شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۰)

پرویز شهریاری

نمونه کار در منزل و حل تمرینها

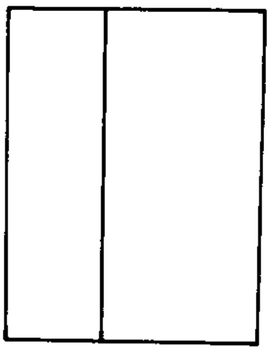
هدف توصیهٔ خاصی، برای نمونهٔ دفتر تمرینهای ریاضی شما نیست. هرکسی می‌تواند به سلیقهٔ خود، روشی را برای کار در منزل انتخاب کند. شکل دفتر یا شیوهٔ نوشتن شما، هیچ تأثیری در پیشرفت کار و رشد خلاقیت ذهنی شما ندارد. با وجود این، توصیه می‌کنم دفتر حل تمرینها را طوری تنظیم کنید که پاسخگوی این شرطها باشد:

۱) همهٔ تلاش ذهنی شما در آن منعکس شود؛ یعنی با مراجعهٔ دوباره به آن، بسادگی متوجه شوید چگونه اندیشیده‌اید؟ چرا نتوانسته‌اید به نتیجه برسید؟ چرا و در کجا اشتباه کرده‌اید؟ کوتاه سخن، بتوانید راه حل یا راه حلهای درست را با راه حل خودتان مقایسه کنید. این یکی از راههایی است که موجب رشد ذهن شما می‌شود و، به‌تدریج، درجهت درست می‌افتد. بنابراین، ضمن حل تمرینها، چیزی را حذف نکنید و از بین نبرید. اگر ضمن حل، به اشتباه خود پی بردید، دور عملهای نادرست (و نه روی آنها) را خط بکشید و راه حل تازه‌ای را که به ذهنتان رسیده است، به‌دنبال نوشته‌های قبلی خود بیاورید.

۲) در هر مسأله، جایی برای یادداشت نکته‌ها یا راه حلهای تازه‌ای که سر کلاس مطرح می‌شود و یا، ضمن مشورت با دوستتان، به آنها پی می‌برید، باز بگذارید.

۳) پیش از حل تمرینها، کوتاه شدهٔ درس را بنویسید (در همان دفتر تمرینها). دربارهٔ درس و مفهومهای آن بیندیشید. آیا نکته‌ای وجود دارد که نفهمیده‌اید؟ آیا دربارهٔ چیزی تردید دارید؟ تنها وقتی حل تمرینها را آغاز کنید که، دربارهٔ درس، هیچ اشکالی نداشته باشید. برای رفع اشکال درسی خود می‌توانید به کتاب (چه کتاب درسی یا کتابهای دیگر) مراجعه کنید، ولی چیزی را نفهمیده نقل نکنید. بویژه دربارهٔ مفهومها و استدلالها، تند رد نشوید. برای هر مفهوم یا هر نتیجه‌گیری، مثال یا مثالهایی پیدا کنید.

نمونهٔ دفتر کار را می‌توان به این ترتیب تنظیم کرد (دوباره تأکید می‌کنم، این، تنها یک توصیه است و شما می‌توانید راه دیگری را برای دفتر تمرینهای خود انتخاب کنید). هر صفحهٔ دفتر خود را به دو بخش نابرابر تقسیم کنید (به‌صورتی که در شکل می‌بینید)، به‌نحوی که بخش سمت راست دو برابر بخش سمت چپ باشد. کوتاه شدهٔ درس



و حل تمرینها را در بخش سمت راست بنویسید (مثلاً بامداد یا خودکار آبی) و بخش سمت چپ را خالی بگذارید. اگر مسأله‌ای را اشتباه حل کرده‌اید، اگر نتوانسته‌اید آن را حل کنید یا اگر بعدها، راه حل تازه و جالبی برای مسأله پیدا کردید، آن‌وقت، آن را با رنگ

دیگری (و مثلاً خودکار قرمز) در بخش سمت چپ یادداشت کنید.
اگر دفتر تمرینهای ریاضی خود را به این صورت تنظیم کنید، دست‌کم دو فایدهٔ عمده دارد:

