بیفتیم، که ضریب بزرگترین درجه، مجذور کامل و سایر ضریب‌ها، عددهایی درست (مثبت، منفی یا صفر) باشند، اگرچه حالت‌هایی پیش می‌آید که با ضریب‌های کسری یا گنگ هم بتوان جذر گرفت.

مثال ۱: این معادلهٔ درجهٔ چهارم را حل کنید :

$$9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x - 288 = 0$$

آزمایش می‌کنیم، شاید به یاری جذر گرفتن از عبارت درجهٔ چهارم سمت چپ برابری، روزنه‌ای برای حل معادله پیدا شود. به‌این ترتیب :

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x - 288} & 3x^2 - 2x + 1 \\
\hline
-9x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & 6x^2 - 2x \\
 & \quad\; -2x \\
\hline
-12x^3 + 10x^2 \qquad\qquad & 6x^2 - 4x + 1 \\
12x^3 - 4x^2 \qquad\qquad & \qquad\qquad 1 \\
\hline
6x^2 - 4x - 288 & \\
-6x^2 + 4x - 1 & \\
\hline
-289 &
\end{array}$$

اگر دقت کنید، کاملاً شبیه جذر گرفتن از عدد، عمل کردیم : جذر $9x^4$ برابر $3x^2$ می‌شود، مجذور $3x^2$ را از عبارت اصلی کم کردیم و دو جملهٔ بعدی را پایین آوردیم. نخستین جملهٔ دوجمله‌ای $-12x^3 + 10x^2$ را بر دو برابر $3x^2$ ، یعنی $6x^2$ ،

تقسیم کردیم، نتیجهٔ تقسیم، یعنی $-2x$ را پهلوی $6x^2$ نوشتیم و حاصل ضرب عبارتی که به دست می‌آید، در $-2x$ را از دوجمله‌ای $-12x^3+10x^2$ کم کردیم و دو جملهٔ دیگر از عبارت اصلی را پایین آوردیم و ...

جذر عبارت، برابر $3x^2-2x+1$ و باقی‌مانده جذر برابر -289 می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$9x^4-12x^3+10x^2-4x-288=$$
$$=(3x^2-2x+1)^2-289=$$
$$=(3x^2-2x-16)(3x^2-2x+18)$$

عبارت درجهٔ چهارم، به صورت ضرب دو عبارت درجهٔ دوم تجزیه شد و، بنابراین، معادلهٔ درجهٔ چهارم قابل حل است. معادلهٔ درجهٔ چهارم، دو ریشهٔ حقیقی و دو ریشه موهومی دارد. ریشه‌های حقیقی معادله -2 و $\frac{8}{3}$ اند.

البته، حالتهایی وجود دارد که با وجود ضریب‌های گنگ (یا کسری) و با وجود این که ضریب بزرگترین درجهٔ عبارت جبری، مجذور کامل نیست، بتوان همین روش را به کار برد.

مثال ۲: این معادله را حل کنید:

$$2x^4-2\sqrt{2}x^3-(4\sqrt{2}-1)x^2-4x-5=0$$

اگر از عبارت سمت چپ برابری جذر بگیریم، به عبارت $\sqrt{2}x^2+x-2$ و باقی ماندهٔ -9 می‌رسیم، یعنی

$$2x^4-2\sqrt{2}x^3-(4\sqrt{2}-1)x^2-4x-5$$
$$=(\sqrt{2}x^2+x-2)^2-9=(\sqrt{2}x^2+x+1)(\sqrt{2}x^2+x-5)$$

عبارت درجهٔ چهارم به صورت ضرب دو عبارت درجهٔ دوم تجزیه شد که یکی از آنها، ریشه‌های موهومی و دیگری ریشه‌های حقیقی دارد و به سادگی قابل محاسبه‌اند.

مثال ۳: این معادله را حل کنید:

$$x^4-2ax^3+a^2x^2-1=0$$

برای حل این معادله، به گونهٔ دیگری از «شباهت» استفاده می‌کنیم. معادله، نسبت به x از درجهٔ چهارم است، ولی نسبت به a از درجهٔ دوم، نسبت به a منظم می‌کنیم؛ البته به شرطی از این راه به نتیجه می‌رسیم که، معادلهٔ درجهٔ دوم نسبت به مجهول a، ریشه‌های گویا داشته باشد:

$$x^2a^2-2x^3a+x^4-1=0$$

که برای ریشه‌های آن به دست می‌آید:

$$a=\frac{x^2+1}{x}\ ,\ a=\frac{x^2-1}{x}$$

و بنابراین، به دو معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2-ax+1=0\ ,\ x^2-ax-1=0$$

که، پیدا کردن ریشه‌های آنها و یا بحث دربارهٔ وجود ریشه‌های حقیقی در آن‌ها، دشوار نیست.

