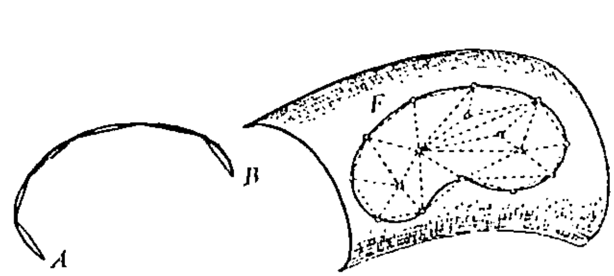
شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۹)

○ پرویز شهریاری

مفهوم حد و عدم دقت در کاربرد آن، می‌تواند موجب نتیجه‌گیریهای نادرست بشود. پیش از این هم، با مثالهایی، به برخی جنبه‌های این مفهوم و اشتباه‌های ناشی از درک «نادرست» یا «ساده اندیشانه» از آن اشاره کرده‌ایم. اکنون، دو مثال از کتاب «اشتباه استدلال‌های هندسی» می‌آوریم که به شکل‌های فضایی مربوط‌اند و اشتباه نتیجه‌گیری، در آنها، به کاربرد نادرست مفهوم حد بستگی پیدا می‌کند.

استوانهٔ شوارتز

وقتی می‌خواهند، کمان AB از یک منحنی را اندازه بگیرند، یعنی طول آن را محاسبه کنند (شکل ۱، سمت چپ)،



شکل (۱)

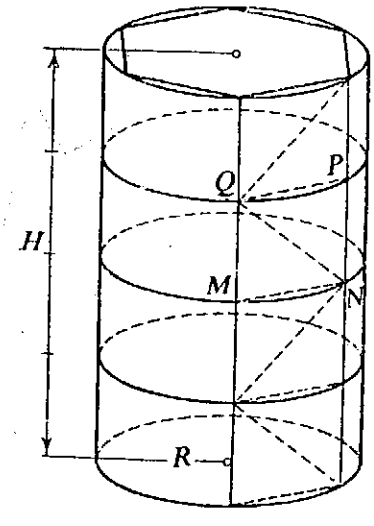
خط شکسته‌ای در آن محاط می‌کنند (لازم نیست، این خط شکسته منتظم باشد، زیرا برای برخی از کمانها، نمی‌توان این شرط را رعایت کرد) : سپس دنباله‌ای نامتناهی از این‌گونه خطهای شکسته در نظر می‌گیرند، به نحوی که رأسهای مجاور، به طور مرتب، به هم نزدیک و نزدیکتر شوند و، طول هر ضلع این خط شکسته، به سمت صفر میل کند. دنبالهٔ طولهای این خطهای شکسته، دارای حدی است که برابر طول کمان مورد نظر ماست.

اکنون به فضای دو بُعدی می‌رویم و کوشش می‌کنیم، طرحی شبیه طرح بالا، برای محاسبهٔ مساحت شکل F ، که روی یک سطح منحنی قرار دارد، پیدا کنیم (شکل ۱، سمت راست). طبیعی است که شبیه حالت مربوط به کمان، به این ترتیب عمل کنیم : در شکل F ، چند وجهی‌هایی محاط می‌کنیم [چندوجهی را، وقتی محاط در یک سطح منحنی گوییم که، رأسهای آن، روی این سطح باشند] و، سپس چندوجهی‌های دیگری که مساحتهای وجه‌های آنها، به ترتیب، کوچک و کوچکتر شود. در این صورت، مساحت شکل F ، حد مساحتهای این چندوجهی‌ها خواهد بود، وقتی که مساحت بزرگترین وجه، به سمت صفر میل کند. اندکی دقیقتر صحبت کنیم : درون شکل F و روی سطح آن، مجموعه‌ای از نقطه‌ها انتخاب می‌کنیم و آنها را سه به سه به هم می‌پیوندیم تا یک سطح چندوجهی با وجه‌های مثلثی شکل تشکیل شود، به نحوی که هیچ دو مثلثی