اوّل این که، هر وقت به آن مراجعه کنید، ضعف و قوت گذشتهٔ خود را به روشنی می‌بینید؛ درضمن، در می‌یابید تا چه اندازه پیش رفته‌اید و ذهن ریاضی شما تا چه حد شکوفاتر شده است. اگر هم، زمانی بخواهید ـ مثلاً برای امتحان ـ تمرینها را مرور کنید، دفتر شما مشخص می‌کند، در چه زمینه‌هایی و دربارهٔ چه مسأله‌هایی اشکال داشته‌اید و، درنتیجه، وقت خود را برای حل دوبارهٔ تمرینهایی که، به‌موقع خود، براحتی حل کرده‌اید، تلف نمی‌کنید.

دوم، اگر دبیر ریاضی شما، گاه‌به گاه دفترهای کار دانش‌آموزان را ورق بزند، می‌تواند به نقطه‌های ضعف کلاس (دز مجموع) پی ببرد و برای برطرف کردن آنها چاره‌ای بیندیشد.

بهتر است، با آوردن چند مثال، روش حل تمرینها و شیوهٔ یادداشت آنها در دفتر، روشن شود.

در این‌جا، سه مسأله، در سطحهای مختلف، مطرح شده است، چه بسا که خود مسأله‌ها هم، برای شما، جالب و آموزنده باشد، ولی نیّت اصلی از آوردن آنها در این‌جا، آشنا کردن شما با روش حل مسأله و نحوهٔ تلاش، برای دست یافتن به راه‌حل است. ذهن آدمی بسیار پیچیده است و، بسته به میزان تجربه‌ای که در کار حل مسأله‌های ریاضی دارد، می‌تواند در جهتهای گوناگون حرکت کند. بنابراین چه بسا، وقتی شما به یکی از این مسأله‌ها برخورد کنید، به‌دنبال روشها و راه حلهای دیگری بروید. این مهم نیست. مهم این است که گمان نکنید، وقتی با یک مسألهٔ تازه روبرو می‌شوید، باید بتوانید بلافاصله آن را حل کنید. هیچ کس چنین قدرتی ندارد و نمی‌تواند ادعا کند، از عهدهٔ حل فوری هر مسألهٔ تازه‌ای برمی‌آید. البته، هرچه تجربهٔ بیشتری داشته باشید، زودتر می‌توانید خودتان را از «بن‌بست» نجات دهید.

تنها باید از میدان در نروید و برای حل مسأله، راههای تازه و تازه‌تری را مورد آزمایش قرار دهید. بارها این مطلب را تکرار کرده‌ام: اگر تنها روی یک مسأله، ساعتها کار کنید، روشهای مختلف حل را مورد آزمایش قرار دهید و از سمتهای گوناگون به آن حمله کنید، ولو این که نتوانسته باشید آن را به نتیجهٔ کامل برسانید، برای شما بسیار مفیدتر از زمانی است که راه‌حل دهها مسأله را از روی تختهٔ سیاه وارد دفتر خود کنید یا با مراجعه به کتابهای حل مسأله، راه حلها را به‌خاطر بسپارید.

خیلی از جمله‌هایی را که، ضمن حل مسأله، در این‌جا می‌بینید، برای نوشتن لازم نیست، بیشتر آنها، چیزهایی است که از ذهن شما می‌گذرد، گرچه نوشتن آنها هم، زیانی به شما نمی‌رساند.

هرجا، ضمن حل مسأله، سه نقطه پشت سرهم می‌بینید (...)، به‌معنای این است که فکر می‌کنید.

اینک مسأله‌ها:

مسألهٔ ۱ . باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد

$$A = ۱^{۱۹} + ۲^{۱۹} + ۳^{۱۹} + \dots + ۴۰^{۱۹}$$

را بر ۴۲ پیدا کنید.