گاهی چنین روشهای مشابهی ما را به جاهای جالب‌تر می‌کشاند. به این مثال توجه کنید:

مثال ۴: این معادلهٔ درجه سوم را حل کنید:

$$x^3-(2\sqrt{5}+1)x^2+(6+\sqrt{5})x-\sqrt{5}-1=0$$

معادله از درجهٔ سوم است. پارامتری هم وجود ندارد که، به‌احتمالی، نسبت به پارامتر قابل حل باشد... ولی اگر $\sqrt{5}$ را a بگیریم و در ضریب x، عدد ۶ را برابر $1+5$، یعنی a^2+1 به‌حساب آوریم، به این معادله می‌رسیم:

$$x^3-(2a+1)x^2+(a^2+a+1)x-a-1=0$$

که نسبت به a، از درجهٔ دوم و به صورت زیر است:

$$xa^2-(2x^2-x+1)a+(x^3-x^2+x-1)=0$$

این معادله، ریشه‌های گویا دارد و مقدارهای a، بر حسب x، چنین می‌شود:

$$a=x-1\ ,\ a=\frac{x^2+1}{x}$$

که اگر، به جای a، مقدارش $\sqrt{5}$ را بگذاریم:

$$x=\sqrt{5}+1\ ,\ x^2-\sqrt{5}x+1=0$$

پاسخ: $x_1=\sqrt{5}+1$ ، $x_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ، $x_3=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

ولی استفاده از شباهت، بیش از هرجا برای کشف و حل مسأله‌ها یا قضیه‌های هندسهٔ فضایی به درد می‌خورد. وقتی قضیه‌ای یا مسأله‌ای دربارهٔ مثلث، در برابر ما باشد، می‌توان اندیشید که «شبیه فضایی» این قضیه یا مسأله، به‌چه صورتی در می‌آید! در این جا چند مسألهٔ مشابه را آورده‌ایم (در هندسهٔ روی صفحه و در هندسهٔ فضایی)؛ دربارهٔ اثبات یا حل آنها (چه مسألهٔ روی صفحه و چه مسألهٔ فضایی شبیه آن) بیندیشید و تلاش کنید که استدلال لازم را پیدا کنید.

مثال ۵: اگر r طول شعاع دایرهٔ محاطی و h_1 ، h_2 ، h_3 ، طول ارتفاع‌های یک مثلث باشند، داریم:

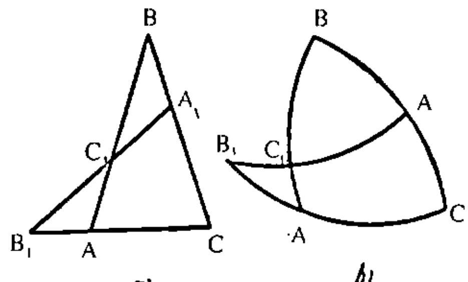
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$$

اکنون یک چهار وجهی در نظر می‌گیریم، طول شعاع کرهٔ

محاطی آن را r و طول ارتفاع‌های چهار وجهی را h_1 ، h_2 ، h_3 ، h_4 ، فرض می‌کنیم، در این صورت داریم :

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$$

مثال ۶: قضیهٔ منه‌لائوس در صفحه و در فضا. مثلث ABC را روی صفحه (شکل ۱ـ a) و مثلث کروی ABC را روی سطح کره (شکل ۱ ـ b) در نظر می‌گیریم (مثلث کروی، مثلثی است که، ضلع‌های آن، کمان‌هایی از دایره‌های عظیمهٔ کره باشد)،



شکل ۱

نقطه‌های A_1 و B_1 و C_1 را، به ترتیب، روی ضلعهای BC، AC و AB و یا امتداد آنها انتخاب کرده‌ایم. برای این‌که سه نقطهٔ A_1 ، B_1 و C_1 ، در حالت صفحه، روی یک خط راست و در حالت فضایی، روی کمانی از یک دایرهٔ عظیمه باشند، باید داشته باشیم :

برای مثلث روی صفحه :

$$\frac{|CA_1|}{|A_1B|}\cdot\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$$

(و یا برابری‌های مشابه آن) ؛

برای مثلث کروی :

$$\frac{\sin\widehat{CA_1}}{\sin\widehat{A_1B}}\cdot\frac{\sin\widehat{AC_1}}{\sin\widehat{C_1B}}=\frac{\sin\widehat{CB}}{\sin\widehat{B_1A}}$$

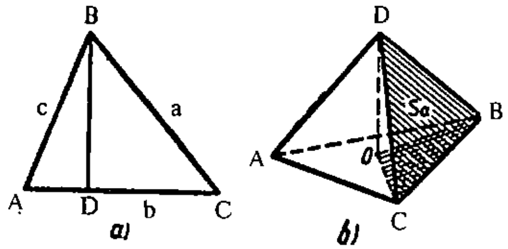
مثال ۷: هرم ABCD را متناظر با مثلث ABC می‌گیریم. فرض می‌کنیم :

$|BC|=a\ ,\ |AC|=b\ ,\ |AB|=c$

در این صورت داریم:

$a\cos\hat{B}+b\cos\hat{A}=c$

اکنون، اگر S_a را مساحت وجه روبه‌رو به رأس A، S_b را مساحت وجه روبه‌رو به رأس B و غیره، در چهار وجهی، فرض