دارای نقطه‌های مشترک درونی و هیچ دارای یال مشترک نباشند. دنبالهٔ نامتناهی سطحهای چندوجهی‌های F_1، F_2، ...، F_n، ... را، محاط در شکل F، چنان در نظر می‌گیریم که طول بزرگترین یال در F_n (یعنی طول بزرگترین ضلع در بین همهٔ مثلثها)، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، به سمت صفر برود و هر نقطه از شکل F، حد دنبالهٔ نقطه‌هایی باشد که، به ترتیب، روی F_1، F_2، ...، F_n، ... انتخاب شده است (و این، از این جهت ممکن است که، وجه سطح چندوجهی، همیشه در سطح شکل F محاط است). کم و بیش روشن است که، دنبالهٔ مساحتهای چندوجهی‌های F_1، F_2، ... F_n، ... دارای حدی برابر مساحت F است، زیرا بین سطح منحنی و چندوجهی محاط در آن، وقتی وجه‌های چندوجهی خیلی کوچک شده باشند، در عمل، اختلافی وجود ندارد.

ولی در سالهای پایانی سدهٔ نوزدهم، شوارتز Schwarz ریاضیدان آلمانی [هرمان آماندوس شوارتز در سالهای ۱۸۴۳ تا ۱۹۲۱ زندگی می‌کرد و از سال ۱۸۹۳ میلادی عضو فرهنگستان علوم برلن بود]، با مثال ساده‌ای، ثابت کرد که، این روشنی ظاهری و این «شبیه‌سازی» با حالت کمان، ما را فریب داده است. مثال شوارتز را در این‌جا می‌آوریم.

استوانهٔ دوار قایمی با شعاع قاعدهٔ برابر R و ارتفاع برابر H در نظر می‌گیریم (شکل ۲). سطح جانبی استوانه را با روشی که در بالا آوردیم، پیدا می‌کنیم. برای این منظور، ارتفاع را به n بخش برابر تقسیم می‌کنیم و از هر نقطه، صفحه‌ای موازی قاعدهٔ استوانه رسم می‌کنیم. از برخورد این صفحه‌ها با سطح جانبی استوانه، $(n-1)$ دایره به دست می‌آید که، با توجه به دو قاعده، سطح جانبی را به n کمربند استوانه‌ای تقسیم می‌کنند. در یکی از این دایره‌ها، یک m ضلعی منتظم محاط می‌کنیم. مولدهایی که از رأسهای این m ضلعی می‌گذرند، هر یک از دایره های دیگر را، به m بخش برابر تقسیم می‌کنند. این نقطه‌های برخورد، رأسهای m ضلعیهای منتظم را، در هر یک از دایره ها تشکیل می‌دهند. پاره‌خطهای راستی که روی مولدها به وجود می‌آید، با ضلعهای چندضلعیهای منتظم محاطی، روی هم به تعداد mn مستطیل یکسان تشکیل می‌دهند (که یکی از آنها MNPQ در شکل ۲ است). رأس‌های این مستطیلها، روی سطح جانبی استوانه قرار دارند. اکنون، اگر هر یک از این مستطیلها را، با رسم قطر، به دو مثلث تقسیم کنیم، یک سطح چندوجهی به دست می‌آید که در سطح جانبی استوانه محاط شده است و وجه‌های آن را، 2mn مثلث یکسان تشکیل می‌دهند. وقتی عددهای m و n، هر دو به‌طور نامحدود بزرگ شوند، ضلعهای این مثلثها، و همراه با آنها، فاصلهٔ هر نقطهٔ واقع بر سطح این چندوجهی تا سطح جانبی استوانه، به سمت صفر میل می‌کند.

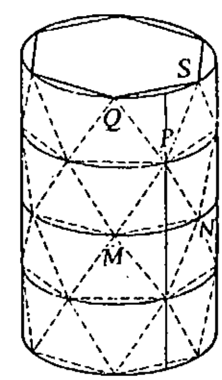


شکل (۲)

هر چندوجهی محاطی به وسیلهٔ دو عدد m و n معین می‌شود؛ ولی با بی‌نهایت روش می‌توان دنبالهٔ این چند‌وجهی‌ها را ادامه داد؛ به این ترتیب که، یکی از این دو عدد را تابعی دلخواه از دیگری بگیریم (توجه کنید: هر دو عدد m و n طبیعی‌اند و با هم به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند). به عنوان نمونه، می‌توان $m=n$ یا $m=3n$ یا $m=n^2$ و غیره فرض کرد. به احتمالی، خواننده به این نکته توجه کرده باشد که، سطح چندوجهی ما، در واقع، سطح جانبی یک منشور m وجهی محاط در استوانه را تشکیل می‌دهد که، با تقسیم هر یک از m مستطیل جانبی به 2n مثلث، به همان هدفی می‌رسیم که در شکل ۱ دنبال کردیم. به این ترتیب، باید با این روش، به محاسبهٔ سطح جانبی استوانه برسیم که، به یاری سطح جانبی منشور و با

عبور حدی، به دست می‌آید. در ضمن، روشن است که، در این استدلال، هیچ سفسطه یا ابهامی وجود ندارد.