حل. اوّل ببینیم، چه بخشی از این عددبر ۴۲ بخش‌پذیر است؟ $a^n + b^n$ (برای عدد طبیعی n) تنها وقتی بر $a + b$ بخش‌پذیر است که n، عددی‌فردباشد. ۱۹ عددی‌فرد است،بنابراین‌هریک‌از عددهای $۲^{۱۹}+۴۰^{۱۹}; ۳^{۱۹}+۳۹^{۱۹}; ۴^{۱۹}+۳۸^{۱۹}; \dots; ۲۰^{۱۹}+۲۲^{۱۹}$ بر ۴۲ بخش‌پذیر است. از عدد A، چه می‌ماند؟

$$۱ + ۲۱^{۱۹}$$

بنابراین، کافی است باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم $۲۱^{۱۹}$ را بر ۴۲ پیدا کنیم. اگر این باقی‌مانده برابر r باشد، آن‌وقت باقی مانده حاصل از تقسیم A بر ۴۲، برابر $r + ۱$ می‌شود.

برای پیدا کردن باقی ماندهٔ حاصل ضربی مثل abc برعددی طبیعی مثل m، باید باقی ماندهٔ تقسیم هریک از عاملهای ضرب بر m را پیدا کرد و، سپس، این باقی مانده‌ها را در هم ضرب کرد؛ و اگر این

حاصل‌ضرب از m بزرگتر باشد، دوباره باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم آن بر m را به‌دست آورد، داریم:

$$۲۱^{۱۹} = ۲۱\ (۲۱^{۳})^{۶} = ۲۱ \times ۹۲۶۱^{۶}$$

باقی ماندهٔ تقسیم ۹۲۶۱ بر ۴۲ برابر است با ۲۱. پس باید باقی ماندهٔ تقسیم عدد

$$۲۱ \times ۲۱^{۶} = ۲۱\ (۲۱^{۳})^{۲} = ۲۱ \times ۹۲۶۱^{۲}$$

و یا باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد

$$۲۱ \times ۲۱^{۲} = ۲۱^{۳} = ۹۲۶۱$$

را بر ۴۲ به‌دست آورد که برابر ۲۱ می‌شود. یعنی از تقسیم A بر ۴۲، باقی مانده‌ای برابر ۲۲ به‌دست می‌آید.

ولی دقت کنم. آیا لازم بود ۲۱ را به‌توان ۳ برسانم؟ $۲۱^{۲}$ برابر ۴۴۱ است و در تقسیم ۴۴۱ بر ۴۲ به‌همان باقی‌ماندهٔ ۲۱ می‌رسیم؛ یعنی از تقسیم هر توانی از ۲۱ بر ۴۲، باقی مانده‌ای برابر ۲۱ به‌دست می‌آید.

چه‌قدر جالب بود؟ ضمن تقسیم توانی از یک عدد بر ۲ برابر آن عدد، خود عدد به‌عنوان باقی‌مانده به‌دست آمد. آیا همیشه این‌طور است؟ آیا مثلاً از تقسیم $۲^{۷}$ بر ۴، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ به‌دست می‌آید؟ $۲^{۷}$ برابر است با ۱۲۸ و ۱۲۸ بر ۴ بخش‌پذیر است. پس قانون، کلی‌نیست. ببینم، شاید باید پایه عدد فرد باشد! مثلاً $۸۱ = ۳^{۴}$ و در تقسیم ۸۱ بر ۶، باقی‌مانده برابر ۳ می‌شود ... ولی اگر این قانون، کلی باشد، باید بتوانیم آن را درحالت کلی ثابت کنیم. عدد فرد را $۲n + ۱$ می‌گیریم. داریم:

$$(۲n + ۱)^{۲} = ۴n^{۲} + ۴n + ۱ = n\ (۴n + ۲) + ۲n + ۱$$

درست شد. از تقسیم $(۲n + ۱)^{۲}$ بر $۴n + ۲$ (یعنی دو برابر $۲n + ۱$)، باقی‌مانده برابر $۲n + ۱$ شد. یک قانون کلی پیدا کردم:

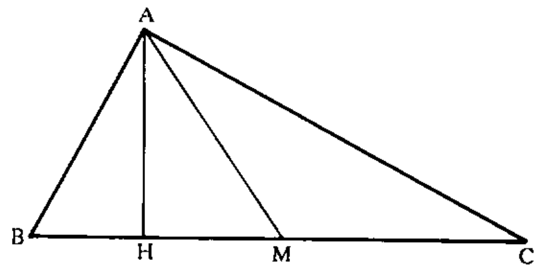
هر توانی از یک عدد فرد را، بر دو برابر آن عدد فرد تقسیم کنیم، باقی مانده‌ای برابر همان عدد فرد به‌دست می‌آید.