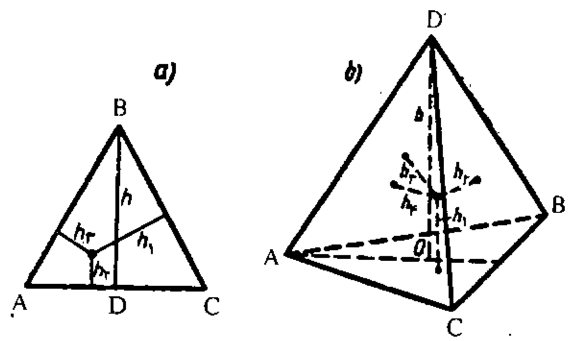
شکل ۲

کنیم (شکل ۲)، در ضمن زاویه‌های دو وجهی هرم را در یال‌های BC، AC و AB به ترتیب، برابر α، β و γ بگیریم، داریم :

$S_a\cdot\cos\alpha+S_b\cdot\cos\beta+S_c\cdot\cos\gamma=S_d$

مثال ۸: اگر h_1 ، h_2 و h_3 فاصله‌های نقطهٔ دلخواهی از درون مثلث متساوی‌الاضلاع تا سه ضلع آن و h طول ارتفاع مثلث باشد، داریم :

$h_1+h_2+h_3=h$



شکل ۳

به همین ترتیب، اگر h_1 ، h_2 ، h_3 و h_4 را فاصله‌های نقطهٔ دلخواهی از درون چهاروجهی منتظم تا وجه‌های آن، و h را طول ارتفاع آن بگیریم، داریم (شکل ۳) :

$h_1+h_2+h_3+h_4=h$

مثال ۹: چهارضلعی روی صفحه را می‌توان، به مفهومی یک شش ضلعی دانست، به شرطی که دو قطر چهار ضلعی را هم، دو ضلع رو به‌روی آن به حساب آوریم. در این صورت، چهار وجهی، یک شش ضلعی فضایی می‌شود و به مفهومی، می‌توان آن را مشابه چهار ضلعیِ روی صفحه دانست و این دو قضیهٔ شبیه هم را خواهیم داشت :

قضیهٔ مربوط به صفحه برای چهار ضلعی: برای این که

قطرهای یک چهار ضلعی بر هم عمود باشند، لازم و کافی است که مجموع مجذورهای طول‌های دو ضلع روبه‌روی آن، با مجموع مجذورهای طول‌های دو ضلع روبه‌روی دیگر، برابر باشند.

قضیهٔ روی صفحه‌برای شش ضلعی: برای این که دو ضلع روبه‌رو در یک شش ضلعی، بر هم عمود باشند، لازم و کافی است که، مجموع مجذورهای طول‌های هر دو ضلع روبه‌روی دیگر، با هم برابر باشند.

قضیهٔ فضایی برای چهار وجهی: برای این که دو یال روبه‌رو در یک چهار وجهی بر هم عمود باشند، لازم و کافی است که، مجموع مجذورهای طول‌های هر دو یال روبه‌روی دیگر، با هم برابر باشند.

مثال ۱۰: در مثلث ABC، طول ضلع‌های روبه‌رو به‌رأس‌های A، B و C را، به ترتیب، a، b و c می‌گیریم. در این صورت داریم (رابطهٔ کسینوس‌ها در مثلث):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

اکنون در چهاروجهی ABCD فرض می‌کنیم:

$$S_{BCD} = S_1,\quad S_{ACD} = S_2,\quad S_{ABD} = S_3,\quad S_{ABC} = S_4$$

در ضمن، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یال‌های AC، AD و AB را، α، β و γ می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\alpha - 2S_2S_4\cos\beta - 2S_3S_4\cos\gamma$$

تا بعد ...

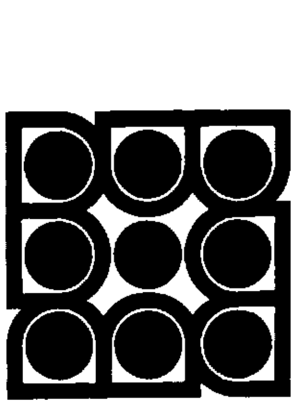
تفریح اندیشه ۱

پیک

این معما، معمایی کلاسیک در جبر است که در بسیاری از کتابها آمده و به دوران باستان باز می‌گردد. اگر آن را پیش از این ندیده‌اید، اکنون به آن توجه کنید.

پیکی از عقب ارتش متحرکی، ۱۰۰ کیلومتر به جلو حرکت می‌کند، پیام را می‌رساند، و بلافاصله به عقب برمی‌گردد و درمی‌یابد که ۱۰۰ کیلومتر جلوتر از نقطهٔ آغاز است.

مجموعاً چه‌قدر حرکت کرده است؟ البته، سرعت حرکت ارتش و پیک، همواره ثابت بوده است.



جواب در صفحه ۸۸