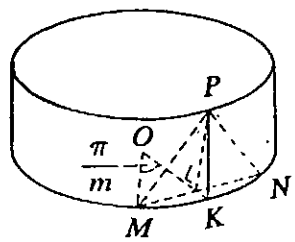
اکنون، در روش محاط کردن چندوجهی، تغییرهایی می‌دهیم. در آغاز، ارتفاع H را به n بخش برابر تقسیم می‌کنیم، $(n-۱)$ مقطع دایره‌ای به دست می‌آید که، با دو قاعدهٔ استوانه، روی هم $(n+۱)$ دایره می‌شود. در هر یک از این دایره‌ها، یک m ضلعی منتظم محاط می‌کنیم؛ تنها ترتیب رأسهای این m ضلعیها را چنان انتخاب می‌کنیم که، هر مولدی که از یک رأس یک m ضلعی محاطی می‌گذرد، کمان‌های مربوط به ضلعهای m ضلعیهای دایره‌های مجاور را نصف کند. در شکل ۳، مولدی که از رأس P می‌گذرد، کمانهای $\overset{\frown}{MN}$ و $\overset{\frown}{QS}$ را نصف می‌کند. البته، خطهای راست QM و SN (که



شکل (۳)

در شکل ۳ رسم نشده‌اند) نیز، مولدهایی از استوانه خواهند بود. به زبان دیگر، در این جا هم، مثل قبل، هر چندضلعی محاط در دایره، از انتقال چندضلعی محاط در دایره مجاور به‌اندازه $\frac{H}{n}$ به دست می‌آید؛ تنها باید بعد از انتقال، چند ضلعی را به اندازهٔ نصف زاویهٔ مرکزی هر ضلع، یعنی $\frac{\pi}{n}$، دور مرکز آن دوران دهیم. اکنون، با چندضلعیهای منتظم محاطی، که به این ترتیب به دست آمده‌اند، یک چندوجهی با وجه‌های مثلثی می‌سازیم؛ به این ترتیب که هر رأس را به دو رأس نزدیک خود در دایره‌های مجاور وصل می‌کنیم. این سطح چندوجهی (که می‌توان آن را به صورت یک فانوس کاغذی با مرزهای تا شده در نظر گرفت)، که از تعداد ۲mn مثلث متساوی‌الساقین برابر تشکیل شده است (n لایه و در هر لایه ۲m مثلث)، برای سطح منحنی استوانه، یک چندوجهی محاطی را، به مفهوم واقعی خود، مشخص می‌کند.

روشن است، برای محاسبهٔ مساحت این چند وجهی، باید



شکل (۴)

مساحت یکی از وجه‌های آن را، مثل وجه MNP، به دست آورد. این وجه، در شکل ۲ نشان داده شده است و در شکل ۳، به طور جداگانه، آمده است و، در آن MN، عبارت است از ضلع m ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مقطع به مرکز O. K و L، به ترتیب، وسط کمان $\overset{\frown}{MN}$ و وتر MN در نظر گرفته شده و PK پاره‌خط راستی از مولد استوانه است. مثلث MNP متساوی‌الساقین است ($|PM|=|PN|$، زیرا این پاره‌خطهای راست، روی صفحه دایرهٔ O، تصویرهای برابر KM و KN را دارند)؛ طول PL، ارتفاع این مثلث را می‌توان از مثلث PKL به‌دست آورد که در آن داریم:

$$|PK|=\frac{H}{n} \quad , \quad \hat{K}=۹۰^\circ \quad ,$$

$$|KL|=R-|OL|=R-R\cos\frac{\pi}{m}=۲R\sin^۲\frac{\pi}{۲m}$$

از آنجا

$$|PL|=\sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^۲+۴R^۲\sin^۴\frac{\pi}{۲m}}$$