و سر کلاس درس، دانش‌آموزی این‌طور استدلال می‌کند:

اگر مقسوم و مقسوم‌علیه (بخشی و بخشیاب) را بر عددی تقسیم کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند، ولی باقی مانده، بر همان عدد تقسیم می‌شود. در تقسیم $۲۱^{۱۹}$ بر ۴۲، هر دو عدد را بر ۲۱ تقسیم می‌کنیم؛ باقی‌مانده تقسیم عدد فرد $۲۱^{۱۸}$ بر ۲ برابر است با ۱. پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲۱^{۱۹}$ بر ۴۲ برابر است با ۲۱×۱ یعنی ۲۱. همین استدلال را می‌توان در حالت کلی، برای تقسیم $(۲n + ۱)^{k}$ بر $۲(۲n + ۱)$ به کاربرد.

خیلی جالب بود. این استدلال، هم ساده‌تر است و هم قانع‌کننده‌تر ... خوب، عیبی ندارد. من هم، به هر حال، به‌نتیجهٔ درست رسیده بودم.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید، اگر از رأس A در مثلث غیر مشخص ABC ، میانهٔ AM ، نیمساز AD و ارتفاع AH را رسم کنیم، نیمساز AD همیشه بین ارتفاع AH و میانهٔ AM قرار می‌گیرد.

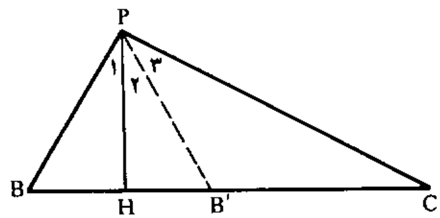


حل. در مثلث ABC، فرض می‌کنیم طول ضلع AB از طول ضلع AC کوچکتر باشد. در این‌صورت روشن است که نقطهٔ H به B نزدیکتراست تابه C (چون $|AB| < |AC|$ پس $|HC| > |BH|$). نقطهٔ M، پای میانه، درست در وسط ضلع BC قرار دارد. به این ترتیب، باید ثابت کنیم، نقطهٔ D ، پای نیمساز، بین H و M قرار دارد. ولی چه‌طور؟

ظاهراً در این‌جا، بن‌بست است ... باید راه دیگری بیندیشیم [اگر از این قضیه اطلاع داشته باشیم که نیمساز داخلی هر زاویهٔ مثلث، ضلع روبرو را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند، می‌توانیم در این جا هم، خودمان را از بن‌بست خارج کنیم. ولی فرض را بر این می‌گیریم که از این قضیّه اطلاعی نداریم].

از طریق ضلع BC به‌نتیجه‌ای نرسیدیم. به سراغ زاویهٔ A برویم. نیمساز AD، زاویهٔ A را نصف می‌کند، یعنی زاویهٔ بین نیمساز AD به ضلع AB، با زاویهٔ بین همین نیمساز با ضلع AC برابر است. ببینیم ارتفاع AH چه وضعی دارد. طول HC از طول HB بیشتر است، پس اگر HB' را برابر HB جدا کنیم، نقطهٔ B' بین H و C قرار می‌گیرد. مثلث ABB' متساوی‌الساقین است و بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$؛ ولی زاویهٔ A_2 جزئی از زاویهٔ HAC است، یعنی:

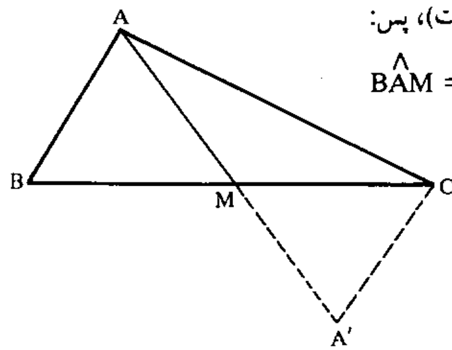
$$H\hat{A}B < H\hat{A}C$$



بله، درست است، با مقایسهٔ زاویه‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و AHC هم، می‌توانستیم به همین نتیجه برسیم. به این ترتیب، ارتفاع AH نسبت به نیمساز AD در سمت ضلع کوچکتر AB قرار دارد.