و چون داریم:

$$\frac{۱}{۲}|MN|=R\sin\frac{\pi}{m}$$

به‌دست می‌آید:

$$S_{MNP}=R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^۲}{n^۲}+۴R^۲\sin^۴\frac{\pi}{۲m}}$$

مساحت سطح تمام چندوجهی را S_{mn} می‌نامیم (که از تقسیم هر دایره به m بخش برابر و تقسیم ارتفاع استوانه به n بخش برابر، به دست آمده است). در این صورت

$$S_{mn}=۲mnR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^۲}{n^۲}+۴R^۲\sin^۴\frac{\pi}{۲m}}$$

$$= 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2 + 4n^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

پیش از این هم دیدیم که، از مجموعهٔ عددهای S_{mn}، می‌توان با بی‌نهایت روش، یک دنباله جدا کرد ؛ این روشها، به نوع رابطه‌ای بستگی دارند که بین m و n وجود دارد. دو نمونه از این حالتها را در نظر می‌گیریم :

الف) $n = m^2$ ، یعنی وقتی که، به ترتیب، هر دایره را به ۳، ۴، ۵، ... بخش برابر و ارتفاع استوانه را به ۹، ۱۶، ۲۵، ... بخش برابر تقسیم کرده باشیم. اکنون دیگر، مساحت سطح چندوجهی را با S_m نشان می‌دهیم، زیرا این مساحت تنها به m بستگی دارد. دستور مساحت چنین می‌شود :

$$S_m = 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2 + 4m^4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

اکنون باید حد مقدار S_{mn} را، وقتی m به سمت بی‌نهایت میل کند، پیدا کنیم. با میل m به سمت بی‌نهایت، مقدارهای $\sin\frac{\pi}{m}$ و $\sin\frac{2\pi}{m}$ به سمت صفر میل می‌کنند و عبارت S_{mn} را می‌توان این‌طور نوشت :

$$S_m = 2\pi R\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}\pi^4R^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4}$$

که درنتیجه، به‌دست می‌آید :

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi R\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}\pi^4R^2}$$

و روشن است که، این مقدار، از $2\pi RH$، یعنی سطح جانبی استوانه، بزرگتر است.

اگر $n = km^2$ بگیریم ($k \in N$)، می‌توان این مساحت را به هر اندازه که بخواهیم، بزرگتر کرد، زیرا در این حالت داریم :

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi R\sqrt{H^2 + \frac{K^2}{4}\pi^4R^2}$$

ب) $n = m^3$. در اینجا تعداد بخشهای ارتفاع، نسبت به حالت قبل، خیلی سریعتر از تعداد بخشهای محیط دایره، زیاد می‌شود. در این حالت، بسادگی می‌توان به این نتیجه رسید که، وقتی m به سمت بی‌نهایت میل کند، S_m هم به سمت بی‌نهایت میل می‌کند ؛ یعنی می‌توان چندوجهی‌های محاطی را طوری در نظر گرفت که، مجموع مساحتهای آنها، به سمت حد معینی میل نکند و تا بی‌نهایت، صعودی باشد ؛ و این، به معنای آن است که، سطح جانبی استوانه، مساحت معینی ندارد.

اکنون ببینیم، در استدلال ما، چه اشتباهی وجود دارد؟ در کجا سفسطه کرده‌ایم؟ در پاسخ باید گفت : درست است که سطح چندوجهی، مرتب، به سطح استوانه‌ای نزدیک می‌شود، ولی از اینجا نمی‌توان نتیجه گرفت که، مساحت سطح چندوجهی، به‌طور نامحدود، به مساحت سطح استوانه‌ای نزدیک می‌شود. برای این‌که بستگی بین این دو گونه نزدیکی را روشن‌تر کنیم، یادآوری می‌کنیم : با همان روشی که در شکل ۳ نشان دادیم، می‌توان یک چندوجهی محاطی، برای سطح جانبی استوانه به دست آورد که، به یاری آن بتوان، سطح جانبی استوانه را محاسبه کرد. به عنوان نمونه، اگر فرض کنیم $n = m$ یا $n = 10m$ و یا، به طورکلی، اگر تعداد بخشهای ارتفاع و تعداد بخشهای محیط دایره، نسبت به هم، به‌طور متناسب تغییر کنند، مثلاً در حالت $n = 10m$ به دست می‌آید :

$$S_m = 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2 + 400m^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

$$= 2mR\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2 + \frac{25\pi^2R^2}{m^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4}$$

که وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، به دست می‌آید :

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi RH$$

که همان سطح جانبی استوانه است.