با میانه چه کنم؟ از مقایسهٔ زاویه‌های دو مثلث ABM و AMC به‌جایی نمی‌رسیم ... آهان، یادم آمد. دبیر هندسه توصیه کرده بود، بسیاری از مسأله‌های مربوط به میانه با ادامه دادن میانه به‌اندازهٔ خودش، حل می‌شوند. دو مثلث ABM و $MA'C$ با هم برابرند (واضح است)، پس:

$$B\hat{A}M = M\hat{A'}C$$



ولی در مثلث $AA'C$، طول ضلع AC از طول ضلع $A'C$ بیشتر است ($A'C$ طولی برابر طول AB دارد)، پس:

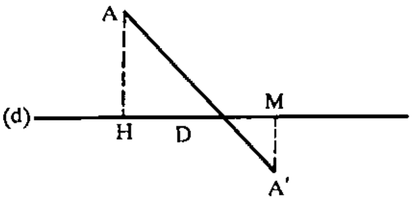
$$A\hat{A'}C > M\hat{A}C$$

که اگر به‌جای $A\hat{A'}C$، برابرش $B\hat{A}M$ را قرار دهیم:

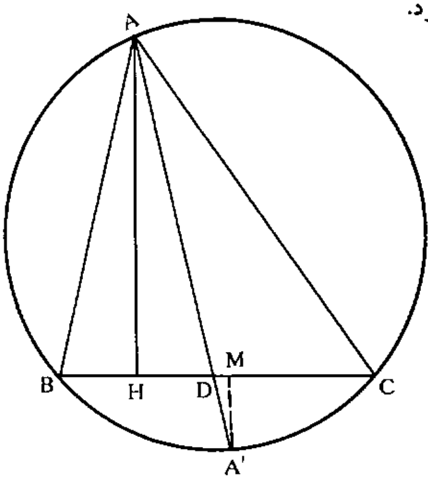
$$B\hat{A}M > M\hat{A}C$$

تمام شد. میانهٔ AM با ضلع بزرگتر، زاویهٔ کوچکتری می‌سازد، یعنی میانه AM نسبت به نیمساز AD، به ضلع بزرگتر نزدیکتر است. نیمساز AD، بین ارتفاع AH و میانهٔ AM واقع است.

و در کلاس درس، دانش‌آموزی، مسأله را این‌طور حل کرد.



اوّل توضیح داد: اگر پاره خط راست AA'، خط راست d را در نقطهٔ D قطع کرده باشد و از نقطه‌های A و A'، عمودهای AH و $A'M$ را بر (d) رسم کنیم، روشن است که D بین دو نقطهٔ H و M واقع می‌شود.



بعد برای حل مسأله، دایرهٔ محیطی مثلث را رسم کرد و نیمساز AD را ادامه داد تا دایره محیطی را در A' قطع کند. A' وسط کمان BC است بنابراین اگر از A' بر BC عمود کنیم، نقطهٔ M (پای عمود) در وسط ضلع BC قرار می‌گیرد، یعنی AM میانه مثلث است. طبق آن چه در ابتدا گفته شد، D بین M و H، یعنی نیمساز AD بین

ارتفاع AH و میانهٔ AM قرار دارد.

چه‌راه‌حل‌ساده و زیبایی؟ همه‌چیز باهم و در یک شکل ثابت شد.