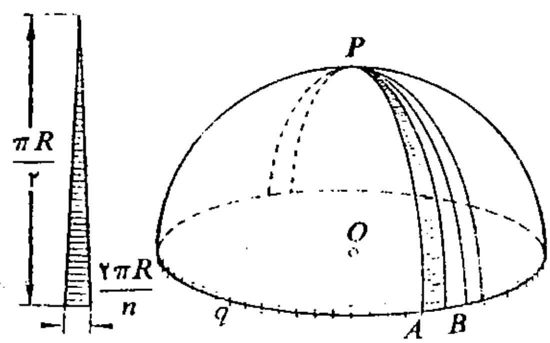
چرا وقتی با قانون دیگری، و مثلاً رابطهٔ $n = m^2$، مساحت چندوجهی را محاسبه کنیم، S_m به سمت حدی میل می‌کند که از $2\pi RH$ بزرگتر است و چرا با رابطهٔ $n = m^3$، این سطح به سمت بی‌نهایت میل می‌کند؟ برای پاسخ به این

پرسش‌ها، وارد بحث دقیق ریاضی نمی‌شویم و تنها به درک شهودی مطلب اکتفا می‌کنیم (و البته، همین دید ظاهری و معرفت شهودی است که می‌تواند ما را به سمت استدلال دقیق ریاضی راهنما باشد). در حالت $n = m$ یا $n = 10m$، انبوهی و فشردگی تقسیمهای محیط دایره و ارتفاع، با سرعتی یکنواخت رو به افزایش هستند و، در نتیجه، سطح چندوجهی غیر مقعر می‌ماند و همهٔ وجه‌های آن، به تقریب، به صورت قایم درمی‌آیند، البته به شرطی که استوانه را قایم در نظر بگیریم (شما با استفاده از شکل ۴، می‌توانید ثابت کنید، وجه MNP، با صفحهٔ افقی، زاویهٔ MKN را می‌سازد که، با میل m به سمت بی‌نهایت، به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند). بنابراین، سطح چندوجهی، نه تنها از لحاظ فاصله، بلکه در ضمن از نظر جهت هم، به سطح جانبی استوانه نزدیک می‌شود. در حالی که وقتی داشته باشیم $n = m^2$ یا $n = m^3$، وضع دیگری پیش می‌آید؛ در اینجا، تقسیمهای ارتفاع، با سرعتی بسیار بیشتر از تقسیمهای محیط دایره رو به افزایش می‌رود. درنتیجه، سطح چندوجهی، به طور محسوس، «دندانه‌ای» می‌شود که، با محاسبهٔ سطح استوانه، مقداری از سطح این چندوجهی به حساب نمی‌آید. در این حالت، وجه‌های مثلثی شکل، به صورت قایم در نمی‌آیند و می‌توان ثابت کرد، با شرط $n = m^2$، زاویهٔ PLK (شکل ۴) به سمت یک زاویهٔ حاده میل می‌کند و، در حالت $n = m^3$، این زاویه به سمت صفر میل می‌کند (یعنی در این حالت، وقتی m به سمت بی‌نهایت میل کند، چندوجهی به صورت افقی درمی‌آید).

به‌طور طبیعی، پرسشی پیش می‌آید: سرچشمهٔ عدم شباهت بین خط شکستهٔ محاط در یک منحنی و سطح چندوجهی محاط در یک سطح منحنی، در کجاست؟ چرا در حالت اول، با نزدیک شدن رأس‌ها به یکدیگر، خط شکسته، نه تنها از نظر فاصله، بلکه از نظر جهت هم به خط منحنی نزدیک می‌شود، در حالی که در حالت دوم، وقتی چند وجهی از لحاظ فاصله به سطح منحنی نزدیک می‌شود، ممکن است از لحاظ جهت به آن نزدیک نشود. بدون این که، به تفصیل، وارد این بحث شویم، تنها به یک واقعیت اشاره می‌کنیم. اگر روی یک منحنی، دو نقطه را در نظر بگیریم، به نحوی که یکی از آنها بی‌حرکت باشد، وقتی نقطهٔ متحرک به سمت نقطهٔ ثابت میل می‌کند، پاره‌خط راستی که آنها را به هم وصل می‌کند، درحد، به سمت مماس بر منحنی در نقطهٔ ثابت، نزدیک می‌شود. ولی اگر سه نقطه بر روی یک سطح منحنی در نظر بگیریم و از این سه نقطه، یکی را ثابت فرض کنیم (فرض می‌کنیم، سه نقطه روی یک خط راست نباشند)، وقتی دو نقطهٔ دیگر، به سمت نقطهٔ ثابت نزدیک شوند، صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، همیشه به سمت صفحهٔ مماس بر سطح در نقطهٔ ثابت میل نمی‌کند. روی سطح یک کره، یک مقطع دایره‌ای در نظر بگیرید و سه نقطه روی محیط این دایره انتخاب کنید (یک نقطهٔ ثابت و دو نقطهٔ متغیر)؛ وقتی دو نقطهٔ متغیر به سمت نقطهٔ ثابت میل کنند، در هر حال، صفحه‌ای که از سه نقطه می‌گذرد، همان صفحهٔ مقطع است.

آیا مساحت سطح کرهٔ به شعاع R، برابر است با π^2R^2؟

نیم کرهٔ به مرکز O را در نظر می‌گیریم (شکل ۵)، q را «استوا» و نقطه P را «قطب» نیم‌کره فرض می‌کنیم (یعنی شعاع OP، بر صفحهٔ استوای q که از O می‌گذرد، عمود است). محیط دایرهٔ q را به n بخش برابر تقسیم می‌کنیم (n، عددی است طبیعی و به اندازهٔ کافی بزرگ)؛ نقطهٔ P را بوسیلهٔ کمانهایی از دایرهٔ عظیمه، به همهٔ نقطه‌های تقسیم می‌پیوندیم (هر یک از این کمانها، طولی برابر $\frac{1}{4}$ طول «نصف‌النهار» دارد). در این صورت، نیم‌کره، به n مثلث کروی خیلی باریک تقسیم می‌شود، به نحوی که، هر مثلث، محدود است به کمان بسیار کوچکی از استوا و دو کمان نصف‌النهار (چند تا از این مثلثها در شکل ۵ داده شده و، یکی از آنها، مثلث PAB، با هاشور مشخص شده است). با بزرگ کردن عدد n، می‌توان این مثلثهای کروی را به دلخواه کوچک کرد (به صورت تارهای نازک). با باز کردن هر یک از این مثلثها، می‌توان آنها را، با حفظ تمام اندازه‌ها (یعنی طول، زاویه و مساحت)، بر یک صفحه قرار داد. در این صورت، مثلثهای متساوی‌الساقینی به دست می‌آید که قاعدهٔ هر یک از آنها، کمانی به طول $\frac{2\pi R}{n}$ و ارتفاع



شکل (۵)

هر یک، کمانی برابر $\frac{1}{4}$ محیط دایره، یعنی به طول $\frac{1}{2}\pi R$ است (شکل ۵، سمت چپ را ببینید). مساحت چنین مثلثی، برابر است با :

$$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi R}{n}\times\frac{\pi R}{2}=\frac{1}{2n}\pi^2R^2$$

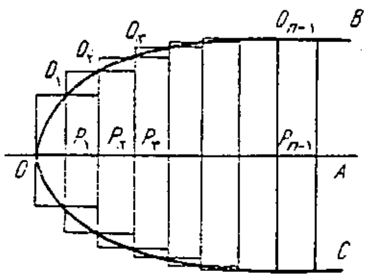
تمام n مثلث، که نیم کره را پوشانده‌اند، مساحتی برابر $\frac{1}{2}\pi^2R^2$ پیدا می‌کند ؛ و مساحت سطح تمامی کره برابر π^2R^2 می‌شود. و روشن است که، این نتیجه، با دستوری که برای محاسبهٔ مساحت سطح کره می‌شناسیم (یعنی $4\pi R^2$) یکی نیست، زیرا $\pi \neq 4$.