مسألهٔ ۳. **می‌دانیم سه جمله‌ای درجه دوم**

$$f(x) = ax^۲ + bx + c$$

دست‌کم یک ریشهٔ درست دارد. a و b و c عددهایی حقیقی و k عددی طبیعی است. چند عدد طبیعی n می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی که f(n) بر k بخش‌پذیر باشد؟

حل. دبیر جبر توضیح داد، این مسأله ساده نیست و هرکسی نمی‌تواند آن را حل کند. کاش این حرف را نمی‌زد. اگر از دشوار بودن مسأله اطلاع نداشتم؛ با اطمینان بیشتری آغاز می‌کردم ... دست و دلم می‌لرزد. آیا می‌توانم مسأله را حل کنم؟ ... ولی نباید اعتماد به نفس را از دست بدهم. دشوار باشد. مگر کارهای دشوار را چه کسی باید انجام دهد؟ من هم یکی از آنها. شروع کنم ... ولی از کجا؟ ...

$f(x)$ یک ریشهٔ درست دارد. آن را α می‌نامیم، یعنی $f(\alpha) = ۰$. پس α یکی از عددهای n است: صفر بر هر عددی بخش‌پذیر است ... نه، نشد! درصورت مسأله گفته شده، α عددی درست است، نه عددی طبیعی. ممکن است α عددی منفی باشد؛ تنها وقتی $n = \alpha$ یکی از جوابهای مسأله است که α، عددی درست و مثبت باشد، یعنی یک عدد طبیعی ...

فرض کنیم، m عددی طبیعی باشد که، به ازای آن، $f(m)$ بر k بخش‌پذیر است:

$$f(m) = am^۲ + bm + c$$

$$f(\alpha) = a\alpha^۲ + b\alpha + c$$

α هر عددی باشد، $f(\alpha)$ بر k بخش‌پذیر است. پس باید:

$$f(m) - f(\alpha) = a(m^۲ - \alpha^۲) + b(m - \alpha)$$

بر k بخش‌پذیر باشد. چون $m - \alpha$ در حالت کلی بر k بخش‌پذیر نیست، پس:

$$a(m + \alpha) + b$$

بر k بخش‌پذیر است ... خوب، بعد چی؟ ... نمی‌شود ادامه داد ...

بهتر است در حالتهای خاص امتحان کنم، شاید راهی برای حل مسأله در حالت کلی پیدا شود. اگر داشته باشیم:

$$f(x) = \sqrt{۳}\,(x^۲ - ۳x + ۲)$$

وقتی n عددی طبیعی باشد، $f(n)$ تنها به ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ بر هر عدد طبیعی بخش‌پذیر است. برای هر عدد طبیعی دیگری، غیر از ۱ و ۲، مقدار داخل پرانتز عددی طبیعی و، درنتیجه، $f(n)$ عددی گنگ می‌شود و بخش‌پذیری عدد گنگ بر عدد طبیعی، بی‌معنی است. این‌جا، مسأله دو جواب دارد: $n = ۱$ و $n = ۲$. ولی مثلاً برای:

$$f(x) = \sqrt{۳}\,(x + ۱)\left(x - \sqrt{۲}\right).$$

به ظاهر، مسأله جواب ندارد و برای

$$f(x) = \sqrt{۵}\,(x^۲ - ۴)$$

تنها $n = ۲$ جواب مسأله است.

خوب است، ضریبهای a و b و c را گویا (یا درست) بگیریم. k را هم، عددی مشخص فرض کنم. ببینیم، مسألهٔ زیر را چگونه باید حل کرد:

عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که، برای سه جمله‌ای درجه دوم

$$f(x) = ۲x^۲ - x - ۱$$

عدد f(n) بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

عدد طبیعی x، در تقسیم بر ۵، به یکی از این باقی مانده‌ها می‌رسد:

۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴

ببینیم در هر یک از این حالتها، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $f(x)$ بر ۵ چه‌قدر است. جدولی تشکیل می‌دهیم. در ستون سمت چپ، عبارتی را می‌گذاریم (نسبت به x) و، در برابر آن، باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم این عبارت را بر ۵ قرار می‌دهیم.

x:	۰	۱	۲	۳	۴
x^2:	۰	۱	۴	۴	۱
$2x^2$:	۰	۲	۳	۳	۲
$-x$:	۰	-۱	-۲	-۳	-۴
$f(x)$:	-۱	۰	۰	-۱	-۳

$f(x)$ در دو حالت بر ۵ بخش‌پذیر است: وقتی که باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم x بر ۵، برابر ۱ یا ۲ باشد، یعنی در این مسأله، n می‌تواند به یکی از این دوصورت باشد:

$$n = 5p + 1 \quad \text{یا} \quad n = 5p + 2$$

که در آنها، p عددی است درست و غیرمنفی. آزمایش کنم، نکند اشتباه کرده باشم.

$$n = 5p + 1 \Rightarrow f(n) = 2(5p+1)^2 - (5p+1) - 1$$
$$= 50p^2 + 20p + 2 - 5p - 1 - 1 = 5(10p^2 + 3p);$$
$$n = 5p + 2 \Rightarrow f(n) = 2(5p+2)^2 - (5p+2) - 1$$
$$= 50p^2 + 40p + 8 - 5p - 2 - 1 = 5(10p^2 + 7p + 1)$$

بنابراین، در این مسأله، بی‌نهایت جواب برای n به‌دست می‌آید. پس مسأله می‌تواند جواب نداشته باشد، یک یا دو جواب داشته باشد و یا تعداد جوابها بی‌نهایت باشد.

ولی در حالت کلی، چه وضعی پیش می‌آید؟ ...

و دبیر جبر، مسأله را این‌طور حل می‌کند:

m را ریشهٔ درست $f(x)$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، به‌ازای دو عدد درست و مختلف p و q، غیر از m، $f(p)$ و $f(q)$ بر k بخش‌پذیر باشند. یعنی عددهای درست

$$am^2 + bm + c = 0\,,\ ap^2 + bp + c \in z\,, aq^2 + bq + c \in z$$

بر k بخش‌پذیرند. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$a(p^2 - m^2) + b(p - m) \in z \ \text{و}\ a(q^2 - m^2) + b(q - m) \in z$$

در نتیجه، $a(p+m)+b$ و $a(q+m)+b$ عددهایی گویا هستند و از آن‌جا باید داشته باشیم:

$$a(p-q) \in Q\,,\ a \in Q\,,\ b \in Q\,,\ c = -am^2 - bm \in Q$$

فرض می‌کنیم: $a = \frac{r}{s}\ ,\ b = \frac{t}{u}\ ,\ c = \frac{v}{w}$

$$g(x) = suwf(x) = ruwx^2 + tswx + suv$$

ضریبهای چندجمله‌ای $g(x)$، عددهایی درستند و به ازای هر $l \in z$ عدد

$$g(m + klsuw) = g(m + klsuw) - g(m)$$

بر عدد $klsuw$ بخش‌پذیر است. یعنی به ازای $n = m + klsuw$ $(l \in z)$، $g(n)$ بر $ksuw$ و، در این‌صورت، $f(n)$ بر kl، یعنی بر k بخش‌پذیر است.

بنابراین، اگر دو عدد $n \neq m$ وجود داشته باشد که، به‌ازای هریک از آنها، $f(n)$ بر k بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت تعداد این عددها بی‌نهایت است.

...

گمان می‌کنم نباید نگران باشم. باوجودی که مسأله دشوار بوده و راه حل ویژه‌ای، تا جاهایی پیش رفته بودم ولی باید سر فرصت، دربارهٔ این راه حل فکر کنم. هنوز بعضی نکته‌های مبهم برایم باقی مانده است. باوجود این معلوم شد، وقتی مسأله دارای بی‌نهایت جواب می‌تواند باشد که، ضریبهای a و b و c؛ عددهایی گویا باشند. در مثالی که، درحالت خاص، حل کرده بودم، ضریبها را عددهایی درست گرفته بودم، یعنی در مثال من

$$s = u = w = 1$$

یعنی در آن مثال $n = m + klsuw$ به‌صورت $n = m + 5l$ در می‌آید و چون m، یعنی ریشه‌های درست معادله، برابر ۱ و ۲ بود، جوابها به‌صورت $n = 5l + 1$ و $n = 5l + 2$ $(l \in Z)$ درآمد ... ولی همان‌طور که گفتم، باید دربارهٔ این راه حل و استدلالهای آن بیشتر فکر کنم. مسألهٔ جالبی بود.

تا بعد