خوب، فکر می‌کنید، در کجا اشتباه کرده‌ایم؟ حقیقت این است که جمله‌هایی از گونه «عدد بسیار بزرگ»، «مثلث خیلی کوچک»، «کمان کوچک» و «مثلث بی‌اندازه باریک»، مفهوم ریاضی ندارند. از این جمله‌ها می‌توان برای توصیف شکلهای هندسی استفاده کرد، ولی مجاز نیستیم از آنها به عنوان استدلال ریاضی، برای به دست آوردن رابطه یا دستور استفاده کنیم. اشتباه اصلی در آن جاست که استدلال کرده‌ایم، وقتی یک مثلث کروی خیلی باریک باشد، می‌توان آن را روی یک صفحه باز کرد، یعنی یک مثلث کروی را به یک مثلث مسطحه، با همان طولها، زاویه‌ها و مساحت تبدیل کرد. در واقع، یک مثلث کروی را (هر قدر کوچک باشد)، نمی‌توان به مفهومی که گفتیم، روی یک صفحه گسترد. این مطلب، از این‌جا هم روشن می‌شود که، مجموع زاویه‌های هر مثلث واقع بر صفحه، برابر ۱۸۰ درجه است، در حالی که مجموع زاویه‌های یک مثلث کروی، همیشه از ۱۸۰ درجه بیشتر است. در مثال ما، در مثلث کروی PAB (شکل ۵، سمت راست)، زاویه‌های به رأسهای A و B، قایمه‌اند و اگر بتوان چنین مثلثی را روی صفحه پهن کرد، مثلث متساوی الساقینی در روی صفحه به دست می‌آید (شکل ۵، سمت چپ) که دو زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن قایمه است.

□

نخستین کسی که از مقدارهای بسیار کوچک و حد مجموع آنها استفاده کرد، ارشمیدس بود. او با روش ابداعی خود توانست راهی برای محاسبه مساحت قطعه‌ای از سهمی و، همچنین، محاسبهٔ حجم سهموی (پارابولوئید)، یعنی حجم جسمی که از دوران یک سهمی دور محور خود به دست می‌آید، پیدا کند (امروز، این محاسبه‌ها را به یاری انتگرال‌گیری انجام می‌دهند ؛ به همین مناسبت، ارشمیدس را باید پیشگام در راه کشف محاسبهٔ انتگرالی دانست). در اینجا طرحی از روش او را برای محاسبه حجم سهموی می‌آوریم.

فرض کنیم، قطعه سهمی BOC، دور محور خود OA، دوران کرده باشد (شکل ۶).



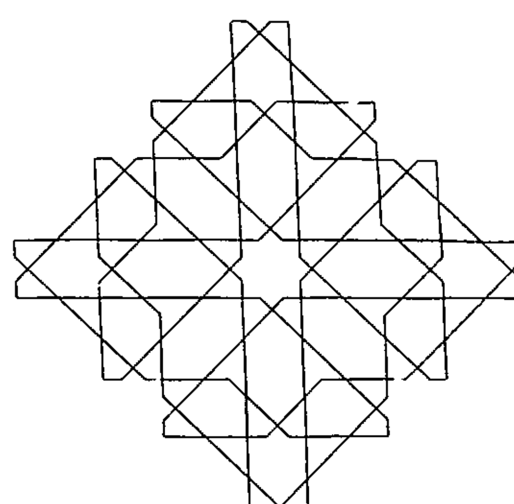
شکل (۶)

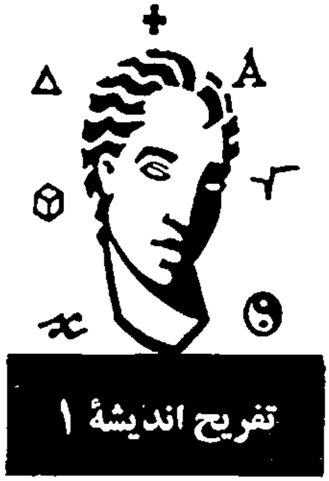
ارشمیدس، ارتفاع قطعه سهمی، یعنی OA را به n بخش برابر OP_1، P_1P_2، P_2P_3، ...، $P_{n-1}A$ تقسیم کرد ؛ سپس، از نقطه‌های تقسیم، عمودهای P_1Q_1، P_2Q_2، P_3Q_3، ...، $P_{n-1}Q_{n-1}$ را بر محور سهمی رسم کرد و روی آنها، مستطیلهای محیطی و محاطی را ساخت. با دوران تمامی شکل، دور محور OA، دو جسم پله‌ای به دست آورد که از استوانه‌های محیط بر سهموی دوار و محاط در آن، به دست آمده بودند. حجم جسم بیرونی بیشتر از حجم سهموی و حجم جسم درونی کمتر از حجم سهموی است. ارشمیدس با آغاز از حجم این دو جسم، و با افزایش تعداد بخشهای OA، توانست

حجم سهموی دوار را پیدا کند. و ارشمیدس، با این روش، نتیجه گرفت، اگر قطعه سهمی، ارتفاعی برابر OA و قاعده‌ای برابر BC داشته باشد، حجم سهموی ناشی از دوران این قطعه سهمی دور OA ، برابر است با نصف حجم استوانه‌ای که ارتفاعی برابر OA و قاعده‌ای به قطر BC داشته باشد.

روش ارشمیدس، نزدیک به دور هزار سال، به فراموشی سپرده شد و، اگرچه ریاضیدانان ایرانی اندک توجهی به آن داشتند، هیچ پیشرفتی نکرد تا این که در پایان سدهٔ شانزدهم و آغاز سدهٔ هفدهم میلادی، به وسیلهٔ یوهان کپلر احیا شد. روش کپلر، مورد پسند ریاضی‌دانان زمان او نبود، چرا که آنها با روشهای رسمی خو گرفته بودند و تصور می‌کردند، روش ارشمیدس و کپلر، بدعتی است که مخرب «استدلال دقیق و منطقی» ریاضیات است. ولی کپلر راه خود را ادامه داد؛ او معتقد بود، برای حل یک مسأله، باید از هر روشی سود جست «ولواین که راه خاردار مطالعهٔ کتاب ارشمیدس» باشد. کپلر، در بررسیهای اخترشناسی و برای محاسبهٔ مساحت قطاع از یک منحنی غیرمشخص، روش ارشمیدس را انتخاب کرد. بعد از کپلر، ریاضیدانانی چون کاوالیری، فرما، روبروال، توریچلی، پاسکال و باروی همین راه را ادامه دادند تا، سرانجام، محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی به وسیلهٔ نیوتون و لایب نیتس پایه‌گذاری شد و دانشمندانی چون برنولی، اولر، هوپیتال، تیلور و کلرو این شاخه از دانش ریاضی را به اوج خود رساندند.

تا بعد



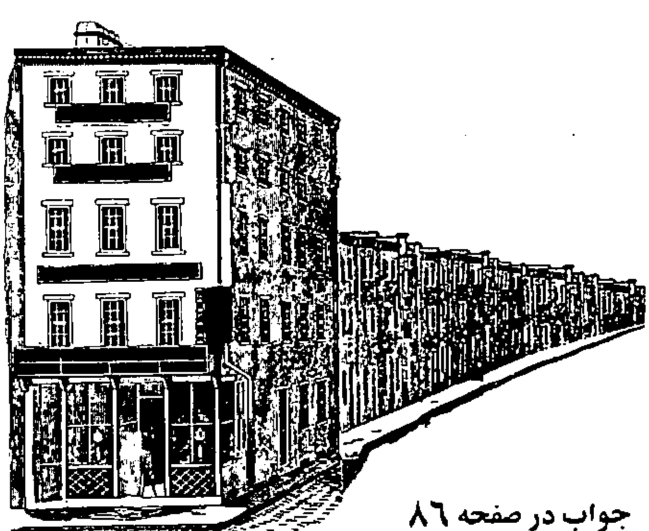


محل اقامت چند گانه

خانواده‌های B ، C ، F ، M ، و S در طبقه‌های مختلف ساختمانی زندگی می‌کنند که تنها پنج طبقه دارد.

با در دست داشتن اطلاعات زیر می‌توانید بگویید هر یک در کدام طبقه زندگی می‌کند؟

۱. B در طبقهٔ آخر زندگی نمی‌کند.
۲. C در طبقهٔ اول زندگی نمی‌کند.
۳. F در طبقهٔ آخر یا طبقهٔ اول زندگی نمی‌کند.
۴. M در طبقهٔ بالاتر از طبقهٔ C زندگی می‌کند.
۵. S در طبقه‌ای مجاور (بلافاصله بالا یا زیر) طبقهٔ F زندگی نمی‌کند.
۶. F در طبقه‌ای مجاور طبقهٔ C زندگی نمی‌کند



جواب در صفحه ۸٦